

# 矩形管内流れの安定性と乱流への遷移

同志社大学・工・足立 高弘  
Doshisha Univ.・Takahiro ADACHI

## 1 はじめに

管路系は、空調用ダクトやガス配管など工業的にきわめて広く用いられており、その最も重要な要素として矩形断面の直管を通る流れがある。この流れの安定性と乱流への遷移を調べることは、遷移に伴う力学量特性の変化を知る上で工学的に重要であるばかりでなく、分岐理論の立場から理学的にも大変興味深い。

矩形管流れの安定性は、断面のアスペクト比  $A$  (縦横比) に大きく依存する。アスペクト比が限りなく大きくなった極限では、流れは二次元ポアズイユ流に近づく。この流れの微小攪乱に対する安定性は Orszag[1] により調べられ、有限の臨界レイノルズ数  $Re_c = 5772.22$  を持つことが知られている。これに対して、アスペクト比  $A = 1$  の正方形断面の場合、矩形管流の安定性は、円形断面を持つ円管ポアズイユ流の安定性と本質的には同じと考えられている。

円管ポアズイユ流の層流から乱流への遷移についての研究は、有名なレイノルズの実験以来、多くの研究者によってなされてきた。しかしながら、安定性と分岐理論の立場から円管ポアズイユ流の安定性を説明することは非常に難しい。軸対称攪乱に対しては、この流れは常に安定であることが線形安定性解析によって示されているが[2]、3次元攪乱に対しては明確な証明が存在しない。3次元攪乱に対する理論的数値的な研究結果から、現在のところ円管ポアズイユ流は微小攪乱に対して常に安定であり、その臨界レイノルズ数は無限大と考えられている。[3][4]

さて、Tatsumi & Yoshimura[5] (以下 TY と記す) は、矩形管流の線形安定性を  $1 < A < 10$  の場合について調べた。彼らは、 $A > 3.2$  の場合には平面ポアズイユ流が不安定となるモードの三次元版といえるモードに対して矩形管流は不安定になるが、 $A < 3.2$  の場合には、矩形管流は微小攪乱に対して常に安定であると報告し、臨界アスペクト比  $A_{cr} = 3.2$  の存在を示した。同じように、Kerswell & Davey[6] は、楕円断面を持つ直管を通る流れの線形安定性をアスペクト比に対して調べ、臨界アスペクト比  $A_{cr} = 10.6$  を求めた。このように、矩形断面および楕円断面のいずれの場合にも、臨界アスペクト比の存在が報告されている。

本研究においては、矩形管流れの安定性と乱流への遷移について調べる。線形安定性を調べた後、弱非線形理論を用いて振幅方程式を導き、遷移の振るまいを調べる。さらに、最適攪乱の考え方についても簡単に紹介する。

## 2 基礎方程式

高さ  $2H$ 、幅  $2W$  の矩形管路を考える。座標系は図1に示すように、 $x$  軸を管路の中心軸に沿ってとり、 $y$  軸および  $z$  軸をそれぞれ、直交する二つの壁面に平行にとる。このとき、流れの場を支配する方程式は、ナビエ・ストークス方程式と連続の式で、それぞれ次のようにかける。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

