

# Weyl 群不変な微分作用素環の一意性について

谷口 健二 (Kenji TANIGUCHI)<sup>1</sup>

東京大学大学院数理科学研究科

本稿では、リーマン対称空間上の不変微分作用素環の動径成分のなす環の一般化として Oshima-Sekiguchi によって定義された、Weyl 群不変な可換微分作用素環の一意性について論じる。ここでは「一意性」という言葉を環全体として今までに知られているもの以外にあるかという意味で使っているが、もっと問題を広げて 2 階の微分作用素 (=ハミルトニアン) と可換な微分作用素 (=運動の不変量) はどれだけあるか? という問題をここでは考える。

## 1. WEYL 群不変な可換微分作用素環についての復習

まず [OS] に従って Weyl 群不変な可換微分作用素環の定義を復習し、[OS] と [OOS] で得られた結果を述べる。

**定義 (Weyl 群不変な可換微分作用素環).**  $W$  を Weyl 群とすると  $W$  は自然に  $\mathbb{R}^n$  と、その複素化  $\mathbb{C}^n$  に作用する。

$C$  を、以下の条件を満たす微分作用素環の成す環とし、それを Weyl 群不変な可換微分作用素環とここでは言うことにする。

(C1)  $C$  の元は  $0 \in \bar{\Omega}$  を満たす  $\mathbb{C}^n$  の  $W$ -不変な連結開部分集合上の正則微分作用素である。

(C2)  $C$  の元は互いに可換である。

(C3)  $C$  の元は  $W$ -不変で、その主シンボルは座標  $\{x_i\}$  について定数である。

(C4)  $C$  にはラプラシアン  $H = 1/2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 + R(x)$  が含まれる。

(C5)  $C$  の元の主シンボル達は  $\mathbb{C}[\partial_x]^W$  を生成する。

$W$  が古典型 Weyl 群であるとき、Ochiai-Oshima-Sekiguchi によって、上記の条件を満たすポテンシャル関数  $R(x)$  が完全に分類され、また  $C$  の生成元が具体的な形で求められた。ここでは  $R(x)$  の分類を復習しておく。 $C$  の生成元的具体形については原論文を参照してください。

**定理 ([OOS, Theorem 1]).**  $R(x)$  は次のように表される:

$$R(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} u(x_i - x_j),$$

$W : A_{n-1}$ -型,

<sup>1</sup>JSPS Research Fellow

$$R(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (u(x_i - x_j) + u(x_i + x_j)) + \sum_{i=1}^n v(x_i), \quad W : B_n\text{-型},$$

$$R(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (u(x_i - x_j) + u(x_i + x_j)), \quad W : D_n\text{-型}.$$

さらに、この  $u(t)$  と  $v(t)$  という関数は以下のように表される:

$W$  が  $A_{n-1}$ -型で  $n \geq 3$  のとき、

$$(1.1) \quad u(t) = C_1 \rho(t) + C_2.$$

$W$  が  $B_n$ -型で  $n \geq 3$  のとき、

$$(1.2) \quad \begin{cases} u(t) = C_1 \rho(t) + C_2, \\ v(t) = \frac{C_3 \rho(t)^4 + C_4 \rho(t)^3 + C_5 \rho(t)^2 + C_6 \rho(t) + C_7}{\rho'(t)^2} \end{cases}$$

または

$$(1.3) \quad u(t) = C_1 t^{-2} + C_2 t^2 + C_3 \quad \text{and} \quad v(t) = C_4 t^{-2} + C_5 t^2 + C_6$$

または

$$(1.4) \quad u(t) = C_1 \quad \text{かつ} \quad v(t) \text{ は任意の関数.}$$

$W$  が  $D_n$ -型で  $n \geq 4$  のとき、 $u$  は (1.2) または (1.3) である。

$W$  が  $B_2$ -型のとき、 $(u(t), v(t))$  は (1.2), (1.3), (1.4) または

$$(1.5) \quad \begin{cases} u(t) = \frac{C_3 \rho(t/2)^4 + C_4 \rho(t/2)^3 + C_5 \rho(t/2)^2 + C_6 \rho(t/2) + C_7}{\rho'(t/2)^2}, \\ v(t) = C_1 \rho(t) + C_2 \end{cases}$$

または

$$(1.6) \quad \begin{cases} u(t) = C_1 \rho(t) + C_2 \frac{(\rho(t/2) - e_3)^2}{\rho'(t/2)^2} + C_3, \\ v(t) = C_4 \rho(t) + \frac{C_5}{\rho(t) - e_3} + C_6 \end{cases}$$

または

$$(1.7) \quad v(t) = C_1 \quad \text{で} \quad u(t) \text{ は任意の関数}$$

である。ここで  $C_i$  たちは任意の複素定数で、 $\rho(t)$  は、基本周期が  $2\omega_1, 2\omega_2$  である Weierstrass の楕円関数  $\rho(t|2\omega_1, 2\omega_2)$  を表し、 $e_3$  は  $\rho'^2 = 4(\rho - e_1)(\rho - e_2)(\rho - e_3)$  を満たす複素数である。

ここで楕円関数の周期としては無限大も許す。すると  $\rho(t|\infty, \infty) = t^{-2}$  と  $\rho(t|\sqrt{-1}\pi, \infty) = \sinh^{-2} t + 1/3$  により、上記の可換微分作用素環の極限として、三角関数や有理関数をポテンシャルに持つ可換微分作用素環が得られる。

## 2. 問題設定と記法

§1 で見たように、 $C$  に含まれる 2 階の微分作用素は、 $W$  に対するルート系を  $\Sigma$ , その positive system を  $\Sigma^+$  としたとき、

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 + \sum_{\alpha \in \Sigma^+} u_\alpha(\langle \alpha, x \rangle)$$

という形で表される。

本稿の主題は、冒頭にも書いた通り、

**問題.**  $u_\alpha(t)$  を §1 の分類の中から一つとり固定する。このとき  $H$  と可換な微分作用素  $P$  は、[OOS] で構成された環に含まれるか？

という問題を考えることである。ここで重要なのは  $P$  に

- (1)  $W$ -不変性
- (2) 主シンボルについての定数係数性

の条件を全く仮定していない、という点にある。リーマン対称空間上の不変微分作用素環や Calogero-Moser-Sutherland モデルに現れるものは、これらの条件を満たしているが、そうでないものはあまり知られていないことから、これらの条件はそれほど本質的ではないのではないか、ということが考えられる。

