数理解析研究所講究録
1012巻 1997年 56-65

極値截線写像の線形結合の単葉性について

京都工織大　米谷文男　(Fumio Maitani)

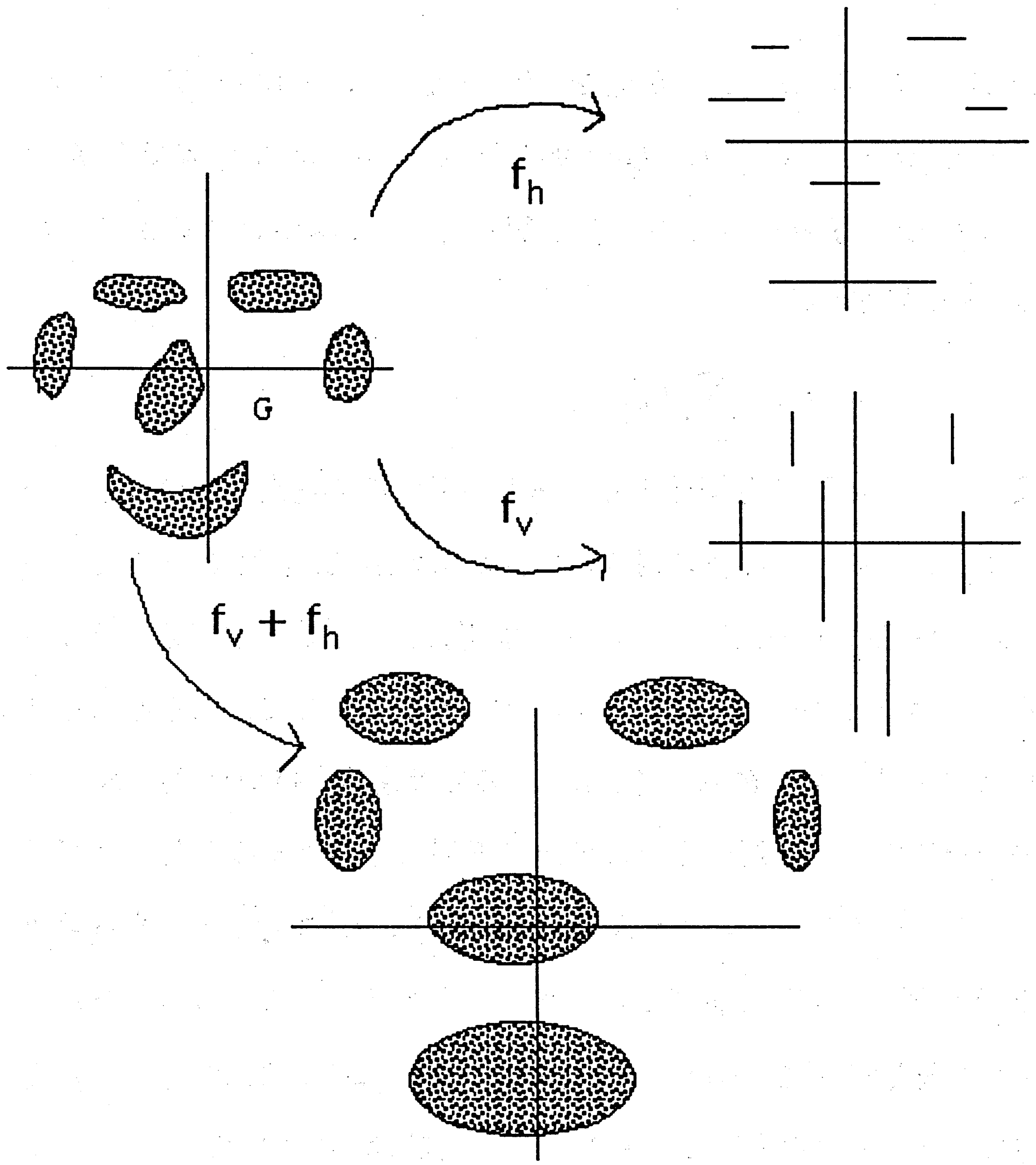
極値水平截線写像 と 極値垂直截線写像の線形結合の単葉性を調べることがこの小論の目標である。