ここで、 $\Delta$  はラプラシアンを表し、次式で定義される。

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3)$$

流れの場を特徴づける無次元パラメータは、矩形断面のアスペクト比  $A \equiv H/W$  と以下に示すレイノルズ数である。

$$Re = \frac{U_0 H}{\nu}. \quad (4)$$

ここで、 $U_0$  は管路中心での流速、 $\nu$  は流体の動粘性係数を表す。

境界条件は、管路壁面で流体が滑らないことから

$$\mathbf{u} = 0, \text{ at } y = \pm H \text{ and } z = \pm W \quad (5)$$

で与えられる。

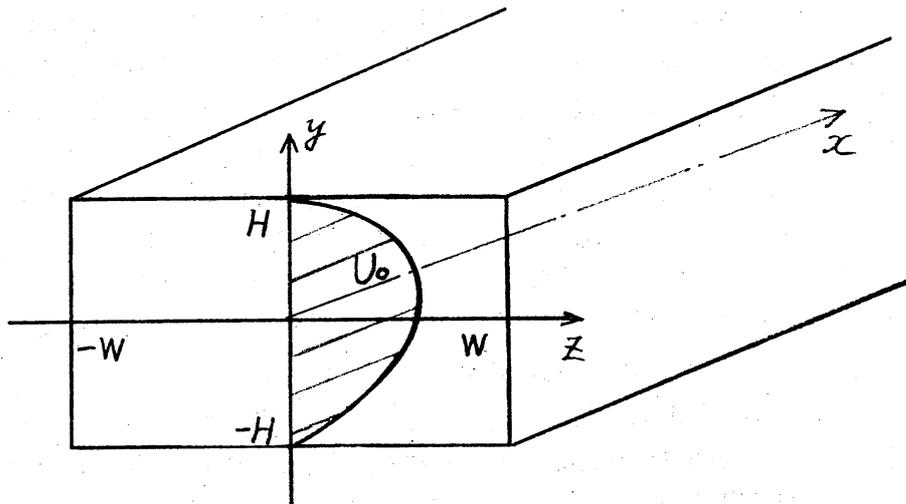


図1 座標系.

### 3 線形安定性

#### 3.1 主流

流れは定常で、流速は管軸に平行かつ軸方向に変化しないものとする、無次元速度および圧力は、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (U(y, z), 0, 0), \quad (6)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}) \quad (7)$$

のように表される。これを基礎方程式に代入すると、連続の式は自動的に満たされ、 $U$  および  $P$  に対する方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\kappa = \text{const.}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)U(y, z) = -\kappa Re. \quad (9)$$

ただし、 $\kappa$  は正の定数で、流れ方向の圧力勾配を表す。境界条件は、

$$U(y, z) = 0, \quad \text{at } y = \pm 1 \text{ and } z = \pm A \quad (10)$$

となる。

この方程式系は、膜のたわみを表す式と同じであり、矩形にかぎらず三角形など、様々な断面について解が求められている。矩形断面の場合、定常流の速度分布は三角関数と双曲線関数を用いて、次のように無限級数の形で表される。

$$U(y, z) = 1 - y^2 - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos my \cosh mz}{m^3 \cosh mA}, \quad (11)$$

$$m = \frac{2n+1}{2}\pi. \quad (12)$$

#### 3.2 主流の線形安定性

式(11), (12)で表される主流の微小攪乱に対する線形安定性を調べる。流れの場合  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  および  $p(\mathbf{x}, t)$  を主流  $U(\mathbf{x})$ ,  $P(\mathbf{x})$  と攪乱  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\hat{p}(\mathbf{x}, t)$  の和として

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \quad (13)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}) + \hat{p}(\mathbf{x}, t) \quad (14)$$

と表し基礎方程式に代入する。攪乱に関する二次の項を無視すれば、微小攪乱  $\hat{\mathbf{u}}$ ,  $\hat{p}$  に対する攪乱方程式

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + (U \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) U = -\nabla \hat{p} + \frac{1}{Re} \Delta \hat{\mathbf{u}}, \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (16)$$

が得られる。

方程式の線形性から、任意の微小攪乱の一つのフーリエモード

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(y, z) \exp[i\alpha(x - ct)], \quad (17)$$

$$\hat{p}(\mathbf{x}, t) = \tilde{p}(y, z) \exp[i\alpha(x - ct)] \quad (18)$$

のみに着目する。ここで、 $\alpha$  は攪乱の  $x$  方向の波数を表す。また、 $c$  は一般に複素数  $c = c_r + c_i$  であり、 $c_r$  は攪乱の位相速度を表し、 $\alpha c_i$  は攪乱の増幅率を表す。主流の安定性は、この  $c_i$  の符号によって決定される。すなわち、 $c_i < 0$  ならば攪乱は時間とともに減衰するので主流は安定、 $c_i > 0$  ならば攪乱は増幅するので主流は不安定、 $c_i = 0$  ならば攪乱は減衰も増幅もしないので中立安定である。