以下それを論じるために、記法を定めておく。

$\mathbb{R}^n$  の正規直交基底  $\{e_1, \dots, e_n\}$  を定め、 $\sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  により  $\mathbb{C}^n$  の座標  $(x_1, \dots, x_n)$  を用いる。

$W$  を Weyl 群とし、対応する reduced ルート系を  $\Sigma$  で表す。 $A_{n-1}$ ,  $B_n$ ,  $D_n$ -型のルート系  $\Sigma$  は  $\mathbb{R}^n$  で自然に実現され、その positive systems として次のものを取り、以下それを用いる:

$$A_{n-1}\text{-型: } \Sigma^+ = \{e_i - e_j; 1 \leq i < j \leq n\},$$

$$B_n\text{-型: } \Sigma^+ = \{e_i \pm e_j; 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{e_i; 1 \leq i \leq n\},$$

$$D_n\text{-型: } \Sigma^+ = \{e_i \pm e_j; 1 \leq i < j \leq n\}.$$

偏微分記号を  $\partial_{x_i} = \partial/\partial x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) で定める。 $\alpha \in \Sigma$  と  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  に対し、 $\langle \alpha, x \rangle$  をそれらの coupling とする。例えば  $\alpha = e_i - e_j$  なら  $\langle \alpha, x \rangle = x_i - x_j$  である。ルート  $\alpha$  のノルム  $|\alpha|$  を  $|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$  で定義する。 $\alpha$  と  $\partial_x := (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$  の coupling  $\langle \alpha, \partial_x \rangle$  も同様に定める。

多重指数  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  に対し、 $\partial_x^p := \partial_{x_1}^{p_1} \dots \partial_{x_n}^{p_n}$  とし、また  $|p| := \sum_{i=1}^n p_i$  とおく。

$P$  を  $\mathbb{C}^n$  のある開集合上の微分作用素としたとき、 $P_k = \sum_{|p|=k} a_p(x) \partial_x^p$  として  $P$  を  $P = \sum_{k=0}^m P_k$  のように分解し、 $\tilde{P}_k := \sum_{|p|=k} a_p(x) \xi^p$  ( $\xi =$

$(\xi_1, \dots, \xi_n)$  とおく。特に  $\tilde{P}_m$  を  $P$  の主シンボルという。  $\xi$  に対しても  $x$  の場合と同じように  $\partial_{\xi_i}, \partial_{\xi_i}^p, \langle \alpha, \xi \rangle, \langle \alpha, \partial_{\xi_i} \rangle$  を定める。

$2n$ -変数可微分関数  $f(x, \xi), g(x, \xi)$  に対して Poisson 積  $\{ , \}$  を

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n ((\partial_{\xi_i} f)(\partial_{x_i} g) - (\partial_{x_i} f)(\partial_{\xi_i} g))$$

で定める。よく知られているように、2つの微分作用素  $P$  と  $Q$  が可換なら、それらの主シンボル  $\sigma(P)$  と  $\sigma(Q)$  は Poisson 積で可換である。

### 3. 基本的な結果

$P$  を  $H$  の定義域の連結開部分集合上正則な  $m$ -階の微分作用素で、 $H$  と可換なものとする。  $[H, P] = 0$  という条件から容易に導き出せる結果をまずこの節で述べる。

まず前節の最後に注意したことから、

$$(3.1) \quad \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \tilde{P}_m \right\} = \sum_{i=1}^n \xi_i \partial_{x_i} \tilde{P}_m = 0$$

が成り立つ。以下記法の簡便のため、  $\mathcal{D} := \sum_{i=1}^n \xi_i \partial_{x_i}$ ,  $\mathcal{L} := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \partial_{\xi_i}$  という記号を用いる。  $y_1, \dots, y_n$  を

$$(3.2) \quad y_j = \frac{x_j}{\xi_j} - \frac{x_{j+1}}{\xi_{j+1}} \quad (1 \leq j \leq n-1)$$

で定めると、まず次のことがわかる。

**補題 3.1.** いまの記法で

$$(3.3) \quad \begin{cases} [\mathcal{D}, \partial_{x_i}] = 0 & (1 \leq i \leq n), \\ [\mathcal{D}, \partial_{\xi_i}] = -\partial_{x_i} & (1 \leq i \leq n), \\ \mathcal{D} y_i = 0 & (1 \leq i \leq n-1), \\ [\mathcal{D}, \mathcal{L}] = -\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 \end{cases}$$

が成り立つ。また  $\alpha \in \Sigma^+$  と正則関数  $f(t)$  に対し、

$$(3.4) \quad f'(\langle \alpha, x \rangle) = \mathcal{D} \left( \frac{f(\langle \alpha, x \rangle)}{\langle \alpha, \xi \rangle} \right)$$

が成り立つ。

## 系 3.2.

- (1)  $\tilde{Q}(x, \xi)$  が  $\{1/2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \tilde{Q}\} = 0$  を満たすなら  $\tilde{Q}$  は  $y_1, \dots, y_{n-1}$  と  $\xi$  の関数である。
- (2) 正則微分作用素  $Q$  が  $H$  と可換で、 $H$  の定義域の連結開部分集合上定義されているとする。このとき  $Q$  の主シンボル  $\sigma(Q)$  は  $\mathcal{R} := \mathbb{C}[\xi_i (1 \leq i \leq n), x_i \xi_j - x_j \xi_i (1 \leq i < j \leq n)]$  の元であり、 $Q$  の最高階の項は  $\mathbb{C}^n$  全体に解析接続される。
- (3)  $\tilde{Q}(x, \xi) \in \mathcal{R}$  が  $\xi$  について対称、つまり任意の  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して  $\tilde{Q}(x, \sigma(\xi)) = \tilde{Q}(x, \xi)$  が成り立つなら  $\tilde{Q} \in \mathbb{C}[\xi]$  が成り立つ。

