数理解析研究所講究録
1002巻 1997年 70-81

メタプレクテック群の格別表現について

琉大理　鈴木利明
Toshiaki SUZUKI

§1　メタプレクテック群

kを1の原始n乗根を含む代数体とし、Aをそのアデール環とする。$\mu_n(k) = \{x \in k : x^n = 1\}$とおく。

$G_r = GL_r$とし、H, Nをそれぞれ、その対角部分群、上三角ユニポテント部分群とする。局所コンパクト群 $G(A) = G_r(A)$ の標準最大コンパクト部分群を$K = \prod_v K_v$とする。$G(k)$は$G(A)$の離散部分群と見る。

メタプレクテック群$\tilde{G}(A)$は、$\mu_n(k)$による$G(A)$の中心拡大

$$I \longrightarrow \mu_n(k) \xrightarrow{i_A} \tilde{G}(A) \xrightarrow{p_A} G(A) \longrightarrow I$$

で、各素点vに対する局所メタプレクテック群$\tilde{G}_v$から構成される：

$$I \longrightarrow \mu_n(k) \longrightarrow \tilde{G}_v \longrightarrow G_v \longrightarrow I$$

但し、$G_v = G(k_v)$、k_vはkのvにおける完備化、であ

る。部分群 $\widetilde{H}(A) = p_A^{-1}(H(A))$ は、直積 $H(A) \times \mu_n(k)$ に次の演算を入れたものに同型である：

$$(h, \xi)\cdot(h', \xi') = (hh', \sigma(h, h')\xi\xi'),$$

$$\sigma(h, h') = \prod_{i<j} (h_i, h_j')_A$$

ここで、$h = (h_i)$、$h' = (h_i') \in H(A)$, $h_i, h_i' \in A^\times$ で $(\ ,\ )_A$ は $A^\times$ における n 次ヒルベルト記号である。

$N(A)$ から $\widetilde{G}(A)$ への自然なリフトが存在し、その像を $N_*(A)$ とする。 K の有限指数の部分群 K_0 とリフト $K_0 \to \widetilde{G}(A)$ が存在し、その像を K_0^* とする。 ヒルベルト記号の相互法則より、リフト $G(k) \to \widetilde{G}(A)$ が存在し、その像を $G^*(k)$ とする。

以下において、群 $G = G_r$ のサイズ r および被覆の枚数 n を明示するため、$\widetilde{G}(A)$ を $\widetilde{G}_r^{(n)}(A)$ と書くこともある。

§2 $\widetilde{G}(A)$ の保型表現と格別表現

$\widetilde{Z}_A$ を $\widetilde{G}(A)$ の中心とし、η を $i_A(\mu_n(k))$ への制限が単射である $\widetilde{Z}_A$ の指標とする。 η が $\widetilde{Z}_A \cap G^*(k)$ で自明であるとき、$L^2(\eta)$ を、$G^*(k)\backslash\widetilde{G}(A)$ 上の複素数値関数 f で

$$\int_{G^*(k)\backslash\widetilde{G}(A)/\widetilde{Z}_A} |f(g)|^2\, dg < \infty,$$

$$f(zg) = \eta(z) f(g) \quad , \quad z \in \widetilde{Z}_A$$

を満たすもの全体とする。群$\widetilde{G}(A)$を右移動で$L^2(\eta)$に作用させ、よく知られた方法で、離散な部分空間$L^2_d(\eta)$および尖点な部分空間$L^2_0(\eta)$が定義される。

$\widetilde{\pi}$が$\widetilde{G}(A)$の許容既約表現とすれば、$\widetilde{\pi}$は

$$\widetilde{\pi} \cong \bigotimes_v \widetilde{\pi}_v$$

と、$\widetilde{G}_v$の許容既約表現$\widetilde{\pi}_v$の[KP]の意味でのテンソル積に分解される。$\widetilde{G}(A)$の許容既約表現$\widetilde{\pi}$が保型表現(又は、尖点表現)であるとは、$\widetilde{\pi}|\widetilde{Z}_A = \eta$で、$\widetilde{\pi}$が$L^2_d(\eta)$(又は、$L^2_0(\eta)$)の成分になっていることである。