攪乱を支配する方程式は、(17)、(18) 式を(15)、(16) に代入し圧力  $\hat{p}$  を消去することにより

$$E(y, z)\tilde{v} = O(y, z)\tilde{w}, \quad (19)$$

$$E(z, y)\tilde{w} = O(z, y)\tilde{v} \quad (20)$$

となる。ただし、 $E(y, z)$  および  $O(y, z)$  は線形的作用素で

$$E(y, z) = -\left[\frac{i}{\alpha Re} \Delta + (U - c)\right] \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad (21)$$

$$O(y, z) = \left[\frac{i}{\alpha Re} \Delta + (U - c)\right] \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \quad (22)$$

である。

境界条件は、連続の式を考慮し

$$\tilde{v} = \tilde{w} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = \pm 1, \quad (23)$$

$$\tilde{v} = \tilde{w} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = \pm A \quad (24)$$

で与えられる。

方程式(19)、(20) および境界条件(23)、(24) 式を満たす解は以下に示すように、 $y$  方向および  $z$  方向に異なる対称性を持つ四つのモードに分けて考えることができる。

$$\text{(I)mode: } (\tilde{v}(e, e), \tilde{w}(o, o)),$$

$$\text{(II)mode: } (\tilde{v}(e, o), \tilde{w}(o, e)),$$

$$\text{(III)mode: } (\tilde{v}(o, e), \tilde{w}(e, o)),$$

$$(IV)\text{mode} : (\tilde{v}(a, a), \tilde{w}(e, e)).$$

ここで、例えば  $\tilde{v}(e, e)$  は  $\tilde{v}$  が  $y$  方向および  $z$  方向にそれぞれ偶関数であることを表す。この分類は、TY が行ったものと同じであり、この中で最も不安定な攪乱を与えるモードは、(I)mode であることが示されている。したがって、以下では、この (I)mode のみを取り扱うこととする。

### 3.3 数値計算の方法

数値計算においては、攪乱速度成分  $(\tilde{v}, \tilde{w})$  を直交多項式を用いて展開する。ここでは、計算精度の検証を行うためにルジャンドル多項式を用いた展開とチェビシエフ多項式を用いた展開の二通りを次のように行う。

$$\tilde{v} = \sum_{m=0}^{2M+1} \sum_{n=0}^{2N+1} a_{mn} F_m(y) G_n(z/A), \quad (25)$$

$$\tilde{w} = \sum_{m=0}^{2M+1} \sum_{n=0}^{2N+1} b_{mn} G_m(y) F_n(z/A). \quad (26)$$

ここで、 $F_m(x)$  および  $G_m(x)$  は以下に示すように、 $m$  次のルジャンドル多項式あるいはチェビシエフ多項式  $T_m(x)$  を用いて、あらかじめ境界条件を満たすように作られた関数である。

$$F_m(x) = (1 - x^2)^2 T_m(x), \quad (27)$$

$$G_m(x) = (1 - x^2) T_m(x). \quad (28)$$

これらの展開式を方程式に代入し、ガラーキソ法あるいはコロケーション法を用いると、次のような行列の固有値問題に帰着される。

$$\mathbf{Ax} = c\mathbf{Bx} \quad (29)$$

$$\mathbf{x} = {}^t(a_{00}, \dots, a_{2M+1, 2N+1}; b_{00}, \dots, b_{2M+1, 2N+1}) \quad (30)$$

計算は、(I)mode についてのみ行うので、上述の対称性を考慮に入れると、展開係数の総数は、 $2 \times (M+1) \times (N+1)$  となる。ガラーキソ法の積分には、96 点のガウス・ルジャンドル積分を行う。コロケーション法におけるコロケーションポイントは、ルジャンドル多項式およびチェビシエフ多項式のいずれの場合にも、極値を与える点を用いる。表 1 にアスペクト比  $A=5$ 、 $\alpha=0.9$ 、 $Re=10000$  における最大増幅率を持つ固有値と展開の打ち切りパラメータ  $M, N$  を示す。ガラーキソ法では、ルジャンドル多項式を用いてもチェビシエフ多項式を用いても、結果に差はなく収束性も良好である。一方、コロケーション法では、チェビシエフ多項式を用いた場合には、ルジャンドル多項式を用いた場合に比べて収束性が非常に悪く、収束値も他で得られた値と異なる。