証明. (1) 与えられた条件より  $\{1/2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \tilde{Q}\} = \sum_{i=1}^n \xi_i \partial_{x_i} \tilde{Q} = D\tilde{Q} = 0$  であるので (1) は (3.3) より得られる。

(2) 前節最後の注より  $D\sigma(Q) = 0$  である。さらに (3.3) により、 $\partial_{x_i} \sigma(Q) = -[D, \partial_{\xi_i}] \sigma(Q) = -D \partial_{\xi_i} \sigma(Q)$  であるが、ここで帰納法により  $\partial_x^p \sigma(Q) = (-1)^{|p|} |D|^{|p|} \partial_{\xi}^p \sigma(Q) / |p|!$  であることが示される。 $\sigma(Q)$  は  $\xi$  について多項式であるから、 $\sigma(Q)$  は  $x$  についても多項式である。よって (2) は (1) より得られる。

(3)  $\mathcal{R}$  の定義より  $\tilde{Q}(\xi, x)$  は  $D\tilde{Q}(\xi, x) = 0$  を満たす。ここで  $\tilde{Q}$  は  $\xi$  について対称であるから、 $\xi_j \partial_{x_i} \tilde{Q}(\xi, x) + \xi_i \partial_{x_j} \tilde{Q}(\xi, x) + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^n \xi_p \partial_{x_p} \tilde{Q}(\xi, x) = 0$  が成り立つ。これら 2 つの等式により 任意の  $1 \leq i, j \leq n$  に対して  $((\partial_{x_i} - \partial_{x_j})\tilde{Q})(\xi, x) = 0$  が成り立つ。これは  $\tilde{Q} = \tilde{Q}(\xi, \sum_{i=1}^n x_i)$  であることを意味するが、このとき  $D\tilde{Q} = (\sum_{i=1}^n \xi_i) \tilde{Q}'(\xi, \sum_{i=1}^n x_i) = 0$  であるので  $\tilde{Q}$  は  $x$  について定数である。ただし  $\tilde{Q}'(\xi, t) = d\tilde{Q}(\xi, t)/dt$  とした。□

(3.1) は

$$(3.5) \quad D\tilde{P}_m = 0$$

と同値である。

次に  $[H, P] = 0$  の  $m$ -階の項をみると、これは

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 \tilde{P}_m + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \tilde{P}_{m-1} \right\} = 0,$$

つまり  $D\tilde{P}_{m-1} = -1/2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 \tilde{P}_m$  と同値である。ここで (3.3) と (3.5) により

$$D\left(\frac{1}{2} \mathcal{L}\tilde{P}_m\right) = \frac{1}{2} [D, \mathcal{L}]\tilde{P}_m + \frac{1}{2} \mathcal{L}D\tilde{P}_m = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 \tilde{P}_m$$

であるので、 $\tilde{P}_{m-1}$  は適当な  $\tilde{Q}_{m-1} \in \mathcal{R}(=\mathbb{C}[\xi, x_j \xi_i - x_i \xi_j])$  を用いて

$$(3.6) \quad \tilde{P}_{m-1} = \frac{1}{2} \mathcal{L} \tilde{P}_m + \tilde{Q}_{m-1}$$

と表される。

さらに  $[H, P] = 0$  の  $(m-1)$ -階の項を調べてみよう。この項は

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 \tilde{P}_{m-1} + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \tilde{P}_{m-2} \right\} = \{ \tilde{P}_m, R(x) \}$$

となっている。ここで

$$\begin{aligned} \{ \tilde{P}_m, R(x) \} &= \sum_{i=1}^n \partial_{\xi_i} \tilde{P}_m \cdot \partial_{x_i} \left( \sum_{\alpha \in \Sigma^+} u_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) \right) \\ &= \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \langle \alpha, \partial_\xi \rangle \tilde{P}_m u'_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) \end{aligned}$$

であるので

$$(3.7) \quad \begin{aligned} D \tilde{P}_{m-2} &= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 \mathcal{L} \tilde{P}_m - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 \tilde{Q}_{m-1} \\ &\quad + \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \langle \alpha, \partial_\xi \rangle \tilde{P}_m u'_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) \end{aligned}$$

である。また (3.3) により

$$D \left( \frac{1}{8} \mathcal{L}^2 \tilde{P}_m + \frac{1}{2} \mathcal{L} \tilde{Q}_{m-1} \right) = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 \mathcal{L} \tilde{P}_m - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 \tilde{Q}_{m-1}$$

が成り立つ。(3.7) の右辺の第三項を見てみると、 $D \tilde{P}_m = 0$  により

$$D(\langle \alpha, \partial_\xi \rangle \tilde{P}_m) = [D, \langle \alpha, \partial_\xi \rangle] \tilde{P}_m = -\langle \alpha, \partial_x \rangle \tilde{P}_m$$

であるので、(3.4) を用いると

$$\begin{aligned} D \left( \frac{\langle \alpha, \partial_\xi \rangle \tilde{P}_m}{\langle \alpha, \xi \rangle} u_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) + \frac{\langle \alpha, \partial_x \rangle \tilde{P}_m}{\langle \alpha, \xi \rangle^2} U_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) \right) \\ = \langle \alpha, \partial_\xi \rangle \tilde{P}_m u'_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) \end{aligned}$$

が得られる。ここで  $U_\alpha(t)$  は  $u_\alpha(t)$  のある原始関数である。以上により以下のことが示された:

**命題 3.3.**  $\tilde{P}_{m-2}$  は次のように表される:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \tilde{P}_{m-2} = & \frac{1}{8} \mathcal{L}^2 \tilde{P}_m + \frac{1}{2} \mathcal{L} \tilde{Q}_{m-1} + \tilde{Q}_{m-2} \\ & + \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \left\{ \frac{\langle \alpha, \partial_\xi \rangle \tilde{P}_m}{\langle \alpha, \xi \rangle} u_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) + \frac{\langle \alpha, \partial_x \rangle \tilde{P}_m}{\langle \alpha, \xi \rangle^2} U_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) \right\}. \end{aligned}$$

ここで  $\tilde{P}_{m-2}$  と  $\mathcal{L}^2 \tilde{P}_m$  と  $\mathcal{L} \tilde{Q}_{m-1}$  はすべて  $\xi$  についての多項式であり、 $D \tilde{Q}_{m-2} = 0$  であるから  $\tilde{Q}_{m-2} \in \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \frac{1}{\langle \alpha, \xi \rangle^2} \mathcal{R}$  である。

