

(準) 同型 $H_3^+ \simeq A_5$ の双曲型コクセター群への一般化、
およびその応用

筑波大学数学系
森田 純

目次

1. まえがき
2. コクセター群入門
3. コクセター群 H_3 と交代群 A_5
4. コクセター群 W_m と交代群 A_m
5. 応用と諸注意など
6. 参考文献

1 まえがき (予稿より)

以下の性質をもつ $n \times n$ 行列 $M = (m_{ij})$ をコクセター行列と呼ぶ。

$$m_{ij} \in \{\infty, 1, 2, 3, \dots\}, \quad m_{ii} = 1, \quad m_{ij} = m_{ji} > 1 \quad \text{if } i \neq j$$

しばしばコクセター行列をグラフ化すると便利ことが多い。まず n 個の頂点を用意して、1 から n までの番号をつけておく。そして、頂点どうしを次の約束に従って辺で結ぶ。 $m_{ij} = 2$ なら頂点 i と頂点 j は結ばず、 $m_{ij} = 3$ なら頂点 i と頂点 j を単に辺で結び、 $m_{ij} > 3$ ならば頂点 i と頂点 j を数値 m_{ij} 付きの辺で結ぶ。これをコクセター図形という。コクセター行列 M が与えられたとき、基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ をもつ n 次元ベクトル空間 V を考え、さらに V 上の双一次形式 (\cdot, \cdot) を

$$(e_i, e_j) = -\cos \frac{\pi}{m_{ij}}$$

で与える。このとき、 V 上の線形変換 σ_i ($1 \leq i \leq n$) を

$$\sigma_i(e_j) = e_j - 2(e_i, e_j)e_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

で定義する。この σ_i は 2 度続けると恒等変換となるため、特に V の自己同型写像である。これら $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ で生成される $GL(V)$ の部分群 W を (M に付随する) コクセター群という。こうして得られたコクセター群 W は次の群表示をもつことが知られている。

$$((\text{生成元})) \quad \sigma_1, \dots, \sigma_n; \quad ((\text{基本関係})) \quad (\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}} = 1 \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

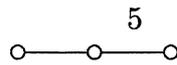
この群表示からも容易に判るが、 W から $\{\pm 1\}$ への準同型 ε で $\varepsilon(\sigma_i) = -1$ を満たすものが存在する。その核を W^+ で表す。また、 V の部分集合

$$\Phi = \{ \sigma(e_i) \mid \sigma \in W, 1 \leq i \leq n \}$$

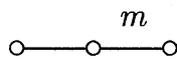
を W のルート系という。これは群 W の性質を調べる上で非常に重要なものである。ここで例として、コクセター行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

をとる。このコクセター図形は



となり、これは普通 H_3 型と呼ばれているものである。このとき、 H_3^+ が 5 次交代群と同型となることが知られている。この一般化として、コクセター図形



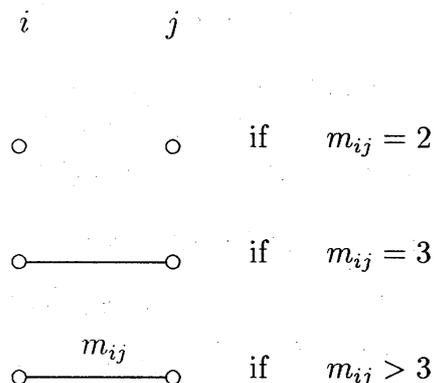
をとり、付随するコクセター群 W_m を考える。そして、 $m \geq 11$ が 6 と素ならば、 W_m^+ から m 次交代群への準同型が存在することを示し、考察を加える。

2 コクセター群入門

コクセター行列 正方行列 $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ であって、次の性質を満たすものをコクセター行列と呼ぶ。

$$\begin{cases} m_{ij} \in \{ \infty, 1, 2, 3, \dots \} \\ m_{ii} = 1 \\ 2 \leq m_{ij} \leq \infty \quad (i \neq j) \\ m_{ij} = m_{ji} \end{cases}$$

コクセター図形 n 次のコクセター行列 M に対して、 n 個の番号付けされた頂点を用意して、これらの頂点間を以下の規則に従って辺で結んで出来る図形を M のコクセター図形と呼ぶ。



