数理解析研究所講究録
1002巻 1997年 192-198

Some prehomogeneous representations defined by cubic forms

東北大学理学研究科　井海寿俊　(Hisatosi Ikai)

§0 序

0.1 kが体である時, k上の概均質ベクトル空間とは, k上の簡約群Gと, Gが線型表現で作用する有限次元kベクトル空間Vの組(G,V)で, $\bar{k}$でkの代数閉包を表す時, $V\otimes_k\bar{k}$にZariski開$G(\bar{k})$軌道が存在するものを意味する. kが複素数体の場合には, この様な(G,V)で既約なものの分類が佐藤幹夫·木村達雄の両氏によって与えられている(cf.[9]). 概均質ベクトル空間の理論の整数論への応用に於いては、大域体k上の概均質ベクトル空間(G,V)に対し,

(イ) 商集合$G(k)\backslash V$を決定すること. 特にそれを、数論的対象（例えば, kの一定次数の拡大体の同型類など）と結び付けること,

(ロ) (G,V)に付随するゼータ関数を定義し, その極での主要項を求めること,

は典型的な問題である. 実際, Siegel及び新谷卓郎氏の諸結果(cf.[10][11])は(ロ)の解答から(イ)の数論的対象の分布に関する密度定理が導かれる成功例を与えている. また, D.J.Wright及び雪江明彦氏は種々の例に対する(イ)と(ロ)を研究している(cf.[12][13]). 私の研究の目標とする所は, 佐藤-木村の分類表[9]から四つの例

$$
\begin{aligned}
(5) &= (GL(6), V(20))\\
(14) &= (GL(1)\times Sp(3), V(1)\otimes V(14))\\
(23) &= (GL(1)\times Spin(12), V(1)\otimes V(32))\\
(29) &= (GL(1)\times E_7, V(1)\otimes V(56))
\end{aligned}
$$

を選び, 上述の問題を解決することである; 即ち, 大域体k上の概均質ベクトル空間(G,V)で, $\otimes_k\bar{k}$と単連結被覆群への移行の後で, 上の四つの例の何れかと同型となるものの統一的な構成法を一つ与え, その様にして構成された(G,V)に対して, 上述の問題(イ)(ロ)を解決することである.

0.2 選んだ研究方針は既知の諸結果の利用と一般化である. これらの四つの例は3次のジョルダン環に関係している. 例えば, 対応するリー環は「Tits-Koecherリー環」の名で良く知られており(cf.[5]), また相対不変式は, しばしば「Freudenthal四次形式」と呼ばれる有名な四次形式である(cf.[2][4]). (G,V)の構成については, kが標数$\neq 2,3$の体である場合に, やはりジョルダン環を用いた方法が知られており, 井草準一氏の研究[4]の中で利用されている. この方法は, 特別な二次形式から出発してある三次形式を経由して構成する, という手続をとるものである. 一方, 商集合$G(k)\backslash V$の決定については, ガロアコホモロジーの利用を考えており, そこで固定化群の決定が一つの必要なステップとなる.

この様な方針の下で, 現在得られた結果は次の二つである:

(a) 三次形式から (G,V) を構成する手続の任意の可換環 k 上への公理的な一般化.

(b) その様にして得られた (G,V) とある一つのベクトル $v_0 \in V$ に対する固定化群の決定.

(a) の構成は全ての幾何学的ファイバーが概均質ベクトル空間である (G,V) の例を含み, その例に対しては, (b) は丁度, 開軌道を生成する一つのベクトルの固定化群を与える.

以下の **1.1–1.6** で (a) について, **2.1–2.3** で (b) について, そして **3.1–3.2** で上述の注意について, 各々詳細を述べる. 但し, 記号と定式化は, 今迄の部分から次の様に変更する: 今迄の V はある有限型射影 k 加群 M (cf. **1.5**) に置き換わり, 今迄の G は乗法群 μ_k と M に線型表現で作用するある忠実平坦局所有限表示 k 群層 G (cf. **1.4, 1.6**) の直積 $\mu_k \times G$ に置き換わる; そうしておいて固定化群の決定は, 射影表現 $G \to \mathbf{Aut}(\mathbf{P}(M))$ に関する G での固定化群の形で行われる (cf. **2.1**).