#### 4. 周期的なポテンシャルを持つ可換微分作用素環の一意性

本節では

$$(4.1) \quad \begin{aligned} & \text{任意の } \alpha \in \Sigma^+ \text{ に対して } u_\alpha(t) \text{ は [OOS] の分類の中の} \\ & \text{非自明な周期関数である} \end{aligned}$$

ことを仮定する。つまりポテンシャルとして三角関数や楕円関数で表されるものを想定している。

**命題 4.1.** (4.1) の仮定の下で、 $\langle \alpha, \partial_\xi \rangle \tilde{P}_m$  は  $\langle \alpha, \xi \rangle$  で割り切れ、 $\langle \alpha, \partial_x \rangle \tilde{P}_m$  は  $\langle \alpha, \xi \rangle^2$  で割り切れる。

証明. まず (3.8) の右辺の第1, 2項と  $\tilde{P}_{m-2}$  は  $\xi$  についての多項式であることに注意しておく。これにより、ある多項式  $\tilde{Q}'_{m-2} \in \mathcal{R}$  があって、 $\langle \alpha, \partial_x \rangle \tilde{P}_m U_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) + \tilde{Q}'_{m-2}$  は  $\langle \alpha, \xi \rangle$  で割り切れる、つまり

$$(4.2) \quad \lim_{\langle \alpha, \xi \rangle \rightarrow 0} \{ \langle \alpha, \partial_x \rangle \tilde{P}_m U_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) + \tilde{Q}'_{m-2} \} = 0$$

が成り立つことがわかる。ここで  $\lim_{\langle \alpha, \xi \rangle \rightarrow 0} \langle \alpha, \partial_x \rangle \tilde{P}_m U_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) \neq 0$  であると仮定してみる。すると (4.2) 式の中で、 $\xi$  についての適当な単項式の係数に注目してみると、 $x$  の多項式  $f(x) \neq 0$  と  $g(x)$  で

$$f(x) U_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) + g(x) = 0$$

を満たすものが存在する。よって  $U_\alpha(t)$  は有理関数であり、これは仮定 (4.1) に反する。以上より  $\langle \alpha, \partial_x \rangle \tilde{P}_m$  が  $\langle \alpha, \xi \rangle$  で割り切れることがまず示された。

次に、多項式  $\tilde{Q}''_{m-2} \in \mathcal{R}$  で

$$(4.3) \quad \lim_{\langle \alpha, \xi \rangle \rightarrow 0} \{ \langle \alpha, \partial_\xi \rangle \tilde{P}_m u_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) + \frac{\langle \alpha, \partial_x \rangle \tilde{P}_m U_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) + \tilde{Q}''_{m-2}}{\langle \alpha, \xi \rangle} \} = 0$$

を満たすものが存在する。ここで変数  $x'_1 := \langle \alpha, x \rangle$  と  $x' := (x'_2, \dots, x'_n)$  を  $\mathbb{C}[\langle \alpha, x \rangle, x'] = \mathbb{C}[x]$  と  $\langle \alpha, \partial_x \rangle x'_j = 0$  ( $2 \leq j \leq n$ ) を満たすものとして導入する。たとえば  $\alpha = e_1 - e_2$  なら  $x'_1 = x_1 - x_2, x'_2 = x_1 + x_2, x'_j = x_j$  ( $3 \leq j \leq n$ ) とすればよい。同様にして  $\xi'_1 := \langle \alpha, \xi \rangle, \xi' := (\xi'_2, \dots, \xi'_n)$  を定める。

$\langle \alpha, \partial_x \rangle \tilde{P}_m$  が  $\langle \alpha, \xi \rangle$  で割り切れることと  $\tilde{P}_m$  が  $x$  と  $\xi$  の多項式であることから  $\tilde{P}_m$  は 適当な多項式関数  $S_1(s, \xi', t, x'), S_2(\xi', x')$  を用いて

$$\tilde{P}_m = \langle \alpha, \xi \rangle S_1(\langle \alpha, \xi \rangle, \xi', \langle \alpha, x \rangle, x') + S_2(\xi', x')$$

と表される。この表記を用いると

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \lim_{\langle \alpha, \xi \rangle \rightarrow 0} \frac{\langle \alpha, \partial_x \rangle \tilde{P}_m}{\langle \alpha, \xi \rangle} &= |\alpha|^2 (\partial_t S_1)(0, \xi', \langle \alpha, x \rangle, x') \\ &= |\alpha|^{-2} \langle \alpha, \partial_x \rangle \lim_{\langle \alpha, \xi \rangle \rightarrow 0} \langle \alpha, \partial_\xi \rangle \tilde{P}_m \end{aligned}$$

である。

ここで  $\langle \alpha, \partial_\xi \rangle \tilde{P}_m$  は  $\langle \alpha, \xi \rangle$  で割り切れないと仮定する。すると  $x$  の多項式  $f_\alpha(x) \neq 0$  と  $g_\alpha(x)$  があって、

$$(4.5) \quad f_\alpha(x) u_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) + |\alpha|^{-2} (\langle \alpha, \partial_x \rangle f_\alpha)(x) U_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) = g_\alpha(x)$$

が成り立つ。定数  $\omega$  と関数  $\phi(x) = \phi(x_1, \dots, x_n)$  に対し、 $\phi(x + \omega e_i) = \phi(x_1, \dots, x_i + \omega, \dots, x_n)$  という記法を用いる。

$\omega$  は  $u_\alpha(t)$  の 0 ではない周期とする。このとき定数  $C_\omega$  で  $U_\alpha(t + \omega) = U_\alpha(t) + C_\omega$  を満たすものが存在する。(4.5) 式で  $x + \omega e_i$  を  $x$  に代入すれば、

$$(4.6) \quad \begin{aligned} f_\alpha(x + \omega e_i) u_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) + |\alpha|^{-2} (\langle \alpha, \partial_x \rangle f_\alpha)(x + \omega e_i) U_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) \\ = g_\alpha(x + \omega e_i) - C_\omega |\alpha|^{-2} (\langle \alpha, \partial_x \rangle f_\alpha)(x + \omega e_i) \end{aligned}$$