$\widetilde{G}(A)$の保型表現$\widetilde{\pi}$が格別表現であるとは、$\widetilde{\pi} = \bigotimes_v \widetilde{\pi}_v$としたとき、各$\widetilde{\pi}_v$が格別表現、すなわち、$\widetilde{\pi}_v$のWhittakerモデルが唯1つ存在することである。

いま、eを$N_*(k)$で自明な$N_*(A)$の指標とする。保型表現$\widetilde{\pi}$に属するメタプレクテック形式φに対し、そのWhittaker関数W_φを

$$W_\varphi(g) = \int_{N_*(k)\backslash N_*(A)} \varphi(ng)\,\overline{e}(n)\,dn$$

で定義する。 $\tilde{\pi}$が格別表現であれば、φを適当に選ぶとき、

$$W_\varphi(g) = \prod_v W_{\varphi_v}(g_v)$$

と表わすことができる。 ここで、W_{φ_v}は各$\tilde{\pi}_v$に対して決まるWhittaker関数であり、有限個のvを除いて、いわゆるクラス1のWhittaker関数で、具体的に計算することができる。

例1 Weil表現（[GP]）

$G_1(A) = A^\times$の保型表現χに対する$\widetilde{SL}_2(A)$のWeil表現を$\tilde{G}_2^{(2)}(A)$に誘導してできる表現をθ_χとする。 θ_χは格別表現である。θ_χが尖点表現であるための必要十分条件は、χが偶でないことである。 また、$\tilde{G}_2^{(2)}(A)$の格別表現はすべてこのようにして得られる。

例2 $G_1(A) = A^\times$の保型表現χが、$x \in A^\times$, $x^n = 1$, に対し$\chi(x) = 1$のとき、χを„偶"と言うことにしよう。 もちろんこれは自然数nに依存する。 χが„偶"のとき、$\tilde{G}_n^{(n)}(A)$の非尖点格別保型表現θ_χが、あるEisenstein級数の留数として、定義される（[KP]）。 これは例1のときのχが偶である場合の一般化にあたっている。 $n = 3$のとき、„偶"でないχに対し、尖点格別保型表現θ_χが構成されている（[PP]）。

さて以下において、$G_\ell(A)$ の尖点表現πに対し、$\widetilde{G}_{n\ell}^{(m)}(A)$ の格別保型表現 $\Theta(\pi)$ が対応できないかどうかを考えて見よう。

§3　不分岐格別既約表現

上記の対応が、局所的で不分岐な場合存在するかどうかを見てみよう。 Fを1の原始n乗根を含む局所体、$|\ |_F$をその正規化された附値とする。 $|n|_F = 1$と仮定すれば、メタプレクテック群 $\widetilde{G} = \widetilde{G}(F)$ は、$K = GL_r(R_F)$ に同型な部分群K^*をもつ。 ここでR_FはFの整数環である。 $\widetilde{G}$の表現はK^*の自明表現を含むとき、不分岐と言われる。 ここで、$\widetilde{G}$の表現はすべて $i_F(\mu_n(F))$に制限したとき、前もって定めた単射指標εになるものとする。

定理　$\widetilde{G}_{n\ell}^{(m)}(F)$ の不分岐格別既約表現は、$G_\ell(F)$ の„n-既約„な主系列表現と、1対1に対応している。