表 1:固有値  $c = c_r + ic_i$  の展開項数  $M, N$  依存性

$M \times N$	Collocation		Garelkin	
	Legendre ( $c_r, c_i \times 10^4$ )	Chebyshev ( $c_r, c_i \times 10^4$ )	Legendre ( $c_r, c_i \times 10^4$ )	Chebyshev ( $c_r, c_i \times 10^4$ )
$18 \times 38$	(0.23294,-3.7334)	(0.23306,-5.1145)	(0.23289,-3.3466)	(0.23289,-3.3466)
$20 \times 40$	(0.23287,-3.3081)	(0.23309,-3.0813)	(0.23288,-3.4248)	(0.23288,-3.4248)
$22 \times 42$	(0.23289,-3.3317)	(0.23309,-3.3517)	(0.23289,-3.3957)	(0.23289,-3.3957)
$24 \times 44$	(0.23289,-3.3191)	(0.23163, 3.7698)	(0.23289,-3.4021)	(0.23289,-3.4021)

表 2:各アスペクト比における臨界レイノルズ数  $Re_c$ , 臨界波数  $\alpha_c$  と攪乱の位相速度  $c_i$ .

$A$	$Re_c$	$\alpha_c$	$c_i$
3.4	47832	0.669	0.163
3.5	36866	0.705	0.173
4.0	18226	0.814	0.204
5.0	10434	0.908	0.232

したがって、この問題では展開関数についてはルジャンドル多項式を用いる方が、チェビシェフ多項式を用いるよりも収束性および精度の点で優れていると考えられる。そこで、以下ではガラキン法でルジャンドル多項式を用いて計算を行う。

### 3.4 結果

図 2 に、アスペクト比  $A$  に対する臨界レイノルズ数  $Re_c$  を白丸で示す。また、表 2 には、臨界レイノルズ数、臨界波数  $\alpha_c$  および臨界点での攪乱の位相速度  $c_i$  を示す。臨界レイノルズ数の値は、TY の値とよく一致しており、図 1 では今回得られた値と TY の値との区別はつかない。この臨界レイノルズ数を与える攪乱のモードは、壁近傍で最も乱れが大きくなるモードである。これは、2次元ポアズイユ流が不安定となるモードの3次元版と考えられる。このとき、攪乱の位相速度は表 2 より  $c_i \simeq 0.2$  となる。図よりアスペクト比  $A$  が減少すると臨界レイノルズ数  $Re_c$  は増加し、TY が示した臨界アスペクト比  $A_{cr} = 3.2$  に近づくと、 $Re_c \rightarrow \infty$  となることがわかる。ただし、今回の計算結果から得られた臨界アスペクト比は  $A_{cr} = 3.116$  である。また、臨界レイリー数  $Re_c$  とアスペクト比  $A$  の臨界アスペクト比  $A_{cr}$  近傍の漸近形は次のよう書ける。

$$Re_c = \frac{11945}{A - 3.116} + 5772. \quad (31)$$

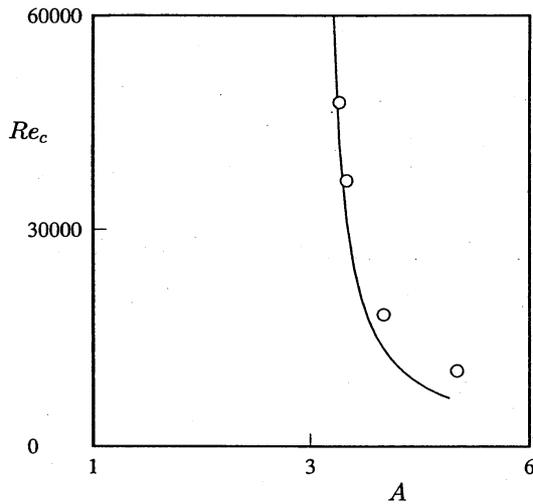


図2 中立曲線.

