数理解析研究所講究録
1005 巻 1997 年 95-102

Quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations and Macdonald's eigenvalue problems

九大・数理　三町勝久 (Katsuhisa Mimachi)

I.Cherednik[1] により定義された Quantum Knizhnik -Zamolodchikov 方程式（以下ＱＫＺ方程式と略す）の解を q-Selberg 型の積分を用いて具体的に与えるのが主目的であり、このことから直ちに Macdonald の固有値問題の固有函数が与えられることを示すのが第二の目的である。詳しくは [5] 等を参照のこと。以下 q は $0 \leq q < 1$ なる実数、$(a)_\infty = \prod_{i\geq 0}(1-aq^i)$, $(a)_k = (a)_\infty/(aq^k)_\infty$, $(a_1,\ldots,a_m)_\infty = (a_1)_\infty\cdots(a_m)_\infty$ とする。

1. A_1の場合

この節では、素朴な場合に限って記述し、基本的なストーリーを理解して貰うことに焦点を絞る。

有理型函数

$$\Phi = (y_1y_2)^{\lambda_2}x^{\lambda_1-\lambda_2}\frac{(ty_1/x, ty_2/x)_\infty}{(y_1/x, y_2/x)_\infty} \tag{1}$$

を固定する。ここに現れる t および λ_1, λ_2 は実数値を取るパラメーターで $\lambda_1 \geq \lambda_2$ を満たすものとする。そして、有理函数 ψに対して

$$\langle\psi\rangle = \int_C \Phi\psi\frac{dx}{x} \tag{2}$$

とおく。ただし、積分領域Cはあとで少し詳しく議論するので、今は気にしないこと。このとき二つの有理函数

$$\varphi_1 = \frac{1}{1-ty_2/x}, \quad \varphi_2 = \frac{1-y_2/x}{(1-ty_1/x)(1-ty_2/x)} \tag{3}$$

に対して次の q-差分方程式系が成立する。ただし q-シフト作用素 T_{q,y_i}を

$$(T_{q,y_i}f)(y_1,\ldots,y_n) = f(y_1,\ldots,qy_i,\ldots,y_n)$$

で定義する。

$$\begin{cases} T_{q,y_1}\begin{bmatrix}\langle\varphi_1\rangle\\ \langle\varphi_2\rangle\end{bmatrix}(y) = & \begin{bmatrix}q^{\lambda_2} & 0\\ 0 & q^{\lambda_1}\end{bmatrix}R(y_1,y_2)\begin{bmatrix}\langle\varphi_1\rangle\\ \langle\varphi_2\rangle\end{bmatrix}(y)\\ \\ T_{q,y_2}\begin{bmatrix}\langle\varphi_1\rangle\\ \langle\varphi_2\rangle\end{bmatrix}(y) = & R(y_1,qy_2)^{-1}\begin{bmatrix}q^{\lambda_1} & 0\\ 0 & q^{\lambda_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\langle\varphi_1\rangle\\ \langle\varphi_2\rangle\end{bmatrix}(y)\end{cases} \tag{4}$$

ここで現れる $R(y_1,y_2)$ は $z=y_1/y_2$ として

$$R(y_1,y_2)=\frac{1}{1-tz}\begin{bmatrix}1-z & z(1-t)\\ 1-t & t(1-z)\end{bmatrix}$$

と定義される 2×2 行列である。多くの読者にとってどこか見覚えのある行列であろう。実際、これは量子群 $U_q(gl(2))$ のベクトル表現のテンソル積表現に対応するR行列（Yang-Baxter 方程式の解で 4×4 行列で表せる）の中から非自明な 2×2 成分を取り出したものである。上の方程式系 (4) が実は A_1 型の QKZ 方程式に他ならない。

我々は更に方程式系 (4) のスカラー化を考えたい。その為には 1×2 行列 $(1 \quad t)$ を (4) の第一式、第二式それぞれの左側から掛けて更に第一式には $(1-tz)/(1-z)$ を、第二式には $(t-z)/(1-z)$ を掛けて第一式と第二式とを辺々足し合わせる。すると旨く纏まって次のスカラー値の方程式

$$\left\{\frac{1-tz}{1-z}T_{q,y_1}+\frac{t-z}{1-z}T_{q,y_2}\right\}\langle\varphi_1+t\varphi_2\rangle=(q^{\lambda_1}t+q^{\lambda_2})\langle\varphi_1+t\varphi_2\rangle \tag{5}$$