が得られる。ここで  $\Sigma$  は  $A_{n-1}, B_n, D_n$ -型であるので、任意の  $\alpha \in \Sigma$  に対して  $\langle \alpha, e_i \rangle \in \mathbb{Z}$  が成り立つことを用いた。仮定 (4.1) により  $u_\alpha$  は有理関数ではないので、(4.5) と (4.6) により

$$\det \begin{pmatrix} f_\alpha(x) & |\alpha|^{-2} (\langle \alpha, \partial_x \rangle f_\alpha)(x) \\ f_\alpha(x + \omega e_i) & |\alpha|^{-2} (\langle \alpha, \partial_x \rangle f_\alpha)(x + \omega e_i) \end{pmatrix} = 0$$

が成り立つことがわかる。ここで  $f_\alpha \neq 0$  であるので、

$$\frac{(\langle \alpha, \partial_x \rangle f_\alpha)(x)}{f_\alpha(x)} = \frac{(\langle \alpha, \partial_x \rangle f_\alpha)(x + \omega e_i)}{f_\alpha(x + \omega e_i)}$$

であるが、これは  $(\langle \alpha, \partial_x \rangle f_\alpha)(x)/f_\alpha(x)$  が有理周期関数、つまり各  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) について定数関数であることを意味する。一方、 $f_\alpha$  は多項式であるので、 $f_\alpha$  は定数関数であるが、 $u_\alpha$  が有理関数ではないことから (4.5) により  $f_\alpha \equiv 0$  となってしまう、仮定に反する。以上により  $\langle \alpha, \partial_\xi \rangle \tilde{P}_m$  が  $\langle \alpha, \xi \rangle$  で割り切れることが示された。(3.8) 式をもう一度用いれば、 $\langle \alpha, \partial_x \rangle \tilde{P}_m$  が  $\langle \alpha, \xi \rangle^2$  で割り切れることが示される。□

**命題 4.2.**  $\xi$  についての多項式  $P(x, \xi) = \sum_{|p|=k} c_p(x) \xi^p$  が任意の  $\alpha \in \Sigma^+$  について  $\lim_{\langle \alpha, \xi \rangle \rightarrow 0} \langle \alpha, \partial_\xi \rangle P(x, \xi) = 0$  を満たすとする。

ここで  $P(x, \xi)$  が以下の2条件のうち少なくとも1つを満たすとする:

(4.7)  $P(x, \xi)$  の  $\xi$  についての次数は

$$\begin{cases} \leq n & ((W, \Sigma) \text{ が } A_{n-1} \text{ または } D_n\text{-型}), \\ \leq 2n & ((W, \Sigma) \text{ が } B_n\text{-型}). \end{cases}$$

(4.8)  $p = (p_1, \dots, p_n)$  のすべての  $p_i$  たちが0でなければ  $c_p(x) = 0$ .

このとき  $P(x, \xi)$  は  $\xi$  について  $W$ -不変である、つまり任意の  $\sigma \in W$  に対して  $P(x, \sigma(\xi)) = P(x, \xi)$  が成り立つ。

証明. まず条件 (4.7) は条件 (4.8) に帰着されることを注意しておく。つまり  $(W, \Sigma)$  が  $A_{n-1}$  または  $D_n$ -型で  $\deg_\xi P(x, \xi) \leq n$  なら、 $W$ -不変な項  $\xi_1 \dots \xi_n$  を除いて  $P(x, \xi)$  は条件 (4.8) を満たす。また  $B_n$ -型の場合には、 $\lim_{\langle e_i, \xi \rangle \rightarrow 0} \langle e_i, \partial_\xi \rangle P(x, \xi) = \lim_{\xi_i \rightarrow 0} \partial_{\xi_i} P(x, \xi) = 0$  により、各  $i$  に対して  $p_i = 0$  または  $p_i \geq 2$  が成り立つ。よって  $\deg_\xi P(x, \xi) \leq 2n$  ならば  $W$ -不変な項  $\xi_1^2 \dots \xi_n^2$  を除いて  $P(x, \xi)$  は条件 (4.8) を満たす。

### Step 1. $\mathfrak{G}_3$ -不変性.

まずこの命題を  $n = 3$  の場合に証明する。

$P(x, \xi)$  を

$$P(x, \xi) = \sum_{p_1+p_2+p_3=k} c_{p_1, p_2, p_3}(x) \xi_1^{p_1} \xi_2^{p_2} \xi_3^{p_3}$$

と表記する。 $\mathfrak{G}_3$ -不変性を証明するために、命題 4.1 を  $\alpha = e_i - e_j$  に対して用いる。 $\lim_{\xi_j \rightarrow \xi_i} (\partial_{\xi_i} - \partial_{\xi_j}) P(x, \xi) = 0$  における  $\xi_i^{l-1} \xi_h^{k-l}$  の係数は

$$(4.9) \quad \begin{cases} \sum_{p=0}^l (2p-l) c_{p, l-p, k-l}(x) = 0 & (1 \leq l \leq k), \\ \sum_{p=0}^l (2p-l) c_{k-l, p, l-p}(x) = 0 & (1 \leq l \leq k), \\ \sum_{p=0}^l (2p-l) c_{p, k-l, l-p}(x) = 0 & (1 \leq l \leq k) \end{cases}$$

である。帰納法により

$$(4.10) \quad \begin{cases} c_{0,i,k-i}(x) = c_{i,0,k-i}(x), \\ c_{0,k-i,i}(x) = c_{i,k-i,0}(x), \\ c_{k-i,0,i}(x) = c_{k-i,i,0}(x) \end{cases}$$

を示す。

$i = 1, 2$  に対しては (4.9) 式で  $l = 1, 2$  とすればよい。次に  $l = i$  に対する (4.9) の第 1 式は

$$i(c_{i,0,k-i}(x) - c_{0,i,k-i}(x)) + \sum_{p=1}^{i-1} (2p-i)c_{p,i-p,k-i}(x) = 0$$