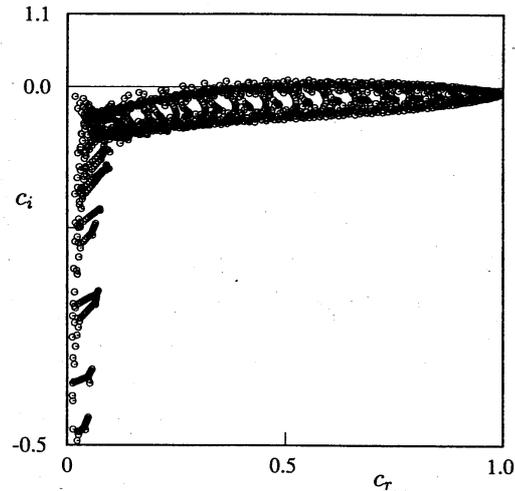


図3 固有値の分布.

次に,  $A < A_{cr} = 3.116$  に対しても計算を行った. 図3にアスペクト比  $A = 3$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $Re = 30000$  における固有値の分布を示す. ここで注目すべきは,  $c_r \simeq 0.6$  の付近に正の増幅率すなわち  $c_i > 0$  を持つ固有値が分布していることである. 先に述べたように, 壁近傍で乱れが大きな攪乱の位相速度が  $c_r \simeq 0.2$  であることから,  $A < A_{cr}$  では最大不安定を与える攪乱のモードが交替していることが予想される. これは, 臨界アスペクト比  $A_{cr}$  よりも小さなアスペクト比に対しても, 不安定解が存在することを示唆している.

#### 4 弱非線形安定性

線形不安定となった主流の遷移を調べるために, 攪乱の振幅方程式を導く. 流れ方向に波数  $\alpha$  を持つ攪乱に注目し, その高調波を考えて速度と圧力を次のようにフーリエモードに分解する.

$$\hat{u} = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n \exp[in\alpha x], \quad u_{-n} = u_n^*, \quad (32)$$

$$\hat{p} = \sum_{-\infty}^{\infty} p_n \exp[in\alpha x] + P_{00}x, \quad p_{-n} = p_n^*. \quad (33)$$

連続の式から速度の  $x$  方向成分  $u_n$  は次のようになる.

$$u_n = \frac{-1}{in\alpha} \left( \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial z} \right) \text{ at } n \neq 0. \quad (34)$$

このとき,  $f_n = {}^t(v_n, w_n)$  とおけば, 攪乱の方程式は形式的に以下のようにかける.

$$\frac{\partial}{\partial t} M f_n = L f_n + \frac{1}{Re} K f_n + \sum_m N(f_m, f_{n-m}). \quad (35)$$

境界条件は

$$v_n = w_n = \frac{\partial v_n}{\partial y} = 0 \text{ at } y = \pm 1, \quad (36)$$

$$v_n = \tilde{w}_n = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ at } z = \pm A \quad (37)$$

となる。ここで、増幅率展開により攪乱の振幅に関する方程式を導く。微小パラメータ  $\epsilon$  を線形安定性解析から得られた臨界点  $Re_c$  からのずれとして  $\epsilon^2 = 1/Re_c - 1/Re$  で定義し、 $f_n$  を  $\epsilon$  のべきで次のように展開する。

$$f_n = \epsilon^{|n-1|+1}(\phi_{n0} + \epsilon^2 \phi_{n2} + \dots). \quad (38)$$

また、時間に関して多重尺度法を導入する。すなわち、

$$t_k = \epsilon^{2k} t \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{k=0} \epsilon^{2k} \frac{\partial}{\partial t_k} \quad (40)$$

とおく。基本波 ( $n = 1$ ) に着目し、 $\epsilon^k$  の各べきを等しいとおき、それぞれのオーダーで方程式を評価すると、 $O(\epsilon)$  で次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t_0} M \phi_{10} = L \phi_{10} + \frac{1}{Re_c} K \phi_{10} \quad (41)$$