双一次形式 基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を持つ n 次元実ベクトル空間 $V = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{R}e_i$ を考え、 V 上の双一次対称形式 $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$(e_i, e_j) = -\cos \frac{\pi}{m_{ij}}$$

$(1 \leq i, j \leq n)$ で与える。

鏡映変換 V 上の線形変換 σ_i ($1 \leq i \leq n$) を

$$\sigma_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(e_i, \mathbf{v})e_i \quad (\mathbf{v} \in V)$$

で定義する。このとき、 σ_i は超平面

$$H_i = \{ \mathbf{v} \in V \mid (\mathbf{v}, e_i) = 0 \}$$

の各点を固定し、 e_i を $-e_i$ に写す V 上の鏡映変換である。特に、 σ_i の位数は 2 となり、 σ_i は V の自己同型写像である。

鏡映群 鏡映 $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ で生成される $GL(V)$ の部分群を W で表す。一般に鏡映で生成される群を鏡映群と呼ぶ。さらに、各鏡映 σ_i は (\cdot, \cdot) を不変にする：

$$\begin{aligned} (\sigma_i \mathbf{v}, \sigma_i \mathbf{v}') &= (\mathbf{v} - 2(e_i, \mathbf{v})e_i, \mathbf{v}' - 2(e_i, \mathbf{v}')e_i) \\ &= (\mathbf{v}, \mathbf{v}') - 2(e_i, \mathbf{v}')(\mathbf{v}, e_i) - 2(e_i, \mathbf{v})(e_i, \mathbf{v}') + 4(e_i, \mathbf{v})(e_i, \mathbf{v}')e_i \\ &= (\mathbf{v}, \mathbf{v}') \end{aligned}$$

ので、 W は (\cdot, \cdot) に関する V の直交変換群 $O(V)$ の部分群となっている。

群に於ける等式 抽象群 G に対し、 G に於ける等式とは、

$$g = h \quad (g, h \in G)$$

或は

$$g_1 g_2 \cdots g_l = h_1 h_2 \cdots h_m \quad (g_i, h_j \in G)$$

の様に、 G の元を表す両辺が G の元として等しいことを意味しているものとする。

群表示 群 G の生成元 x_1, \dots, x_n が与えられているとき、これら生成元で表された G に於ける等式の族 \mathbf{F} :

$$e_\lambda(x_1, \dots, x_n) = f_\lambda(x_1, \dots, x_n) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

が G の基本関係であるとは、 x_1, \dots, x_n で表された他のいかなる G に於ける等式も、 \mathbf{F} から必ず導けるときのいう。

コクセター群 鏡映群 W の生成元は

$$\sigma_1, \dots, \sigma_n$$

で与えられているが、このとき

$$(\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}} = 1 \quad (1 \leq i, j \leq n, m_{ij} < \infty)$$

或は言い替えて

$$\underbrace{\sigma_i \sigma_j \sigma_i \cdots}_{m_{ij} \text{ 個}} = \underbrace{\sigma_j \sigma_i \sigma_j \cdots}_{m_{ij} \text{ 個}}$$

$(1 \leq i, j \leq n, m_{ij} < \infty)$ が G の基本関係となることが知られている。一般に、このような生成元と基本関係をもつ群はコクセター群と呼ばれるが、逆にコクセター群は上の鏡映群として実現されるので、ここでは両者を区別せずに同一視することにする。

符号と偶奇性 W の各生成元 σ_i に -1 を対応させることにより、これは W の基本関係を保つので、群準同型

$$\varepsilon : W \rightarrow \{\pm 1\}, \quad \varepsilon(\sigma_i) = -1$$

を得る。この ε を W の符号準同型と呼び、各 $w \in W$ に対して、 $\varepsilon(w)$ を w の符号という。

$$W^\pm = \{ w \in W \mid \varepsilon(w) = \pm 1 \}$$

とおけば、

$$W = W^+ \cup W^-$$

であり、それぞれ W の偶部分と奇部分と呼ぶ。特に、偶部分 $W^+ = \text{Ker } \varepsilon$ は W の指数 2 の部分群であり、 W の回転全体のなす部分群である。