である。ここで  $k > i$  なら、仮定 (4.8) により  $1 \leq p \leq i-1$  に対して  $c_{p,i-p,k-i}(x) = c_{i-p,p,k-i}(x) = 0$  であり、 $k = i$  なら帰納法の仮定により  $1 \leq p \leq i-1$  に対して  $c_{p,i-p,0}(x) = c_{p,0,i-p}(x) = c_{0,p,i-p}(x) = c_{i-p,p,0}(x)$  が成り立つ。いずれにせよ  $i$  に対して (4.10) が成り立つ。よって  $P(x, \xi)$  は  $\xi$  について  $\mathfrak{S}_3$ -不変である。

**Step 2.**  $B_3, D_3$  の場合に  $P(x, \xi)$  が偶であること。

命題 4.1 を  $\alpha = e_i + e_j$  に対して用い、 $P(x, \xi)$  が  $\xi$  について偶関数であることを示す。このために、 $i$  が奇数なら  $c_{0,i,k-i}(x) = 0$  が成り立つことを  $i$  についての帰納法で示す。

$\lim_{\xi_j \rightarrow -\xi_i} (\partial_{\xi_i} + \partial_{\xi_j})P(x, \xi) = 0$  における  $\xi_i^{l-1} \xi_h^{k-l}$  の係数は

$$(4.11) \quad \begin{cases} \sum_{p=0}^l (-1)^{l-p} (2p-l)c_{p,l-p,k-l}(x) = 0 & (1 \leq l \leq k), \\ \sum_{p=0}^l (-1)^{l-p} (2p-l)c_{k-l,p,l-p}(x) = 0 & (1 \leq l \leq k), \\ \sum_{p=0}^l (-1)^{l-p} (2p-l)c_{p,k-l,l-p}(x) = 0 & (1 \leq l \leq k) \end{cases}$$

である。(4.9) と (4.11) で  $l = 1$  とすれば  $c_{0,1,k-1}(x) = 0$  が成り立つことがわかる。(4.11) の第 1 式で  $l = 2i + 1$  とすれば  $\mathfrak{S}_3$ -対称性を使って、

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{2i+1} (-1)^{2i+1-p} (2p-2i-1)c_{p,2i+1-p,k-2i-1}(x) \\ &= 2 \sum_{p=0}^i (-1)^{p-1} (2p-2i-1)c_{p,2i+1-p,k-2i-1}(x) = 0 \end{aligned}$$

であることがわかる。 $k > 2i + 1$  のとき、仮定 (4.8) により  $1 \leq p \leq i$  に対して  $c_{p,2i+1-p,k-2i-1}(x) = 0$  が成り立つ。 $k = 2i + 1$  のとき、帰納法の仮定により  $p$  または  $2i + 1 - p$  は奇数であるから  $1 \leq p \leq i$  に対して

$c_{p,2i+1-p,0}(x) = c_{0,p,2i+1-p}(x) = c_{0,2i+1-p,p}(x) = 0$  が成り立つ。よって  $c_{0,2i+1,k-2i-1}(x) = 0$  であり、 $\mathfrak{S}_3$ -不変性により step 2 が証明された。

### Step 3. $n > 3$ の場合.

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して  $\sigma p = (p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(n)})$  とし、 $\sigma_{ij}$  で  $i$  と  $j$  の互換を表す。もし  $p_i$  または  $p_j$  が 0 なら、step 1 により  $c_{\sigma_{ij}p}(x) = c_p(x)$  である。次に  $p_i$  も  $p_j$  も共に 0 でないなら、仮定 (4.8) により  $p_h = 0$  となる  $h \neq i, j$  が存在する。Step 1 を  $i, j, h$  に対して用いれば、 $c_{\sigma_{ij}p}(x) = c_p(x)$  が得られる。これは  $P(x, \xi)$  が  $\mathfrak{S}_n$ -不変であることを意味する。同様にして  $B_n, D_n$ -型の場合に  $P(x, \xi)$  が偶であることも証明できる。□

**注 4.3** 仮定 (4.8) をはずすと、命題 4.2 の「割り切れ」条件を満たすが、 $W$ -不変ではないような  $\xi$  についての多項式が存在する。

たとえば

$$Q = \xi_1^2 \xi_2 \xi_3 - \frac{1}{3} \xi_1^3 (\xi_2 + \xi_3) + \frac{1}{6} \xi_1^4$$

は  $1 \leq i < j \leq 3$  に対して  $\lim_{\xi_j \rightarrow \xi_i} (\partial_{\xi_i} - \partial_{\xi_j})Q = 0$  を満たすが、 $\mathfrak{S}_3$ -不変ではない。

以上の結果を用いれば、この節の主定理、つまり周期的なポテンシャルを持つ可換微分作用素環の一意性、を述べることができる。

**定理 4.5.**  $(W, \Sigma)$  を古典型 Weyl 群と対応する reduced ルート系の組とする。[OOS] のポテンシャルの分類の中から、すべての  $u_\alpha(t)$  が定数ではない周期関数であるものを取り、それを用いてラプラシアン  $H = 1/2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 + \sum_{\alpha \in \Sigma^+} u_\alpha(\langle \alpha, x \rangle)$  ( $u_\alpha(t) = u_{w\alpha}(t)$ ) をつくる。  $P$  を  $H$  の定義域の連結開部分集合上定義された正則微分作用素で、 $H$  と可換なものとする。このとき  $P$  の階数が  $A_{n-1}, D_n$ -型 (resp.  $B_n$ -型) のとき  $n$  (resp.  $2n$ ) 以下であるなら、 $P$  は  $H$  の定義域全体に解析接続され、Ochiai-Oshima-Sekiguchi の構成した可換微分作用素環に含まれる。

証明.  $\sigma(P)$  が (4.7) を満たすなら、系 3.2.(3) と命題 4.2 により  $\sigma(P)$  は  $x$  について定数であり、 $\xi$  について  $W$ -不変でもある。Ochiai-Oshima-Sekiguchi の構成した可換微分作用素環には  $H$  と可換で、 $P$  と同じ主シンボルを持つ作用素  $P'$  が存在する。  $P - P'$  の階数は  $P$  のそれよりも低く、 $P - P'$  は  $H$  と可換である。  $P$  が仮定 (4.7) を満たすので、 $P - P'$  もまたそうである。よって帰納法により、 $P$  は OOS の可換微分作用素環に含まれる。また OOS が構成した環  $C$  の生成元は  $H$  の定義域上全体で定義され、そこで正則であるのでこの定理が完全に証明された。□