ここで、 $\partial/\partial t_0$  の項は臨界状態での攪乱の位相速度  $c_r$  を用いて  $\partial/\partial t_0 = -i\alpha c_r$  と表される。方程式(41)は主流の線形安定性を支配する(19)、(20)式と同じ形であり、その解  $\phi_{10}$  は、

$$\phi_{10} = A(t_1) g_{10}(y, z) \exp(-i\alpha c_r t_0) \quad (42)$$

とかける。ここで、 $g_{10}(y, z)$  は方程式(19)、(20)の固有関数であり、振幅  $A(t_1)$  はゆっくりとした時間スケール  $t_1$  の関数である。ただし、固有関数  $g_{10}(y, z)$  は、管路中心軸での値  $g_{10}(0, 0)$  を用いて規格化される。

次に、 $O(\epsilon^3)$  では次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t_0} M \phi_{12} + \frac{\partial}{\partial t_1} M \phi_{10} = L \phi_{12} + \frac{1}{Re_c} K \phi_{12} - K \phi_{10}$$

$$+ N(\phi_{20}, \phi_{10}^*) + N(\phi_{10}, \phi_{00}) + N(\phi_{00}, \phi_{10}) + N(\phi_{10}^*, \phi_{20}). \quad (43)$$

方程式(43)に対する可解条件から、振幅  $A(t_1)$  に対する方程式が次式のように得られる。

$$\frac{dA}{dt_1} = \lambda_0 A + \lambda_1 |A|^2 A. \quad (44)$$

ここで,

$$\lambda_0 = -\frac{\iint \tilde{g}_{10} K g_{10}}{\iint \tilde{g}_{10} M g_{10}}, \quad \lambda_1 = \frac{\iint \tilde{g}_{10} \{N\}}{\iint \tilde{g}_{10} M g_{10}} \quad (45)$$

である. 関数  $\tilde{g}_{10}(y, z)$  は (41) 式に対する随伴方程式を満足する随伴関数であり, 次式を満たす.

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \tilde{M} \tilde{g}_{10} = \tilde{L} \tilde{g}_{10} + \frac{1}{Re_c} \tilde{K} \tilde{g}_{10}. \quad (46)$$

ここで,  $\tilde{M}, \tilde{L}, \tilde{K}$  は,  $M, L, K$  の随伴作用素を表し, その内  $\tilde{M}, \tilde{K}$  は自己随伴作用素である.

方程式 (43) の非線形項に現れる  $\phi_{20}, \phi_{00}$  について考える. これらは, 波数  $n = 2$  および  $n = 0$  の攪乱を表す. 波数  $n = 2$  を持つ攪乱を表す関数  $\phi_{20}$  が満たすべき方程式は,

$$\frac{\partial}{\partial t_0} M \phi_{20} = L \phi_{20} + \frac{1}{Re_c} K \phi_{20} + N(\phi_{10}, \phi_{10}) \quad (47)$$

であり, その解は次式のようにかける.

$$\phi_{20} = A^2 g_{20} \exp(-i2\alpha_c t_0). \quad (48)$$

波数  $n = 0$  の攪乱を表す  $\phi_{00}$  については, 特別な注意が必要である. というのも, (43) 式の非線形成分を計算する際に  $\phi_{00} = {}^t(v_{00}, w_{00})$  から速度の  $x$  成分  $u_{00}$  を求めることが必要となるが, これを連続の式から求めることができないためである. 波数  $n = 0$  の攪乱  $\phi_{00} = {}^t(v_{00}, w_{00})$  を支配する方程式は,  $O(\epsilon^2)$  を考えると, 形式的に次式のようにかける.

$$\frac{\partial}{\partial t_0} M' \phi_{00} = L' \phi_{00} + \frac{1}{Re_c} K' \phi_{00} + N'(\phi_{10}, \phi_{10}^*) + N'(\phi_{10}^*, \phi_{10}). \quad (49)$$

また,  $u_0 = \epsilon^2 u_{00}$  として  $O(\epsilon^2)$  を考えると,  $u_{00}$  を支配する方程式は

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial t_0} + v_{00} \frac{\partial U}{\partial y} + w_{00} \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{Re_c} \Delta u_{00} + N_1(\phi_{10}, \phi_{10}^*) + N_1(\phi_{10}^*, \phi_{10}) + P_{00} \quad (50)$$

となる. ただし, 波数  $n = 0$  の場合には  $\partial/\partial t_0 = 0$  である. これら波数  $n = 0$  の攪乱は主流の変形を表し, 方程式 (49), (50) を解く場合に, (i) 圧力勾配一定条件と (ii) 流量一定条件とでは得られる結果に違いが生じることが知られている [7]. 以下で, そのことを示す.