§1 表現の構成

1.1 k は可換環, J は有限型射影 k 加群, N は J 上の「三次形式」, $\sharp$ は J に於ける「二次射」, そして T は J 上の対称双線型形式であるものとする; 換言すれば, 周知の圏同値 (cf. [1, I,§1, no 4]) によって, 「k 概型」を k 関手, 即ち k 多元環の圏 k-**alg**から集合の圏への共変関手, 「k 概型の射」を関手の自然変換と各々考え, k 関手 $J_a : R \mapsto J_R := J \otimes_k R$ が丁度, J の双対 k 加群${}^tJ$ の対称多元環 $\mathbf{S}({}^tJ)$ のアフィン概型であることを念頭に置く時, N は k 概型の射 $J_a \to \mathbf{O}_k$ (:=アフィン直線、即ち忘却関手), $\sharp$ は k 概型の射 $J_a \to J_a$で, 全ての $R \in k$-**alg**と全ての $t \in R, x \in J_R$ に対し, $N(tx) = t^3N(x), (tx)^\sharp = t^2x^\sharp$ を満たす.

この様な四つ組 $(J; N, \sharp, T)$ で, 次の諸条件を満たすものを, データとして任意に考える: 全ての $R \in k$-**alg**$, x, y \in J_R$ に対し

(CJ1)
$$x^{\sharp\sharp} = N(x)x,$$

(CJ2)
$$\partial_y N(x) = T(x^\sharp, y),$$

ここで (CJ2) は, $R[\varepsilon]$ で R 上の双数の環を表す時, $N(x+\varepsilon y) = N(x) + \varepsilon T(x^\sharp, y)$ であることを意味する; 更に, $c_1, c_2 \in J$ 及び$\lambda \in {}^tJ$ で, $N(c_1) \in k^*$ かつ$\lambda(c_2^\sharp) = 1$ となるものが存在する.

この四つ組 $(J; N, \sharp, T)$ は組成代数$\mathcal{C}$ に係数を持つ 3×3 エルミート行列のジョルダン環 $J = H_3(\mathcal{C})$ の McCrimmon による公理化 [8] に若干の修正を加えたものであり, 修正は Loos によるジョルダン対の一般論 (cf.[6]) に適合する様に為されている.

1.2 定理 **1.1** の四つ組 $(J; N, \sharp, T)$ は, J のコピーの対 (J, J) を土台とする ジョルダン対を定める.

ジョルダン対とは, k 加群の対 (V^+, V^-) と二次写像 $Q_+ : V^+ \to \mathrm{Hom}(V^-, V^+), Q_- : V^- \to \mathrm{Hom}(V^+, V^-)$ の対 (Q_+, Q_-) からなるデータである公理を満たすものである (cf.[6,1.2]).

これに対して自然な方法で係数拡大$\otimes_k R$が定義される．今の場合, $V^+ = V^- = J$ であり, 全ての $R \in k$-**alg**$, x, y \in J_R$ に対し

$$x \times y := (x+y)^\sharp - x^\sharp - y^\sharp,$$

$$Q(x)y := T(x,y)x - x^\sharp \times y$$

とおく時, $Q_+ = Q_- = Q$. この様にして出来るジョルダン対(J,J) と Nとの関係は次の通りである: $z \in J_R$ に対し

$$\{xyz\} := T(x,y)z + T(y,z)x - (z \times x) \times y,$$

$$B(x,y)z := z - \{xyz\} + Q(x)Q(y)z$$

とおくことによって R加群 J_R の自己準同型 $B(x,y)$ を定義する．$B(x,y)$ が同型であることを (x,y) は準可逆であると言い表す (cf.[6,3.2])．すると, (x,y) が準可逆であることと R の元