複素球面上の無限遠点を含む領域 G 上の 極値水平截線写像 f_h 、極値垂直截線写像 f_v を考える。これらの写像は無限遠点を無限遠点に写し、無限遠点近傍で次のように正規化されているとする。

$$f_h = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^{-n},$$

$$f_v = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^{-n}.$$

このとき良く知られているように $f_v + f_h$ は G を補集合の各成分が凸集合であるような領域に単葉に写す。そこで $f_v - tf_h$ は $t = -1$ の近傍では単葉となろう。ここでの問題は $f_v - tf_h$ が単葉となる t の範囲を求めることである。


f_h
G
f_v
f_v + f_h

定理 1 退化しない有限連結領域 Gに対して$f_v - tf_h$が単葉となるのは $\Re\, t \leq 0$ のときに限る。

証明　G の f_h による像を H 、f_v による像を V とする。$w = f(z) = f_v \circ f_h^{-1}(z)$ は水平截線領域 H から垂直截線領域 V への等角写像を与える。この関数 $f(z)$ は無限遠点近傍で次の Laurent 展開を持つ。

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{-n} .$$

又、$f(z)$ は H の各境界成分である水平截線を垂直截線に写しているから、その水平截線の端点と垂直截線の端点に写される点を除いた水平截線の部分を超えて $f(z)$ を解析接続することができ、そこで $f'(z)$ の実部に関して $\Re\, f'(z) = 0$ がいえる。そして、水平截線領域 H と同じ水平截線領域H' (但し、$\bar{z}$ の複素構造を持つ)を対応する水平截線に沿って上端は上端に下端は下端にそのまま接合してダブルのコンパクトリーマン面を作り H で$f'(z)$ 、H' で $\overline{f'(z)}$ とする関数を その面上の有理型関数とみなすことができる。この極の総位数は水平截線数の 2 倍であるから、虚軸の f' による逆像が丁度 H の境界である水平截線となっており、f' の実部は H の内点で 0 をとることがない。$f(z)$ の無限遠点での正規化によって f' は 1 の近くの値を取っているから、H 上 f' の実部は正であることことが分かる。H の一つの水平截線を取り出し左端の点を A 右端の点を Cとしてこの水平截線が $f(z)$ によって写される垂直截線の上端に写される点を

B 下端に写される点を D とする。此のとき次のことに注意しょう。

$$f'(B)=f'(D)=0,\ f'(A)=f'(C)=\infty.$$

そして点 A から H を左手に見つつ点 Bまで辿るときその $f(z)$ による像は垂直截線の左側を V を左手に見つつ上端まで進むことになる。このようにして点 B は水平截線の上側にあり点 D は水平截線の下側にあって、$f'(z)$ の虚部に関して、

$$\Im f'(z)>0,\ \text{on } (A,B)\cup(D,C),$$

$$\Im f'(z)<0,\ \text{on } (B,C)\cup(A,D)$$

が満たされていると理解される。但し、(A,B), (B,C) は水平截線の上側に、(A,D), (D,C) は水平截線の下側にあると考えている。$\Im f'(z)$ は単調に変化しているので,

$$\Im f''(z)\le 0,\ \text{on } (A,B)\cup(B,C),$$

$$\Im f''(z)\ge 0,\ \text{on } (A,D)\cup(D,C).$$

さて、関数 $g(z)=f(z)+z=u+iv$ を考えよう。$g(z)$ による H の像の境界曲線 $g(\partial H)$ の曲率は

$$\frac{\dot u\ddot v-\dot v\ddot u}{(\dot u^2+\dot v^2)^{\frac{3}{2}}}=\Im\frac{g''\bar g'}{|g'|^3}=\Im\frac{f''\bar f'+f''}{|f'+1|^3}$$

$$=\Im\frac{f''}{|f'+1|^3}=\begin{cases}\le 0 & \text{on } (A,B)\cup(B,C)\\ \ge 0 & \text{on } (A,D)\cup(D,C).\end{cases}$$

で与えられる。従って $g(\partial H)$ は凸領域を囲むことになる。同様に $h(z)=f(z)-z$ によるHの像の境界曲線 $h(\partial H)$ の曲率は

$$\Im \frac{h''\bar{h}'}{|h'|^3} = \Im \frac{-f''}{|f'-1|^3}$$

で与えられる。

さて、H の異なる 2 点 $z_1, (\neq) z_2$ に対して、$\rho = |z_2 - z_1|$, $e^{i\theta} = \frac{z_2-z_1}{|z_2-z_1|}$ と置いて、 $0<\theta<\pi$ とする。ここで、線分 $[z_1, z_2]$ が H の水平截線と交わっている点でその水平截線の上側にある点を z_i^+ で、下側にある点を z_i^- で表わせば次の式が成立している。

$$f(z_2)-f(z_1) = \int_0^\rho f'(z_1+re^{i\theta})e^{i\theta}dr + \sum\{f(z_i^+)-f((z_i^-)\}.$$

従って,

$$\Re \frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1} = \frac{1}{\rho}\int_0^\rho \Re\, f'(z_1+re^{i\theta})dr + \frac{1}{\rho}\Re \sum\{f(z_i^+)-f(z_i^-)\}e^{-i\theta}.$$