(i) 圧力勾配一定条件のとき

圧力勾配が一定であることから,

$$P_{00} \equiv 0 \quad (51)$$

とおく. これより  $u_{00}$  についてのポアソン方程式

$$v_{00} \frac{\partial U}{\partial y} + w_{00} \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{Re_c} \Delta u_{00} + N_1(\phi_{10}, \phi_{10}^*) + N_1(\phi_{10}^*, \phi_{10}) \quad (52)$$

が得られる。これを解くことにより、圧力勾配が一定な解が求められる。

(ii) 流量一定条件のとき

方程式(50)を満たす解を、次のように表す。

$$u_{00} = u_{00}^{(1)} + P_{00}u_{00}^{(2)} \quad (53)$$

ここで、 $u_{00}^{(1)}$  および  $u_{00}^{(2)}$  は(50)式から、それぞれ次式を満たす。

$$v_{00} \frac{\partial U}{\partial y} + w_{00} \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{Re_c} \Delta u_{00}^{(1)} + N_1(\phi_{10}, \phi_{10}^*) + N_1(\phi_{10}^*, \phi_{10}), \quad (54)$$

$$\frac{1}{Re_c} \Delta u_{00}^{(2)} = -1. \quad (55)$$

さらに、 $u_{00}$  による管路断面での流量を  $Q_{00}$  とすると、

$$Q_{00} = \int \int u_{00}^{(1)} dydz + P_{00} \int \int u_{00}^{(2)} dydz \quad (56)$$

となり、流量一定条件の下では  $Q_{00} \equiv 0$  とすることにより  $P_{00}$  が決定される。流量一定条件の下では、 $P_{00} \neq 0$  となる解が可能であり、一般に圧力勾配一定条件と流量一定条件は両立しないことがわかる。

さて、ゆっくりとした時間スケール  $t_1$  に対する振幅方程式(44)を、 $t_1 \rightarrow \epsilon^2 t$  および  $\epsilon A \rightarrow A$  と  $1/Re_c - 1/Re = \epsilon^2$  を用いて、もとの変数で書き換えることにより振幅方程式