$$N(x,y) := 1 - T(x,y) + T(x^\sharp, y^\sharp) - N(x)N(y)$$

が可逆であることが同値となることが証明される．

1.3 k 群概型 H を, 全ての $R \in k$-**alg** に対し, $h = (\chi(h), h_+, h_-) \in R^* \times GL(J_R) \times GL(J_R)$ で, 次の三条件を満たすものの全体を, $H(R)$ と書くことによって定義する: 全ての $x, y \in J_R \otimes_R S, S \in R$-**alg** に対し,

(H1) $$T(h_+x, h_-y) = T(x,y)$$

(H2) $$(h_+x)^\sharp = \lambda^{-1}h_-x^\sharp, (h_-x)^\sharp = \lambda h_+x^\sharp$$

(H3) $$N(h_+^{-1}x) = N(h_-x) = \lambda N(x).$$

古典的な場合には, H は三次形式N の similitude group として定義されて他の条件はそこから導かれる (cf.[4,p.405])．しかし, 環上で定式化する際には, 特別な場合に従属関係が成立する二つの公理を初めから同時に要求しておく, ということも必要な様である．

1.4 定理 忠実平坦局所有限表示位相に関する分離的k群層 G と monomorphisms の図式

$$J_a \overset{\exp_+,\exp_-}{\Longrightarrow} G \longleftarrow H$$

(これによって H を G の部分群概型と考える) が定まる．

これは定義と Loos の一般論 (cf.[7]) から出て来る．実際, 彼はリー環の Tits-Koecher 構成に相当することを一般の可換環上の代数群のレベルで行なっている．彼の一般論によれば, G は積 $J_a \times J_a \times H \times J_a$ のある同値関係による商に群構造を入れたものとして定義さ

れ, その際の同値関係及び群構造はジョルダン対 (J, J) (cf.**1.2**) の言葉で記述される. 結果として, G は次の四つの性質を持つことになり, それらの性質で特徴付けられる:

(a) $(x, y, h, z) \mapsto \exp_+(x)\exp_-(y)h\exp_+(z)(x, y, z \in J_R, R \in k\text{-}\mathbf{alg})$ は層の epimorphism $J_a \times J_a \times H \times J_a \to G$ である.

(b) $(y, h, x) \mapsto \exp_-(y)h\exp_+(x)(x, y \in J_R, R \in k\text{-}\mathbf{alg})$ は開埋入 $J_a \times H \times J_a \to G$ である.

(c) 全ての $R \in k\text{-}\mathbf{alg}, x, y \in J_R, h = (\chi(h), h_+, h_-) \in H(R)$ に対し,

$$h\exp_+(x)h^{-1} = \exp_+(\chi(h)h_+x) \text{ かつ } h\exp_-(y)h^{-1} = \exp_-(\chi(h)^{-1}h_-y).$$

(d) 全ての $R \in k\text{-}\mathbf{alg}, x, y \in J_R$ について, $\exp_+(x)\exp_-(y)$ が (b) の開埋入 $J_a \times H \times J_a \to G$ の像に属している為には (x, y) が準可逆であることが必要十分であり, この時

$$\exp_+(x)\exp_-(y) = \exp_-(y^x)b(x, y)\exp_+(x^y),$$

ここで, **1.2** の記号で, 一般に $x^y = N(x, y)^{-1}(x - x^\sharp \times y + N(x)y^\sharp$ でありまた

$$b(x, y) := (N(x, y), N(x, y)^{-1}B(x, y), N(x, y)B(y, x)^{-1}).$$

古典的な場合には, G は「Freudenthal 四次形式」を利用して定義される (cf.[4,p.425]).