$f(z_i^+)$ と $f(z_i^-)$ は同じ垂直截線上にあるから,

$$f(z_i^+)-f(z_i^-) = i\{\Im\, f(z_i^+) - \Im\, f(z_i^-)\}$$

である。次を仮定しよう。

$\{\Im\, f(z_i^+) - \Im\, f(z_i^-)\} \leq 0.$

関数 $\{\Im\, f(z_i^+) - \Im\, f(z_i^-)\}$ は水平截線上変数 z_i の関数とみれば連続でありその端点の近傍で正である。そこで、

$$\{\Im\, f(z_0^+) - \Im\, f(z_0^-)\} = 0.$$

を満たす点 z_0 がある。此のとき $f(z_0^+) = f(z_0^-)$ 且つ

$$g(z_0^+) = f(z_0^+) + z_0 = f((z_0^-) + z_0 = g(z_0^-)$$

である。ここで $g(z)$ は単葉で補集合の各成分が凸集合であるような領域に写像しているとの結果との矛盾が生じる。従って、

$$\{\Im\, f(z_i^+) - \Im\, f(z_i^-)\} > 0.$$

そして、

$$\Re \sum \{f(z_i^+) - f(z_i^-)\} e^{-i\theta} = \Re \;\; e^{(\frac{\pi}{2}-\theta)i} \sum \Im\, \{f(z_i^+) - f(z_i^-)\} > 0$$

であるから、

$$\Re\, \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} > 0.$$

$\theta = 0$ 又は 第 2 項が消える場合は明らかであることに注意しておこう。

以上の結果より $t \in \mathbf{C}$ $(\Re\, t \leq 0)$ に対して,

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \neq t \;\; i.e. f(z_2) - tz_2 \neq f(z_1) - tz_1.$$

これは $F(z) = f(z) - tz$ が H上単葉であることを示している。

一方、上で見たように $\Re\, f'$ は右半平面 $\{t; \Re\, t > 0\}$ を被覆しているから、実部が正である t に対して $g_t(z) = f(z) - tz$ は微分が零となる点を持つことになりH 上単葉には成り得ない。

更に、g_t による像の境界曲線 $g_t(\partial H)$ の曲率は $-\Re \bar{t} \Im \frac{f''}{|f'-t|^3}$ であることに注意しよう。

$\Re\, t < 0$ のとき、

$$\begin{cases} \leq 0 & \text{on } (A,B) \cup (B,C) \\ \geq 0 & \text{on } (A,D) \cup (D,C). \end{cases}$$

従って g_t の像の補集合は有限個の凸領域からなる。

$\Re\, t = 0$ のとき, その曲率は零となり、g_t の像の補集合は有限個の線分からなる。

$\Re\, t > 0$ のとき,

$$\begin{cases} \geq 0 & \text{on } (A,B) \cup (B,C) \\ \leq 0 & \text{on } (A,D) \cup (D,C). \end{cases}$$

境界曲線 $g_t(\partial H)$ の各成分は分岐点を含む像領域 $g_t(H)$ の一部を凸形に囲んでいる。

注. 実部が正である t に対して $g_t(z) = f(z) - tz$ が単葉にならないことは吹田信之先生から御指摘頂いた。

次に複素球面内の任意の領域 G について考えよう。G 上に単葉で有界な正則関数が存在しなければ（いわゆる Ahlfors - Beurling の N_{SB} の族に G が属する時）、$f_h = f_v$ となって$f_v - tf_h$ は勿論 1 以外のすべての t に対して単葉となる。そこで、 G 上に単葉で有界な正則関数が存在するとしよう。$\{G_n\}$ を G の正則近似列とし、f_{nh} と f_{nv} を$\{G_n\}$ に対する正規化された極値水平截線写像 と 極値垂直截線写像としよう。此のとき f_{nh} と f_{nv} は f_h と f_v に広義一様収束し、$f_{nv} - tf_{nh}$ も $f_v - tf_h$ に広義一様収束する。従ってHurwitz の定理に

よって、t の実部が非負の時には $f_v - tf_h$ が単葉となる。

さて、無限遠点近傍で次のように正規化されている G 上の単葉関数：

$$g = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^{-n},$$

に対して、$\Re\, b_1 \leq \Re\, c_1 \leq \Re\, a_1$であることが知られている。

これを $g \circ f_h^{-1}(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^{-n}$ として H 上の単葉関数と考えれば、$\Re\, B_1 \leq \Re\, C_1 \leq 0$ が成立している。そこで、1 と異なるt に対して、$g_t = \frac{f(z)-tz}{1-t}$ が H 上の単葉関数であるならば、$\Re\, B_1 \leq \Re\, \frac{B_1}{1-t} \leq 0$ を満たす。$B_1 = a + ib, t = t_1 + it_2$ と置けば