を得る。このスカラー値方程式 (5) の左辺に現れている q-差分作用素が A_1 型 Macdonald 作用素である。ちょうど固有値問題の形をしていることから、(5) を論ずることを Macdonald の固有値問題と呼ぶことにする。特に (5) の固有函数の中で対称多項式であるものが一次元だけあり、それがいわゆる Macdonald 対称多項式なのである。

ここで得られた固有函数 $\langle\varphi_1+t\varphi_2\rangle$ は

$$\langle\varphi_1+t\varphi_2\rangle=\frac{1-q^{\lambda_1-\lambda_2}t^2}{1-t}\langle 1\rangle \tag{6}$$

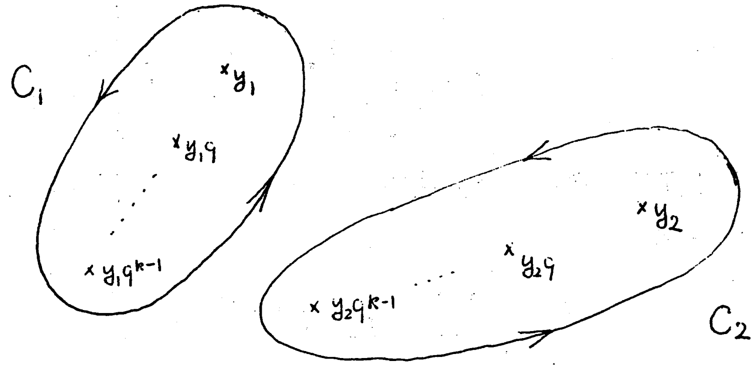
なる簡略な表示に変形出来ること、つまり

$$\int_C \Phi\frac{dx}{x}$$

自身が固有函数になることも注意しておく。

さて、解について詳しく論じるために積分領域について眼を転ずる。簡単の為に幾つかの制限を課すことにするが、まず k を正の整数として $t=q^k$ とおき、y_1,y_2 を $|y_1|,|y_2|<1$ なる複素数とする。そして λ_1,λ_2 を非負整数とする。こ

のときΦの特異点はy_1から原点に向かって行く極の系列$\{y_1, y_1q, \ldots, y_1q^{k-1}\}$と$y_2$から原点に向かって行く極の系列$\{y_2, y_2q, \ldots, y_2q^{k-1}\}$との二通りがあり、この二つの系列を囲む閉曲線をそれぞれC_1, C_2とする。



積分表示 (2) で現れた積分領域Cとして、これらC_1, C_2を採用したとき、今までの議論はすべて有効である。一般にCとしてC_1, C_2の一次結合（正確には擬定数体上で考える）が有効であるというのが先延ばしにした積分域Cに関する陳述である。さて、このC_1上で実際に積分を実行してみよう。すると、次が得られる。

$$\int_{C_1} \Phi \frac{dx}{x} = y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \frac{(t, ty_2/y_1)_\infty}{(q, y_2/y_1)_\infty} \sum_{i \geq 0} \frac{(qt^{-1}, qt^{-1}y_1/y_2)_i}{(q, qy_1/y_2)_i} \left(t^2 q^{\lambda_1 - \lambda_2}\right)^i. \tag{7}$$

C_2上での積分は被積分函数 Φの対称性から (7) においてy_1とy_2を入れ替えたものに等しい。そして、表示から明らかなようにC_1上での積分から得られる函数とC_2上での積分から得られる函数は$y = (y_1, y_2)$の函数として一次独立であることに注意しよう。つまり、我々は2次元の一次独立解を手中に収めたわけである。特に$q = 1$における場合、方程式のランクは2であることが保証され、我々が得たものは解の基底を張っている、つまり基本解系であると言える。一般のqの場合は方程式のランクの定義自身定かでないのでスッキリ言い切ることは出来ないが、まあ実際問題我々が得た解が解空間の基底を多分張っているのだろうとは予想される。先程にも述べたMacdonald対称多項式を与えるにはCとして$C_1 + C_2$を考えれば良いことも判っている。$C_1 + C_2$自身が対称和の形になっていることに注意。また、$C_1 + C_2$は無限遠点の周りをぐるっと回るループにホモローグであることにも注意したい。

以上の話しをA_1型の場合として、より一般にA_{n-1}型に拡張することができる。詳細は [5] を見よ、と言うことにして ここで終わりにしたいが、まあ、ついでだ、次節でざっと眺めてみよう。