$G_\ell(F)$の主系列表現 $\pi = V(\beta)$とする。 β は$G_\ell(F)$の対角部分群 $H_\ell \cong F^\times \times \cdots \times F^\times$ の指標 $\beta_1 \times \cdots \times \beta_\ell$ である。 H_ℓ のn個の直積 $H_\ell \times \cdots \times H_\ell$ の指標 $\beta_\Theta = \beta \otimes \mu_n$を考える。 ここで μ_n は$F^\times$のn個の直積 $F^\times \times \cdots \times F^\times$の指標

$$\mu_n(h) = \prod_{i<j} |h_i/h_j|_F^{1/2} \quad , \quad h = (h_i)$$

である。 β_Θ と単射指標 ε に対し、$\widetilde{G}_{n\ell}^{(m)}(F)$の主系列表現 $V(\widetilde{\beta}_\Theta)$を作り、その不分岐な成分を $\Theta(\pi)$ とおく。 このとき、$\pi = V(\beta)$ が "n-既約" すなわち

$$\beta_i/\beta_j \neq |\ |_F^{\pm 1}, |\ |_F^{\pm 2}, \cdots, |\ |_F^{\pm n}$$

ならば、$\Theta(\pi)$ は格別表現である。 証明は $\Theta(\pi)$ が $V(\widetilde{\beta}_\Theta)$ のある intertwining 作用素の像であることを使い、$V(\widetilde{\beta}_\Theta)$の Whittaker functional の空間における、intertwining 作用素の作用を計算することにより得られる。

逆に $\widetilde{G}_{n\ell}^{(m)}(F)$ の不分岐既約表現は、ある主系列表現の成分となり、上記の方法により、その Whittaker functional の空間の次元を計算することができる。 これより定理が得られる。

§4 Eisenstein 級数

例2で見た "偶" の χ に対し θ_χ を構成する [KP]の方法を一般化する。 "偶" の χ の代りに、$\widetilde{G}_\ell^{(m)}(A)$の尖点表現のリフトになっている $G_\ell(A)$ の尖点表現πを考える。

Pを $(\ell,\cdots,\ell)$ 型標準パラボリック部分群（ $\subset G_{\ell n}$ ）とする。

Mを$G_\ell\times\cdots\times G_\ell$に同型な対角部分群とし、$P=MU$とおく。$\widetilde{G}_\ell(A)$の部分群$\widetilde{G}_\ell^{(0)}(A)$と$\widetilde{G}_{n\ell}(A)$の部分群$\widetilde{M}^{(0)}(A)$を

$$\widetilde{G}_\ell^{(0)}(A)=p_A^{-1}\{g\in G_\ell(A)\ :\ \det g\in k^\times(A^\times)^n\},$$

$$\widetilde{M}^0(A)=p_A^{-1}\left\{\begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n\end{pmatrix};\ m_i\in G_\ell(A),\ \det m_i\in k^\times(A^\times)^n\right\}_{1\le i\le n}$$

で定めれば、$\widetilde{M}^0(A)\cong\widetilde{G}_\ell^{(0)}(A)\underset{\mu_n(k)}{\times}\cdots\underset{\mu_n(k)}{\times}\widetilde{G}_\ell^{(0)}(A)$となる。

$\widetilde{\pi}$を$\widetilde{G}_\ell(A)$の尖点表現とし、$G_\ell(A)$の尖点表現πにリフトされると仮定する。このとき、$\widetilde{\pi}$は$\widetilde{G}_\ell^{(0)}(A)$の表現$\widetilde{\pi}_0$から誘導される。$s=(s_1,\cdots,s_n)\in\mathbb{C}^n$に対し、$\widetilde{\pi}(s)$を

$$mu\ \longrightarrow\ \widetilde{\pi}_0(m_1)|\det m_1|_A^{s_1}\otimes\cdots\otimes\widetilde{\pi}_0(m_n)|\det m_n|_A^{s_n},$$

$$m\in\widetilde{M}^0(A),\quad u\in U_*(A)$$

を$\widetilde{G}_{n\ell}(A)$に誘導した表現とする。このとき、$\widetilde{\pi}(s)$の表現空間に属する適当な元f_sをとって、Eisenstein級数

$$E(g,f_s)=\sum_{\gamma\in P^*(k)\backslash\widetilde{G}^*(k)}f_s(\gamma g)$$

を考える。一般論より、これは$\mathbb{C}^n$のある領域で絶対収束し有理型関数として$\mathbb{C}^n$全体に解析接続される。その特異点は定数項を調べることより、得られる。

WをMの中心に関するワイル群とし、その元wに対しinter-twining作用素

$$I(w,s) : \tilde{\pi}(s) \longrightarrow \tilde{\pi}(ws)$$
$$f_s \longmapsto \int_{U_w^*(A)} f_s(w^{-1}ug)\,du$$

が定義される。ここで、$U_w = \{u \in U : w^{-1}uw \notin U\}$.