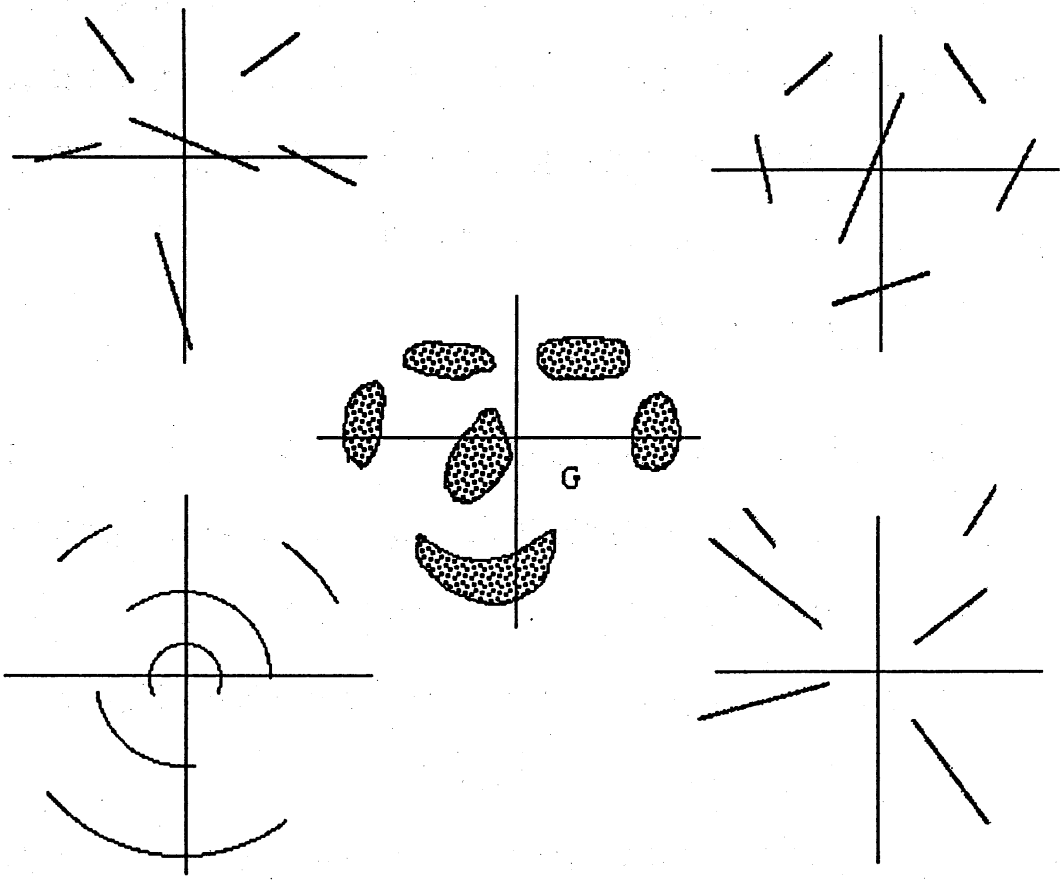
$$a \leq \frac{a(1-t_1) - bt_2}{(1-t_1)^2 + t_2^2} \leq 0.$$

先ず、単葉で有界な正則関数が存在するとの仮定から $a < 0$ 、次に $a(1-t_1) - bt_2 \leq 0$ より t の実部が非負の時には $f_h - tf_v$ が単葉となることがが示されているから、$b = 0$ でなければならない。そして、$t_1 \leq 1$ 且つ$(t_1 - \frac{1}{2})^2 + t_2^2 \geq (\frac{1}{2})^2$ が $f_v - tf_h$ の単葉性の必要条件となる。だが、この条件はまだ不十分であろう。

G 上に単葉で有界な正則関数は存在しないがデリクレ積分有限な正則関数が存在する場合には $f_v - tf_h$ の単葉性の必要十分条件として t の実部が非負であることがが示され、主張は一般の場合にも成立しているものと思われる。

C. FitzGerald 先生 から平行とは限らない線分を境界成分とする

截線領域への等角写像で対応する線分が直交している場合にその線形結合の単葉性についてはどうかとのコメントがあった。他に極値円弧截線領域 と極値放射截線領域への等角写像等についても同様のことが考えられる。



References

[AB] L. Ahlfors and A. Beurling, Conformal invaeiants and function-theoretic null-sets, Acta Math. 83(1950), 100-134.

[P] Ch. Pommerenke, Boundary behaviour of conformal maps, Springer- Verlag, 1992.

[S] N. Suita , 近代函数論. 1977, 森北出版.

[SO] L. Sario and K. Oikawa, Capacity functions. 1969, Springer-Verlag.