2.　A_{n-1}型の場合

一般に A_{n-1}型の Macdonald 固有値問題は

$$M_r = t^{\frac{1}{2}r(r-1)} \sum_{i_1<\cdots<i_r} \left[\prod_{\substack{j \notin \{i_1,\ldots,i_r\} \\ s=1,\ldots,r}} \frac{ty_{i_s} - y_j}{y_{i_s} - y_j} \right] T_{q,y_{i_1}} \cdots T_{q,y_{i_r}}$$

で定義される同時可換な作用素達 M_r $(1 \leq r \leq n)$ に付随するものである。このうち、固有値

$$c_\lambda^r = \sum_{i_1<\cdots<i_r} \prod_{1\leq s\leq r} q^{\lambda_{i_s}} t^{(n-i_s)}$$

に対する

$$P_\lambda(y) = m_\lambda(y) + \sum_{\mu<\lambda} c_{\lambda\mu} m_\mu(y) \quad (c_{\lambda\mu} \in \mathbf{C})$$

なる固有函数が A_{n-1}型の Macdonald 対称多項式 $P_\lambda = P_\lambda(y_1,\ldots,y_n;q,t)$ である。但し $m_\lambda(y) = \sum_{\beta\in S_n\lambda} y^\beta$ は単項対称式、順序 $<$ は分割 $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ に対して$\lambda \geq \mu \Leftrightarrow |\lambda| = |\mu|$ かつ $\lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i$ $(i \geq 1)$ と定義される dominance ordering である。

Macdonald 対称多項式 P_λは $t = q$ とすると Schur 多項式 $s_\lambda(y)$、$q \to 0$ とすると Hall-Littlewood 多項式、また、$t = q^k$とした後に $q \to 1$ とすると Jack 対称多項式 $J_\lambda(y;1/k)$ になり、さらに $k = 1/2$ のとき $GL(n)/SO(n)$ の帯球函数、$k = 2$ のとき $GL(2n)/Sp(2n)$ の帯球函数に一致している。Macdonald 対称多項式についての詳しくは [4] を参照されたい。

次にルート系 A_{n-1}に対応するＱＫＺ方程式を [3] に従って定式化しよう。$E = \oplus_{1\leq i\leq n}\mathbf{R}\epsilon_i$を $\langle\epsilon_i,\epsilon_j\rangle = \delta_{ij}$ なる内積 $\langle\,,\rangle$ を伴うユークリッド空間、$P = \oplus_{1\leq i\leq n}\mathbf{Z}\epsilon_i$を $GL(n)$ のウエイト格子とする。また、$\Delta = \{\,\alpha_{ij} = \epsilon_i - \epsilon_j\,;\,1 \leq i \neq j \leq n\}$ をルート系、$\Delta^+ = \{\,\alpha_{ij}\,;\,1 \leq i < j \leq n\}$ を正ルート全体の集合、$\Pi = \{\,\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}\,;\,1 \leq i \leq n-1\}$ を単純ルートの集合とし、$\alpha \in \Delta^+$を$\alpha > 0$ とも表記する。また、ウエイト格子 P の群環 $A = \mathbf{C}[P]$ の元を e^λとかき、Weyl 群 $W = S_n$の A への作用を $w(e^\lambda) = e^{w\lambda}$ $(w \in W)$ で定める。$\alpha \in \Delta$の時 $x \in E$ に対して $s_\alpha(x) = x - \langle x,\alpha\rangle\alpha$ とも書く。

ＱＫＺ方程式を設定する舞台としての空間 V を

$$V = \oplus_{w\in S_n} Ah_w$$

なるランクが $|W| = n!$ の左 A 自由加群として導入する。正確には係数環 A を適当に完備化する必要があるが、今回は気にしないことにする。

次は R-行列の定義。 R_α $(\alpha \in \Delta)$ を $End_A(V)$ の元として

$$R_\alpha h_y = \begin{cases} d_\alpha h_y + b_\alpha h_{s_\alpha y}\,, & y^{-1}(\alpha) > 0\,, \\ a_\alpha h_y + c_\alpha h_{s_\alpha y}\,, & y^{-1}(\alpha) < 0 \end{cases} \qquad (y \in W)$$

および

$$\begin{bmatrix} a_\alpha & b_\alpha \\ c_\alpha & d_\alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - te^\alpha} \begin{bmatrix} t(1-e^\alpha) & 1-t \\ e^\alpha(1-t) & 1-e^\alpha \end{bmatrix}$$