既約性 コクセター図形が連結なコクセター群は既約であると呼ばれる。一般に、 W のコクセター図形の連結成分に対応するコクセター群を W_1, \dots, W_r とするとき、

$$W \simeq W_1 \times \cdots \times W_r$$

が成り立つ。以下、既約性を仮定する。(仮定しても、一般性は失われない。)

ルート系 V の部分集合

$$\Phi = \{ w(\mathbf{e}_i) \mid w \in W, 1 \leq i \leq n \} \subset V$$

を W のルート系といい、 W の諸性質を調べるのに重要なものである。

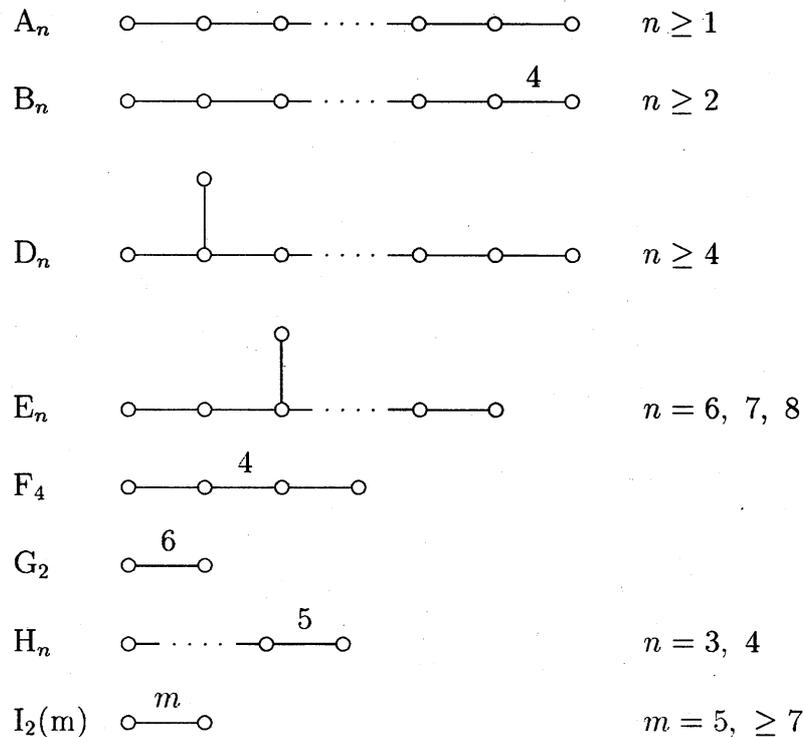
各型 コクセター群の中でも、次の各型については色々な応用も含めてよく研究されている。

(1) 有限型 $|W| < \infty$ のとき、 W は有限型であると呼ばれる。これは対称形式 (\cdot, \cdot) が正定値であることと同値である。

(2) アフィン型 対称形式 (\cdot, \cdot) が半正定値であり、正定値ではないとき、 W はアフィン型であると呼ばれる。

(3) 双曲型 対称形式 (\cdot, \cdot) の符号が $(n-1, 1)$ であり、尚且コクセター図形の n 個の頂点の内、どの $n-1$ 個の頂点を選んでも、それらの頂点とそれらを結ぶ辺からなる部分図形の連結成分は有限型かアフィン型であるという性質があるとき、 W は双曲型であると呼ばれる。

分類 既約な有限型のコクセター群のコクセター図形は次で与えられる。ただし、 n は頂点数を表す。



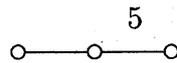
アフィン型および双曲型についても分類がされているが、ここでは述べない。

3 コクセター群 H_3 と交代群 A_5

ここでは、 H_3 型を例にとって考える。コクセター行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、そのコクセター図形は分類表にある通り



となる。このとき、

$$W = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = (\sigma_1\sigma_2)^3 = (\sigma_2\sigma_3)^5 = (\sigma_1\sigma_3)^2 = 1 \rangle$$