## 5. ポテンシャルが有理関数である場合.

有理関数ポテンシャルの場合、周期関数ポテンシャルの場合に比べて状況はかなり複雑である。つまり前定理で述べたような一意性は成り立た

ない。

ここでは  $A_{n-1}$ -型に話を限って、まず、ラプラシアン

$$(5.1) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \{C_1(x_i - x_j)^{-2} + C_2\}.$$

と可換な 2 階以下の微分作用素をすべて求める。この場合にも Weyl 群不変性は仮定しない。

次にその結果を用いて、Oshima-Sekiguchi の条件 (C1)-(C5) を満たすが、[OS] で得られたものとは異なる可換微分作用素環が存在するかどうかを調べる。結論を先に言うと、 $n = 3$  の場合は肯定的であり、 $n > 3$  のときは否定的である。

最後にこの有理関数ポテンシャルの場合に、 $H$  と可換な微分作用素の一つの系統的な構成法を述べてこのノートを締めくくりたいと思う。なおこの節の計算は極めて初等的であるので、計算のポイントのみを述べて細かい所には深入りしないことにする。以下 §§2, 3, 4 の記法をそのまま用い、(5.1) で  $C_1 \neq 0$ ,  $n \geq 3$  を仮定する。

$P = \sum_{k=0}^m P_k$  が  $H$  と可換なら、いまの場合にも  $\tilde{P}_m$  は (4.2) を満たす。ここで  $\tilde{Q}'_{m-2}$  は  $x$  についての多項式であるが  $U_\alpha(t)$  は  $t = 0$  に極を持つので

$$(5.2) \quad \lim_{\langle \alpha, x \rangle \rightarrow 0} \lim_{\langle \alpha, \xi \rangle \rightarrow 0} \langle \alpha, \partial_x \rangle \tilde{P}_m = 0$$

が成り立つ。次に (3.8) により  $\tilde{Q}''_{m-2} \in \mathcal{R}$  で

$$(5.3) \quad \lim_{\langle \alpha, \xi \rangle \rightarrow 0} \left\{ \langle \alpha, \partial_\xi \rangle \tilde{P}_m u_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) + \frac{\langle \alpha, \partial_x \rangle \tilde{P}_m}{\langle \alpha, \xi \rangle} U_\alpha(\langle \alpha, x \rangle) + \frac{\tilde{Q}''_{m-2}}{\langle \alpha, \xi \rangle} \right\} = 0$$

を満たすものが存在する。(5.2) を用いて (5.3) の  $\langle \alpha, x \rangle = 0$  における極を見れば

$$(5.4) \quad \lim_{\langle \alpha, x \rangle \rightarrow 0} \lim_{\langle \alpha, \xi \rangle \rightarrow 0} \langle \alpha, \partial_\xi \rangle \tilde{P}_m = 0$$

が成り立つ。この節の最初に述べたように、これから  $H$  と可換な高々 2 階の微分作用素

$$(5.5) \quad P = \sum_{i=1}^n a_2^i \partial_{x_i}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{11}^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_1^i \partial_{x_i} + a_0$$

をすべて求める。ここで  $a_2^i, a_{11}^{ij}, a_1^i, a_0$  は  $\{x \in \mathbb{C}^n; |x| < r\} \cap (\mathbb{C}^n - \cup_{1 \leq i < j \leq n} \{x \in \mathbb{C}^n; x_i = x_j\})$  上の正則関数とする。この定義域の形は、

ポテンシャル関数の極の周りでの情報を使いたいためにこうしているわけである。

このとき可換性の条件  $[H, P] = 0$  と極の周りでの情報 (5.4) 式を各係数関数  $a_2^i, a_{11}^{ij}, a_1^i, a_0$  について書き下し、計算すると、 $P$  は  $\mathfrak{S}_n$ -不変であることがわかり、 $P$  は以下のように表される:

**命題 5.1.**  $P$  をある  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  に対して

$$\{x \in \mathbb{C}^n; |x| < r\} \cap (\mathbb{C}^n - \cup_{1 \leq i < j \leq n} \{x \in \mathbb{C}^n; x_i = x_j\})$$

で定義された高々 2 階の正則微分作用素で  $H$  と可換なものとする。このとき  $P$  は  $\mathfrak{S}_n$ -不変で、 $\mathbb{C}^n - \cup_{1 \leq i < j \leq n} \{x \in \mathbb{C}^n; x_i = x_j\}$  に解析接続され、

$$1, \Delta_1 = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}, \Delta_1^2, H,$$

$$P_1 := \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j \partial_{x_i} - x_i \partial_{x_j})^2 + 2C_1 \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ 1 \leq p \leq n}} x_p^2 (x_i - x_j)^{-2},$$

$$P_2 := \sum_{1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq n} (x_j \partial_{x_i} - x_i \partial_{x_j})(x_k \partial_{x_i} - x_i \partial_{x_k})$$

$$+ 2C_1 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (2 \sum_{1 \leq p < q \leq n} x_p x_q - \sum_{p=1}^n x_p^2)(x_i - x_j)^{-2},$$

$$P_3 := \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j \partial_{x_i} - x_i \partial_{x_j})(\partial_{x_i} - \partial_{x_j}) + 2C_1 \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ 1 \leq p \leq n}} x_p (x_i - x_j)^{-2}$$

の線形結合で表される。

次にこの節の第 2 の主題、つまり Oshima-Sekiguchi の条件 (C1)-(C5) を満たすが、彼らが [OS] で構成したのと異なる環が存在するかについて述べる。ここで彼らが構成したものは  $u(t) = C_1 t^{-2} + C_2$  ( $C_1 \neq 0$ ) として

$$\begin{cases} \Delta_1 = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}, \\ H = 1/2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} u(x_i - x_j), \\ \Delta_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \partial_{x_k} - \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j, k \neq i}} u(x_j - x_k) \partial_{x_i}, \\ \dots\dots, \end{cases}$$

というものであった。[OS] の Theorem 3.2 により、(C1)-(C5) を満たす環  $C$  は  $\Delta_1, H$  と最高階が  $\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \partial_{x_k}$  である  $C$  の元によっ