で定める。このとき Yang-Baxter 方程式

$$R_\alpha R_{\alpha+\beta} R_\beta = R_\beta R_{\alpha+\beta} R_\alpha$$

が成立する。また、作用素 $L_{\epsilon_i} \in End_{\mathbf{C}}(V)$ と $P^u_{\epsilon_i} \in End_A(V)$ とを

$$L_{\epsilon_i}(\sum f_w h_w) = \sum L_{\epsilon_i}(f_w) h_w\,, \quad L_{\epsilon_i}(e^\lambda) = q^{\langle \epsilon_i, \lambda \rangle} e^\lambda \quad (\lambda \in P)$$

および

$$P^u_{\epsilon_i}(h_w) = q^{\langle \epsilon_i, wu \rangle} h_w \quad (w \in W,\, u \in \mathbf{R}^n)$$

で定義する。このときＱＫＺ方程式は次で与えられる。

定義（A_{n-1}**型ＱＫＺ方程式**） $F \in V$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n$に対して

$$L_{\epsilon_i} F = L_{\epsilon_i}(R_{i\,i-1} \cdots R_{i1}) P^u_{\epsilon_i} R_{in} \cdots R_{i\,i+1} F \quad (1 \le i \le n) \tag{8}$$

但し $L_{\epsilon_i}(R) = L_{\epsilon_i} \cdot R \cdot L_{\epsilon_i}^{-1}, R_{ij} = R_{\alpha_{ij}}$ とした。

さて、我々は方程式 (8) の解を積分表示により与えたい。例によってメインの被積分函数（(1) の対応物）から与えていくことにする。天下り的だけどまあ致し方がない。

$$\begin{aligned} \Phi &= \prod_{1 \le j \le n} (x_j^{(0)})^{\lambda_n} \\ &\times \prod_{1 \le i \le n-1} \left\{ \prod_{1 \le \mu \le k^i} (x_\mu^{(i)})^{\lambda_{n-i} - \lambda_{n-i+1}} \prod_{1 \le j \le k^{i-1}} \frac{(t x_j^{(i-1)}/x_\mu^{(i)})_\infty}{(x_j^{(i-1)}/x_\mu^{(i)})_\infty} \right. \\ &\qquad \left. \prod_{1 \le \mu_1 \ne \mu_2 \le k^i} \frac{(x_{\mu_1}^{(i)}/x_{\mu_2}^{(i)})_\infty}{(t x_{\mu_1}^{(i)}/x_{\mu_2}^{(i)})_\infty} \right\} \end{aligned}$$

がその函数であり、$x_j^{(0)} = y_j \quad (1 \le j \le n)$, $k^i = n - i$ とおいている。もう一方の主役（(3) の対応物）である有理函数 $\varphi_w = \varphi_w(y_1, \dots, y_m)$ は

$$\varphi_w = \sum_\sigma \sigma \prod_{i \ge 1} \left\{ \prod_{1 \le \mu \le k^i} \frac{\displaystyle\prod_{j^i_\mu < j \le k^{i-1}} \left(1 - \frac{x_j^{(i-1)}}{x_\mu^{(i)}}\right)}{\displaystyle\prod_{j^i_\mu \le j \le k^{i-1}} \left(1 - t\frac{x_j^{(i-1)}}{x_\mu^{(i)}}\right)} \prod_{1 \le \mu_1 < \mu_2 \le k^i} \frac{\left(1 - t\dfrac{x_{\mu_2}^{(i)}}{x_{\mu_1}^{(i)}}\right)}{\left(1 - \dfrac{x_{\mu_2}^{(i)}}{x_{\mu_1}^{(i)}}\right)} \right\}$$

と定める。ここでの和は$\sigma=(\sigma^1,\sigma^2,\cdots)\in S_{k^1}\times S_{k^2}\times\cdots$の作用を

$$\sigma(x_j^{(i)})=x_{\sigma^i(j)}^{(i)}$$

で定めたとき $\sigma=(\sigma^1,\sigma^2,\cdots)\in S_{k^1}\times S_{k^2}\times\cdots$ すべてに渉るものとする。またj_k^lという数字は

$$w=\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix}\in W$$

から得られる数列 $I=(i_1,\ldots,i_m)$ に対して次で定義する。まず数列 I から成分が l 以下のものを除いたものとして列 $I^{(l)}$ を作る。そして、$I^{(l)}$ の k 番目が $I^{(l-1)}$ の j_k^l 番目とする。ちょっとややこしいが、次の例を眺めて貰えればまあ判るであろう。

$$\begin{aligned} I &= (2,3) \\ & j_1^1=1 \quad j_2^1=2 \\ I^{(1)} &= (2,3) \\ & j_1^2=2 \\ I^{(2)} &= (3) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} I &= (3,1,2) \\ & j_1^1=1 \quad j_2^1=3 \\ I^{(1)} &= (3,2) \\ & j_1^2=1 \\ I^{(2)} &= (3) \end{aligned}$$