であり、 W は位数 2 の中心 $Z(W) \simeq Z_2$ と 5 次交代群 A_5 の直積に同型：

$$W \simeq Z_2 \times A_5$$

であることが知られている。 W の中心 $Z(W)$ は

$$z = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^5 = -1_V$$

で生成される。これは、 H_3 のコクセター数が $h = 10$ であり、

$$\omega = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

がコクセター元であること、それに一般に、

$$(\text{コクセター行列のサイズ}) \times (\text{コクセター数}) = (\text{ルート系 } \Phi \text{ の元の個数})$$

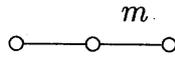
が成り立つので、 $z = \omega^{h/2}$ が W における長さ最大元というものになる。 H_3 型の場合には $z = -1_V$ であり $Z(W) = \langle z \rangle$ が示される。また、 $W^+ \simeq A_5$ でもある。これは、 W のルート系が中心を原点に置いた正二十面体の辺の中点として実現されることと、正二十面体の回転群が 5 次交代群 A_5 と同型であるという事実からも確かめられる。講演では、 H_3 のルート系の立体模型を持参して説明したが、これは化学の分子模型を組み立てたものである。ただし、穴の開け方は特別に注文した。

4 コクセター群 W_m と交代群 A_m

ここでは、 H_3 型の一般化として、

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & m \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$$

なるコクセター行列を考え、そのときのコクセター群を W_m で表す。コクセター図形は



となる。即ち、

$$W = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = (\sigma_1\sigma_2)^3 = (\sigma_2\sigma_3)^m = (\sigma_1\sigma_3)^2 = 1 \rangle$$

である。 W_m は $m = 2, 3, 4, 5$ のとき有限型、 $m = 6$ のときアフィン型、そして $m \geq 7$ のとき双曲型である。 W_m^+ は

$$a = \sigma_2\sigma_3, \quad b = \sigma_1\sigma_3$$

で生成されるが、

$$a^m = b^2 = (ab)^3 = 1$$

が基本関係となることが示される。以下、

$$m \geq 11, \quad (m, 6) = 1$$

と仮定する。このとき、全射準同型 $\phi : W_m^+ \rightarrow A_m$ であって、

$$\phi(a) = (1, 2, 3, \dots, m)$$

$$\phi(b) = \begin{cases} (1, m)(2, m-2)(3, m-4) \cdots (t, m+2-2t) & \text{if } m = 3t+1 \\ (1, m)(2, m-2)(3, m-4) \cdots (t+1, m-2t) & \text{if } m = 3t+2 \end{cases}$$

を満たすものが存在することが判る。それは、 W_m^+ の基本関係をチェックすれば良いのであるが、

$$\begin{aligned} & \phi(b) \\ = & \begin{cases} (1, m)(2, m-2)(3, m-4) \cdots (t-1, t+5)(t, t+3) & \text{if } m = 3t+1 \\ (1, m)(2, m-2)(3, m-4) \cdots (t-1, t+6)(t, t+4)(t+1, t+2) & \text{if } m = 3t+2 \end{cases} \end{aligned}$$

に注意すれば、

$$\begin{aligned} & \phi(a)\phi(b) \\ = & (2, m-1, m)(3, m-3, m-2) \cdots (t+1, m+1-2t, m+2-2t) \\ = & (1)(2, m-1, m)(3, m-3, m-2) \cdots \\ & \cdots (t, m+3-2t, m+4-2t) \begin{cases} (t+1, t+2, t+3) & \text{if } m = 3t+1 \\ (t+1, t+3, t+4)(t+2) & \text{if } m = 3t+2 \end{cases} \end{aligned}$$

となることが容易に確かめられる。従って、 ϕ が準同型となることはよい。全射となるこ

とは、次の様にして示す。 $m = 3t + 1$ の場合、

$$\begin{aligned} d &= (baba^{-1})^6 = (1, 2)(m - 2, m) \\ e &= (dada^{-1})^2 = (1, 2)(3, m - 1) \\ f &= (da^2ea^{-2})^2 = (1, 2, 5) \\ g &= a^3da^{-3} = (1, 3)(4, 5) \\ h &= gf^2g^{-1} = (2, 3, 4) \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} A_m &= \langle (1, 2, 3, \dots, m), (2, 3, 4) \rangle \\ &= \langle \phi(a), \phi(b) \rangle \end{aligned}$$