1.5 k 加群 $M := k \oplus J \oplus k \oplus J$ を考え, その各元を

$$\begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix}$$

$(\alpha, \beta \in k, a, b \in J.)$ の形に書く. k 群概型の図式

$$J_a \overset{\exp_+, \exp_-}{\Longrightarrow} \mathbf{GL}(M) \longleftarrow H$$

を, 全ての $R \in k\text{-}\mathbf{alg}, x, y \in J_R, h \in H(R)$ 及び $\alpha, \beta \in R, a, b \in J_R$ に対し,

$$\theta_+(x).\begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha & a + \alpha x \\ b + a \times x + \alpha x^\sharp & \beta + T(b, x) + T(a, x^\sharp) + \alpha N(x) \end{pmatrix}$$

$$\theta_-(y).\begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha - T(a, y) + T(b, y^\sharp) - \beta N(y) & a - b \times y + \beta y^\sharp \\ b - \beta y & \beta \end{pmatrix}$$

$$\theta_0(h).\begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \chi(h)^{-1}\alpha & h_+a \\ h_-b & \chi(h)\beta \end{pmatrix}$$

と置くことによって定義する.

この定義は, 符号の差を除いて, 井草氏のもの [4,pp.425-426] と同じである.

1.6 定理 k 群層の射 $\theta : G \to \mathbf{GL}(M)$ で, $\theta \circ \exp_\sigma = \theta_\sigma(\sigma = \pm)$ かつ $\theta \mid H = \theta_0$ となるものが唯一存在する; θ は monomorphism である.

結論は Loos の一般論 (cf.[7]) から出て来るが, その一般論を適用するには, 全ての $R \in k$-$\mathbf{alg}, x, y \in J_R, h \in H(R)$ に対し

$$\theta_0(h)\theta_+(x)\theta_0(h)^{-1} = \theta_+(\chi(h)h_+x) \text{ かつ } \theta_0(h)\theta_-(y)\theta_0(h)-1 = \theta_-(\chi(h)^{-1}h_-y)$$

であることと, 特に (x,y) が準可逆の場合に

$$\theta_+(x)\theta_-(y) = \theta_-(y^x)\theta_0(b(x,y))\theta_+(x^y),$$

(cf.**1.4**(d)) であることを検証する必要がある. その検証が証明の主要部である.

§2 固定化群

2.1 $N(c_1) \in k^*$ となる $c_1 \in J$ の存在 (cf. **1.1**) を用いることにより, $G(k)$ の元 ε で

$$\theta(\varepsilon).\begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \beta & -b \\ a & -\alpha \end{pmatrix}$$

を満たすものの存在が確認される.

$\mathbf{P}(M)$ で射影空間 Proj $\mathbf{S}({}^tM)$ を表し, $\mathbf{P}(M)(R)$ を R 加群 M_R の階数 1 の直和因子全体の集合と同一視する. 線型表現 θ から G の $\mathbf{P}(M)$ への作用が導かれる. $x \in \mathbf{P}(M)(k)$ を

$$x := k.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{P}(M)(k)$$

で定義する.

2.2 H の指標 $h \mapsto \chi(h)^4$ の核を H' とおく時, $s : (\lambda, h_+, h_-) \mapsto (\lambda, \lambda^2 h_-, \lambda^2 h_+)$ は H' の自己同型で $s^2 = 1$ を満たす; これによって H' と定数群 $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})_k$ の半直積 $H' \times_s (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})_k$ を作り (cf.[D-G,II, §1,3.3 a)]), $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})_k(R)$ を R のべき等元 f の全体が算法 $f * f' := f + f' - 2ff'$ によって為す群と同一視する時, $\chi' : (h, f) \mapsto \chi(h)^2(1-2f)$ は $H' \times_s (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})_k$ の指標である; χ の核を H'' と置き, 全ての $R \in k$-$\mathbf{alg}, (h, f) \in H''(R)$ に対し, べき等元 f による R の直積分解 $R \simeq R_{1-f} \times R_f$. の下で $(h, h\varepsilon) \in G(R_{1-f}) \times G(R_f)$ (cf. **2.1**) に対応する $G(R)$ の元を $\mathbf{f}(h, f)$ と書くことにより, k 群層の射

$$\mathbf{f} : H'' \to G$$

を定義する.