そして $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n$ のときサイクル C 上の積分を前と同様に

$$\langle\psi\rangle=\int_C\Phi\psi d\xi,\quad d\xi=\prod_{1\leq i\leq n-1}\frac{dx_1^{(i)}}{x_1^{(i)}}\cdots\frac{dx_{n-i}^{(i)}}{x_{n-i}^{(i)}}$$

と書けば、次の主定理が得られる。

定理 [5] $u=(\lambda_n,\lambda_{n-1},\ldots,\lambda_1)$ としたＱＫＺ方程式を

$$\sum_{w\in S_n}h_w\langle\varphi_w\rangle$$

は C によらず満たす。

さらに Cherednik や Kato の結果を援用すると直ちに次を得る。

系

$$\sum_{w\in S_n}t^{\ell(w)}\langle\varphi_w\rangle$$

は Macdonald の固有値問題の固有函数になる。但し $\ell(w)$ は $w\in W$ の長さとする。

また、(6) の対応物として

定理（三町一野海 [7]）$\int_C \Phi\, d\xi$ は C に依らず Macdonald の固有値問題の固有函数になる。

がわかる。Macdonald 対称多項式はこの場合も無限遠点の周りの多重ループ上の積分として得られるが、これも A_1 の場合と同様である。

また、解の独立性については

定理 [6] $t = q^k \ (k \in N)$ のとき $1 > |y_1| >> \cdots >> |y_n|$ において

$$\int_{C_e} \Phi\, d\xi \sim y_1^{\lambda_1} \cdots y_n^{\lambda_n} \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n-i} \frac{(q^{\lambda_j + \lambda_{n+1-j} + (n-i-j)k+1})_{k-1}}{(q)_{k-1}}$$

なる漸近挙動を得る。但し、積分域 C_e は各 $x_j^{(i)}$ 平面において $\{x_j^{(i-1)}, x_j^{(i-1)}q, \ldots, x_j^{(i-1)}q^{k-1}\}$ なる極の列を囲みながら反時計回りに廻るループの重ね合わせとする。

被積分函数の変数の対称性から

系 $C_w = (wC)(y_1, \ldots, y_n)$ として

$$\int_{C_w} \Phi\, d\xi \quad (w \in S_n)$$

は一次独立な固有函数解。

であることを見るのはたやすい。

参考文献

[1] Cherednik, I.: Quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations and affine root systems. Commun. Math. Phys. **150**, 109-136 (1992)

[2] Cherednik, I.: Double affine Hecke algebras, Knizhnik-Zamolodchikov equations, and Macdonald's operators. Internat. Math. Res. Notices **1992**, No.9, 171-180

[3] Kato, S.: R-matrix arising from affine Hecke algebras and its application to Macdonald's difference operators. Commun. Math. Phys. **165**, 533-553 (1994)

[4] Macdonald, I.G.: *A new class of symmetric functions,* in Actes Séminaire Lotharingen, Publ. Inst. Rech. Math. Adv., Strasbourg, 1988, 131-171

[5] Mimachi, K.: A solution to quantum Knizhnik - Zamolodchikov equations and its application to eigenvalue problems of Macdonald type, Duke Math. Jour. (1996)

[6] Mimachi, K.: Rational solutions to eigenvalue problems of the Macdonald type, in preparation.

[7] Mimachi, K., Noumi, M.: An integral representation of eigenfunctions for Macdonald's q-difference operators, to appear in Tohoku Math. Jour.

[8] Mimachi, K., Yamada, Y.: Singular vectors of Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials. Commun. Math. Phys. **174**, 447-455 (1995)

[9] Varchenko, A. N., Tarasov, V. O.: Jackson integral representations of solutions of the quantized Knizhnik-Zamolodchikov equation. St. Petersburg Math. J. **6**, 275-313 (1995)