が成り立ち、 ϕ が全射であることが得られる。 $m = 3t + 2$ の場合も類似の考察で全射であることが判る。

5 応用と諸注意など

(1) ϕ が全射であることを示すのは存外に面倒であった。有限群が専門の先生に伺った所、それは交代群の極大部分群の分類を使うのが常套手段であろう、との助言を頂いた。例えば、参考文献は

M.W.Liebeck, C.E.Praeger, J.Saxl
*A classification of the maximal subgroups of the
 finite alternating and symmetric groups*
 J.Algebra 111, 365 – 383 (1987)

である。

(2) 証明が得られるまでは、計算機での実験を何回か行った。 $m \geq 11$ ならば、 ϕ の全射性が十分に大きな m まで正しいことは確認できていた。プログラム実行は UNIX 上で *Magma* と *Gap* を用いて行った。個人的には、携帯用のパソコンに DOS 用の *Gap* を導入して利用している。なかなか小回りが効いて便利である。この携帯用パソコン本体よりも、マニュアルの方がずっと重かったりして困りものではある。何人かの方から、計算機を用いた群計算についても触れて欲しいとの要望があり、ここではプログラムの例を一つ示すことにする。以下は *Magma* 用のプログラムで、 ϕ の全射性を調べるものである。

```
for n in [1 .. 20] do
  m:= 6*n+1;
  print m;
  G:=Sym(m);
  x:=Id(G);
  for i in [2 .. 2*n+1] do
    x:= x*G!(i,m+3-2*i,m+4-2*i);
```

```

    end for;
y:= Id(G);
  for j in [1 .. m-1] do
    y:= G!(j,j+1)*y;
  end for;
H:=sub<G|x,y>;
print IsAlternating(H);

m:= 6*n+5;
print m;
G:=Sym(m);
x:=Id(G);
  for i in [2 .. 2*n+2] do
    x:= x*G!(i,m+3-2*i,m+4-2*i);
  end for;
y:= Id(G);
  for j in [1 .. m-1] do
    y:= G!(j,j+1)*y;
  end for;
H:=sub<G|x,y>;
print IsAlternating(H);

end for;

```

プログラムでは、置換の積は左から順に行う様になっており、時々混乱することがあるので注意を要する。

(3) ϕ が全射であることの系として、 A_m が位数 2 の元と位数 3 の元で生成されることも判る。ただし、この事実は昔から知られている。参考文献は

G.A.Miller

On the groups generated by two operators

Bull.A.M.S. 7, 424 – 426 (1901)

である。この論文により、

$$A_k = \langle x, y \rangle \text{ for some } x, y \in A_k \text{ with } x^2 = y^3 = 1 \Leftrightarrow k \neq 6, 7, 8$$

が成り立つ。ただし、我々の採り方とは異なり、 xy の位数には特に拘ってはいない。

(4) $m = p = \text{素数} \geq 11$ のときには、 W_p^+ から線形群 $L_2(p) = \text{PSL}(2, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ への全射準同型 θ で

$$\theta(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in L_2(p)$$

$$\theta(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in L_2(p)$$

を満たすものが存在する。従って、 W_p^+ から、全く性質の異なる2つの群 A_p と $L_2(p)$ の直積への全射準同型

$$W_p^+ \longrightarrow A_p \times L_2(p)$$

が存在することが判る。丁度 Y_{555} 型のコクセター群 $W(Y_{555})$ と散在型単純群モンスター \mathbf{M} との間の全射関係

$$W^+(Y_{555}) \longrightarrow \mathbf{M} \times \mathbf{M}$$

を思い起こさせる。

(5) モジュラー群 $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbf{Z})$ との関連を述べる。主合同部分群を

$$\Gamma(N) = \text{Ker}[\Gamma \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{Z}/N\mathbf{Z})]$$

とし、

$$\begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

を含む Γ の最小の正規部分群を

$$\Delta(N) = \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ の正規閉包}$$

とする。このとき、

$$W_N^+ \simeq \Gamma/\Delta(N)$$

が判るので

$$[\Gamma : \Delta(N)] = |W_N^+| \begin{cases} < \infty & \text{if } N \leq 5 \\ = \infty & \text{if } N \geq 6 \end{cases}$$