$E(g, f_s)$の定数項

$$\int_{U^*(k)\backslash U^*(A)} E(ug, f_s)\,du$$

は $\sum_{w \in W} I(w,s) f_s$ に等しいことが分かる。一方、$I(w,s)$は、

$$I(w,s) = \prod_v I_v(w,s) ,$$

$$I_v(w,s) : \tilde{\pi}_v(s) \longrightarrow \tilde{\pi}_v(ws)$$

と分解される。ここで、$\tilde{\pi}_v(s)$は、$\tilde{\pi} \cong \bigotimes_v \tilde{\pi}_v$としたとき$\tilde{\pi}_v$から構成される$\tilde{G}_{ng}(k_v)$の誘導表現である。$\tilde{\pi}_v$が主系列表現又はその部分表現のとき、$I_v(w,s)$の性質は分かっている。また$\tilde{\pi}$が$\pi$にリフトされることより、$I(w,s)$の性質が分かる。その正規化因子には、L関数$L(n(s_i - s_{i+1}), \pi \otimes \tilde{\pi})$がでてくる。このようにして、$I(w,s)$の特異点が分かる。そこで、$X = (X_1, \cdots, X_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\sum X_i = 0 \quad , \quad n(X_i - X_{i+1}) = 1$$

における $E(g, f_s)$ の"留数"

$$\Theta(g, f_s) = \lim_{s \to X} \prod_{i=1}^{n-1} (n(X_i - X_{i+1}) - 1) E(g, f_s)$$

を考える。これはある $L^2_d(\xi)$ に属し、$\widetilde{G}_{n\ell}(A)$ の保型表現を定め、それを $\Theta(\widetilde{\pi})$ とする。このとき

$$\Theta(\widetilde{\pi}) \cong \bigotimes_v \Theta(\widetilde{\pi}_v) ,$$

ここで、$\Theta(\widetilde{\pi}_v)$ は W の最長元 w_0 に対応する intertwining 作用素

$$I_v(w_0, X) : \widetilde{\pi}_v(X) \longrightarrow \widetilde{\pi}_v(w_0 X)$$

の像である。$\widetilde{\pi}_v$ のリフト π_v が不分岐のとき、この $\Theta(\widetilde{\pi}_v)$ は §3 で考えた $\Theta(\pi_v)$ に一致し、格別表現となる。$\Theta(\widetilde{\pi})$ の代りに $\Theta(\pi)$ と書いて、次の定理を得る。

定理　$G_\ell(A)$ の尖点表現 $\pi = \otimes_v \pi_v$ が、$\widetilde{G}_\ell(A)$ の尖点表現 $\widetilde{\pi}$ のリフトで、各 π_v が主系列表現又はその部分表現であるとする。このとき、$\Theta(\pi)$ は非尖点格別保型表現である。

§5 Rankin-Selberg コンボリューション

次に、格別表現に属するメタプレクテック形式と一般のメタプレクテック形式の Rankin-Selberg コンボリューションはオイラー積をもつことを見る。 標語的に言えば、対応

$$\pi \longrightarrow \Theta(\pi)$$

と志村リフト

$$\tilde{\tau} \longrightarrow \tau$$

は、Rankin-Selberg コンボリューションに関して、互いに他の随伴であると言ってよい。

$\tilde{\tau} = \otimes_v \tilde{\tau}_v$ を $\tilde{G}_r^{(m)}(A)$ の尖点表現とする。 素点の有限集合 S があって、$v \notin S$ に対し、$\tilde{\tau}_v$ は不分岐である。 この $\tilde{\tau}_v$ に対し、$G_r(k_v)$ の不分岐既約表現 τ_v が決まる。