て一意に決まるので、2階以下の  $\mathfrak{S}_n$ -不変微分作用素で  $\Delta_1, H$  と可換なものもどれだけ存在するかをまず調べる。すると命題 5.1 より、そのようなものは  $1, H, \Delta_1, \Delta_1^2$  と

$$P = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \{(x_j - x_k)\partial_{x_i} + (x_k - x_i)\partial_{x_j} + (x_i - x_j)\partial_{x_k}\}^2 \\ + 2C_1 \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ 1 \leq p < q \leq n}} (x_p - x_q)^2 (x_i - x_j)^{-2}$$

の線形結合で表されることがわかる。特に  $n = 3$  のときには、 $\Delta_1, H, \Delta_3 + \lambda P$  ( $\lambda \neq 0$ ) で生成される環を考えれば、新しい可換微分作用素の環が構成されたことになる。

さて  $n > 3$  のときにはどうであろうか。このときには  $\mathfrak{S}_n$ -不変な微分作用素

$$Q = \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_l} + \sum_{i=1}^n b_3^i \partial_{x_i}^3 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} b_{21}^{ij} \partial_{x_i}^2 \partial_{x_j} \\ + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} b_{111}^{ijk} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \partial_{x_k} + \sum_{i=1}^n b_2^i \partial_{x_i}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{11}^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \\ + (\text{低階の項})$$

で  $\Delta_1, H, \Delta_3 + \lambda P$  ( $\lambda \neq 0$ ) と可換なものがあるかどうかを調べればよい。このとき、 $[\Delta_1, Q] = [H, Q] = [\Delta_3 + \lambda P, Q] = 0$  という方程式を各成分ごとに書き下して計算すれば  $\lambda = 0$  が得られる。以上より

**定理 5.3.**  $W = \mathfrak{S}_n$  で  $u(t) = C_1 t^{-2} + C_2$  ( $C_1 \neq 0$ ) とする。

- (1)  $n > 3$  ならば、§1 の条件 (C1)-(C5) を満たす環  $C$  は [OS] で Oshima-Sekiguchi が構成したもの以外に存在しない。
- (2)  $n = 3$  ならば、 $\Delta_3 = \partial_{x_1} \partial_{x_2} \partial_{x_3} - C_1 \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j < k \leq n \\ j, k \neq i}} (x_j - x_k)^{-2} \partial_{x_i}$ ,

$\Delta_1, H$  は可換な環を生成する。これは [OS] で示されている。一方、

$$P = \{(x_2 - x_3)\partial_{x_1} + (x_3 - x_1)\partial_{x_2} + (x_1 - x_2)\partial_{x_3}\}^2 \\ + 2C_1 \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq 3 \\ 1 \leq p < q \leq 3}} (x_p - x_q)^2 (x_i - x_j)^{-2}$$

とすると、任意の  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対して  $\Delta_1, H, \Delta_3 + \lambda P$  も §1 の条件 (C1)-(C5) を満たす可換微分作用素環を生成する。

**注 5.4.**  $B_n, D_n$ -型の場合にも命題 5.1 と定理 5.3 の類似の結果が成り立つ。たとえば  $u(t) = C_0 + C_1 t^{-2} + C_2 t^2, v(t) = B_0 + B_1 t^{-2} + B_3 t^2$  (§1 の分類参照) として  $P$  を  $H = 1/2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \{u(x_i + x_j) + u(x_i - x_j)\} + \sum_{i=1}^n v(x_i)$  と可換な高々 2 階の正則微分作用素とするなら、 $C_1 \neq 0$  のとき、 $P$  は  $1, H$  と

$$P_1 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j \partial_{x_i} - x_i \partial_{x_j})^2 + \left( \sum_{p=1}^n x_p^2 \right) \left\{ C_1 \sum_{1 \leq i < j \leq n} ((x_i + x_j)^{-2} + (x_i - x_j)^{-2}) + B_1 \sum_{i=1}^n x_i^{-2} \right\}$$

の線形結合で表される。また (C1)-(C5) を満たすすべての可換微分作用素環は [OS] と [OOS] で構成されている。

最後に  $A_{n-1}$ -型るとき、 $H = 1/2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 + C_1 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^{-2}$  と可換な微分作用素の一つの系統的な構成法を述べておく。

$p_0(x)$  を  $k$ -次対称多項式とし、

$$p_j(\partial_x, x) := \text{ad}(H)^j p_0(x), \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

とする。このとき直接計算により次のことがわかる:

**補題 5.5.** 上記の記法で、 $p_0(x)$  が  $k$ -次同次対称多項式なら  $p_k(\partial_x, x) \in C$  が成り立つ。特に  $p_{k+1}(\partial_x, x) = 0$  である。

これより  $H$  と可換な微分作用素が以下のようにして構成される。

**系 5.6.**  $\sum_{j=0}^k (-1)^j p_j p_{k-j}$  は  $H$  と可換である。

命題 5.1 の作用素  $P_1, P_2$  はこの方法で構成され、 $[\Delta_1, P_1]$  と  $[\Delta_1, P_2]$  は  $P_3$  と  $\Delta_1$  の線形結合で表される。よって補題 5.5 と系 5.6 で構成したものをもとにして、 $H$  と可換な 2 階以下の微分作用素はすべて構成できる。このようなことがもっと高階の作用素に対しても成り立つかどうかはまだわかりません。

## REFERENCES

- [OO] Ochiai, H. and T. Oshima, *Commuting differential operators of type  $B_2$* , preprint, 1994, UTMS 94-65, Dept. of Mathematical Science, University of Tokyo.
- [OOS] Ochiai, H., T. Oshima and H. Sekiguchi, *Commuting families of symmetric differential operators*, Proc. Japan Acad. 70 A (1994), 62-66.

- [OS] Oshima, T. and H. Sekiguchi, *Commuting families of differential operators invariant under the action of a Weyl group*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2** (1995), 1-75.
- [T] Taniguchi, K., *On uniqueness of commutative rings of Weyl group invariant differential operators*, preprint, 1996, UTMS 96-36, University of Tokyo.
- [WW] Whittaker, E. T. and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis, Fourth Edition*, Cambridge University Press, 1927.