が成り立ち、コクセター群の分類に対応させて確かめることが出来る。群 $\Delta(N)$ は扱いにくい側面があるが、 W_N^+ やルート系を通じて、別の角度からも色々と調べることが出来る。

(6) $m \geq 11$ かつ $(6, m) = 1$ を満たす自然数 m に対して、 Γ の正規部分群 $\Lambda(m)$ を

$$\Lambda(m) = \text{Ker}[\Gamma \rightarrow W_m^+ \rightarrow A_m]$$

で定義する。勿論このとき、

$$[\Gamma : \Lambda(m)] = \frac{m!}{2}$$

である。複素上半平面 \mathbf{H} とフックス群 $\Lambda(m)$ とにより、コンパクトなリーマン面 $R(\Lambda(m)) = (\Lambda(m) \setminus \mathbf{H})^*$ を構成することが出来る。そのときの種数は

$$1 + \frac{(m-1)!(m-6)}{24}$$

と計算される。

(7) 任意の有限群 G に対して、 $(6, m) = 1$ を満たす十分大きな自然数 $m \geq 11$ で

$$G \subseteq A_m$$

なるものを選ぶ。このとき、全射準同型

$$\phi : W_m^+ \longrightarrow A_m$$

による G の完全逆像を $W_m^+(G)$ とおけば、

$$G \simeq W_m^+(G)/\text{Ker}\phi$$

である。すなわち、任意の有限群 G は或る双曲型コクセター群 W_m の切断として実現される。

(8) さらに話を再び Γ にまで引き戻すと、即ち、任意の有限群 G に対して、 $(6, m) = 1$ を満たす十分大きな自然数 $m \geq 11$ で

$$G \subseteq A_m$$

なるものを選んでおいて、全射準同型

$$\Gamma \rightarrow W_m^+ \rightarrow A_m$$

による G の完全逆像を $\Lambda(G)$ とおく。このときも、複素上半平面 \mathbf{H} とフックス群 $\Lambda(G)$ とにより、コンパクトなリーマン面 $R(\Lambda(G)) = (\Lambda(G) \setminus \mathbf{H})^*$ を構成することが出来る。 K_m と K_G をそれぞれ $R(\Lambda(m))$ と $R(\Lambda(G))$ 上の有理型関数のなす体とする。このとき、

$$A_m \simeq \text{Gal}(K_m/\mathbf{C}(j))$$

であり、さらに K_G は $K_m/\mathbf{C}(j)$ の中間体であるので、ガロア理論より、

$$G \simeq \text{Gal}(K_m/K_G) = \{ g \in \text{Gal}(K_m/\mathbf{C}(j)) \mid g(\xi) = \xi \text{ for all } \xi \in K_G \}$$

が成り立つ。群 G の群論的性質がどの程度 $R(\Lambda(G))$ や K_G に反映されているのかという問いは興味深い。ここで、 j はモジュラー不変量のことである。

6 参考文献

- [1] Humphreys, J. : *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge, Cambridge University Press, 1990.
- [2] Kawada, Y. : *Theory of Automorphic Functions of One Variable I – Fuchsian groups* –, Tokyo University Seminary Notes 4 (in Japanese), Tokyo, Tokyo University, 1963.
- [3] Magma Computing System for Algebra – by J. Cannon *et al*, Sydney, Sydney University, 1994.
- [4] Miyake, T. : *Modular Forms*, Berlin, Springer, 1989.
- [5] Morita, J. : Certain Hyperbolic Coxeter groups, a generalization of $H_3^+ \simeq A_5$ and Riemann surfaces, preprint, 1996.
- [6] Serre, J-P. : *A Course in Arithmetic*, GTM 7, Berlin, Springer, 1978.
- [7] Shimizu, H. : *Automorphic Functions I*, Iwanami Kouza Kiso Suugaku (in Japanese), Tokyo, Iwanami, 1977.
- [8] Shimura, G. : *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publ. Math. Soc. Japan 11, Tokyo and Princeton, Iwanami and Princeton University Press, 1971.
- [9] Suzuki, M. : *Gunron* (in Japanese), Tokyo, Iwanami (1977/78), *Group Theory* (English translation), Berlin, Springer, 1982/85.