$\tilde{\Pi} = \otimes_v \tilde{\Pi}_v$ を $\tilde{G}_{nl}^{(m)}(A)$ の格別保型表現とする。 必要なら上の S を大きくとって、$v \notin S$ に対し、$\tilde{\Pi}_v$ は不分岐としてよい。 §3 の定理より、この $\tilde{\Pi}_v$ に対し、$G_l(k_v)$ の不分岐主系列表現 π_v が決まって $\tilde{\Pi}_v = \Theta(\pi_v)$ となる。

いま、$l = 1, 2$, $r \leqq n$, $r < nl$ と仮定し、Φ, Ψ をそれぞれ $\tilde{\tau}$, $\tilde{\Pi}$ に属するメタプレクテック形式とする。 $s \in \mathbb{C}$ に対し、$Z(s, \Phi \times \overline{\Psi})$ を

$$\int_{G_r(k)\backslash G_r(\mathbb{A})} \overline{V_\Psi}\left(\begin{bmatrix} g & \\ & I_{n\ell-r}\end{bmatrix}\right) \Phi(g)\, |\det g|_{\mathbb{A}}^{s-\frac{n\ell-r}{2}}\, dg .$$

$$V_\Psi(g) = \int_{U^*(k)\backslash U^*(\mathbb{A})} \Psi(ng)\,\overline{\varepsilon}(n)\, dg ,$$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{r+1} & * \\ & \begin{matrix} 1 & * \\ & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \right\}$$

で定義する。一般論より、Re s が大きいとき、$Z(s, \Phi\times\overline{\Psi})$ は絶対収束し、$\mathbb{C}$ 上の有理型関数として解析接続されて、ある関数等式を満たす。また、$Z(s, \Phi\times\overline{\Psi})$ は

$$\int_{N_r(\mathbb{A})\backslash G_r(\mathbb{A})} \overline{W_\Psi}\left(\begin{bmatrix} g & \\ & I_{n\ell-r}\end{bmatrix}\right) W_\Phi(g)\, |\det g|_{\mathbb{A}}^{s-\frac{n\ell-r}{2}}\, dg$$

と表示される。§2 で見たように、$W_\Psi = \prod_v W_{\Psi_v}$ と分解され、$v \notin S$ に対する積分は具体的に計算ができる。

定理　$Z(s, \Phi\times\overline{\Psi})$ は、$v \in S$ に関する因子 $Z_S(s, \Phi\times\overline{\Psi})$ とオイラー積

$$\prod_{v\notin S} L\left(ns-\frac{n-1}{2}, \tau_v \times \overline{\pi}_v\right)$$

の積に等しい。

文献

[BH] D. Bump and J. Hoffstein, On Shimura's correspondence, Duke Math. J. 55 (1987) 661-691

[FK] Y.Z. Flicker and D.A. Kazhdan, Metaplectic correspondence, Publ. Math. IHES 64 (1986) 53-110

[GP] S. Gelbart and I.I. Piatetski-Shapiro, Distinguished representations and modular forms of half-integral weight, Inv. Math. 59 (1980) 145-188

[J] H. Jacquet, On the residual spectrum of GL(n), Springer Lecture Note 1041 (1984) 185-208

[KP] D.A. Kazhdan and S.J. Patterson, Metaplectic forms, Publ. Math. IEHS 59 (1984) 35-142

[KP2] ——————, Towards a generalized Shimura correspondence, Adv. Math. 60 (1986) 161-234

[P] S.J. Patterson, Metaplectic forms and Gauss sums I, Comp. Math. 62 (1987) 343-366

[PP] S.J. Patterson and I.I. Piatetski-Shapiro, A cubic analogue of the cuspidal theta representations, J. Math. pure et appl. 63 (1984) 333-375