2.3 定理 $\mathbf{f} : H'' \to G$ は k 群層 G の monomorphism であり, 最初の矢が 同型である合成

$$\mathbf{f} : H'' \simeq \mathbf{Cent}_G(x) \xrightarrow{\text{incl.}} G$$

に分解する.

これは **1.5** の定義に従って直接計算される.

§3 注意

3.1 四次形式 $f \in \mathbf{S}^4({}^tM)$ を,

$$f\begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix} := (T(a,b) - \alpha\beta)^2 + 4N(a)\beta + 4N(b)\alpha - 4T(a^\sharp, b^\sharp)$$

$(\alpha, \beta \in R, a, b \in J_R, R \in k\text{-}\mathbf{alg})$ で定義する. $D_+(f)$ で $\mathbf{P}(M) = \operatorname{Proj}\mathbf{S}({}^tM)$ の開部分概型で, f を含まない $\mathbf{S}({}^tM)$ の斉次素イデアル全体を台集合とするものを表す; 定義により, $x \in D_+(f)(k)$ (cf. **2.1**).

f が **0.1** で言及した「Freudenthal 四次形式」である.

3.2 定理 (a) f は G で固定される.

(b) 次の仮定の下では, 全ての代数閉体 $K \in k\text{-}\mathbf{alg}$ に対し, $G(K)$ の $D_+(f)(K)$ への作用は推移的となる: $L \in k\text{-}\mathbf{alg}$ が標数$\neq 2$の体ならば, J_L 上の対称双線型形式 $(x,y) \mapsto T(x,y)$ は非退化である.

(a) は定義に従って計算すればよいが, 稠密性の議論 (cf.[3,§5.4]) を利用すれば計算が簡単になる. (b) は井草氏の議論 ([8,pp.427-428]) と同様な方法で証明される.

文献

[1] M. Demazure et P. Gabriel : *Groupes Algébriques* TOME I. MASSON & CIE, PARIS, 1970.

[2] H. Freudenthal: Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene I. *Indag. Math.* **16** (1954), 218–230.

[3] A. Grothendieck et J. Dieudonné : *Éléments de Géométrie Algébrique.* I:Grundlehren der math., Band 166, Springer-Verlag, 1971.

[4] J-I. Igusa : Geometry of absolutely admissible representations. *Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in hornor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo*, 1973, 373–452.

[5] N. Jacobson : *Exceptional Lie algebras.* Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Marcel Dekker, inc. New York, 1971.

[6] O. Loos : *Jordan Pairs.* Springer Lecture Notes No 460. Springer, 1975.

[7] O. Loos : On algebraic groups defined by Jordan pairs. *Nagoya Math. J.* **74** (1979), 23–66.

[8] K. McCrimmon : The Freudenthal-Springer-Tits constructions of exceptional Jordan algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* **139** (1969), 495–510.

[9] M. Sato and T. Kimura : A Classification of irreducible Prehomogeneous Vector Spaces and their Relative Invariants, *Nagoya Math J.* **65** (1977), 1–155.

[10] T. Shintani : On zeta-functions associated with vector spaces of quadratic forms. *J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect IA,* **22**(1975), 25-66.

[11] C.L. Siegel : The average measure of quadratic forms with given discriminant and signature. *Ann. of Math.,* **45**(1944), 667-685.

[12] D.J. Wright and A. Yukie : Prehomogeneous vector spaces and field extensions. *Invent. Math.* **110** (1992), 283–314.

[13] A. Yukie : *Shintani Zeta functions.* London Math. Soc. Lect. Note Ser. 183(1993).