$$\frac{dA}{dt} = -(1/Re_c - 1/Re)\lambda_0 A + \lambda_1 |A|^2 A, \quad (57)$$

が得られる。ここで、 $(1/Re_c - 1/Re)\lambda_0$  は線形増幅率を表す。

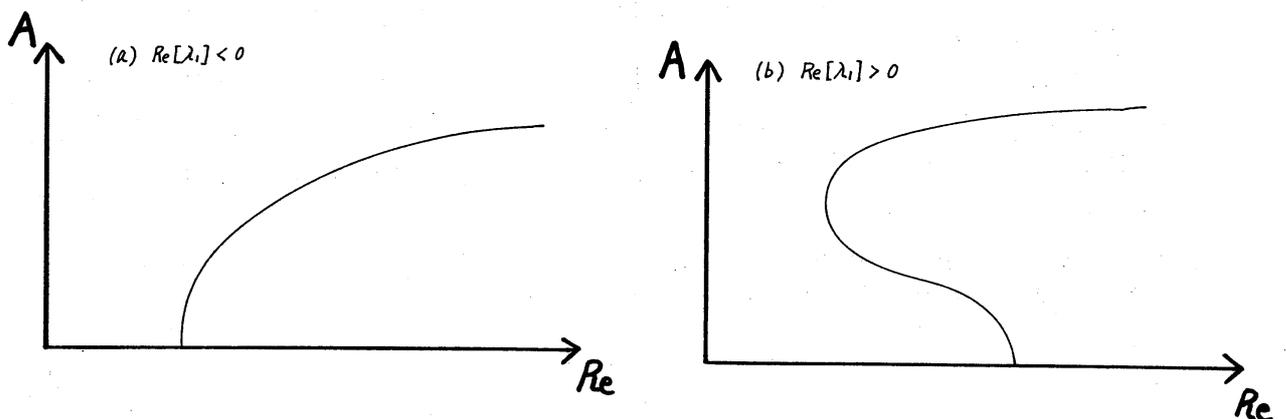


図4 分岐ダイアグラム。

この振幅方程式の係数を求めれば、分岐の振る舞いを知ることができる。すなわち、線形増幅率が正の値を持つときに、 $\text{Re}[\lambda_1] < 0$  ならば図 4 (a) に示すように超臨界分岐、 $\text{Re}[\lambda_1] > 0$  ならば図 4 (b) に示すように亜臨界分岐が結論できる。Kao & Park[8] の実験によると、アスペクト比  $A = 8$  の場合には、線形安定性から得られる臨界値よりも小さなレイノルズ数において主流は不安定になる。このことから、 $A = 8$  においては、図 4 (b) のような亜臨界分岐が起こっていることが予想される。

## 5 最適攪乱の考え方

TY の結果や今回の結果から壁付近で乱れが大きくなるモードに対しては臨界アスペクト比が存在し、アスペクト比がそれを越える場合には臨界レイノルズ数が無限大になることが示された。この場合には、臨界点からの摂動展開といういわゆる弱非線形安定性理論を用いた取り扱いができないことになる。このような状況下では伝統的な安定性理論の考え方を回避するために最適攪乱 (OPTIMAL DISTURBANCES) という考え方が注目を集めている [9][10][11]。最適攪乱の考え方とは、ある初期攪乱が非線形のメカニズムを励起するほどまで成長するならば、その結果として乱流に遷移する、というものである。すなわち、攪乱に関する時間発展の初期値問題を考えることである。このような攪乱は、発展の初期に代数的な不安定性を示すのが特徴である。

固有値問題のモード解析は、普通「ノーマルモード」として扱われる。自己随伴な作用素に対しては、モード解析によって得られる固有関数系はそれぞれ直交しており、初期攪乱の成長はそれぞれのモードの増幅率を追いかければよい。ところが、自己随伴でない作用素から得られる固有関数系は直交していない。その結果、それぞれのモードを分離して考えることができなくなる。以下に、最適攪乱の方法を簡単に紹介する。

固有値問題から得られた固有関数を用いて任意の攪乱を次のように級数の形で表す。

$$(u, v, w) = \sum_j \zeta_j (u_j, v_j, w_j) \exp[-i\alpha(c_r + ic_i)_j t]. \quad (58)$$

ここで、 $\zeta_j$  はモード  $j$  に対する展開係数である。また、

$$(u_j^t, v_j^t, w_j^t) \equiv (u_j, v_j, w_j) \exp[-i\alpha(c_r + ic_i)_j t] \quad (59)$$

を導入すれば、時刻  $\tau$  後の運動エネルギー  $E^\tau$  と初期のエネルギー  $E^0$  との比が次のようにかかる。

$$\frac{E^\tau}{E^0} = \frac{\int \zeta_j^* [(u_j^\tau)^* u_k^\tau + (v_j^\tau)^* v_k^\tau + (w_j^\tau)^* w_k^\tau] \zeta_k \, dr}{\int \zeta_j^* [(u_j^0)^* u_k^0 + (v_j^0)^* v_k^0 + (w_j^0)^* w_k^0] \zeta_k \, dr}$$

$$\equiv \frac{\zeta_j^* A_{jk}^\tau \zeta_k}{\zeta_j^* A_{jk}^0 \zeta_k} \quad (60)$$

ここで、\* は共役複素数を表す。また和の規約を用いた。

Butler & Farrell は、この比(60)式を最大にする攪乱に注目した。それはすなわち、次式で与えられる汎関数  $F$  を考えることである。

$$F = \zeta_j^* A_{jk}^\tau \zeta_k - \gamma \zeta_j^* A_{jk}^0 \zeta_k \quad (61)$$

ここで、 $\gamma$  はラグランジュの未定乗数である。汎関数  $F$  が最大値をとるとき、 $\gamma_{max}$  とそれに対応する  $\zeta_j$  が時刻  $\tau$  でのエネルギーの最大増幅を与えることになる。このとき、 $\gamma$  と  $\zeta_j$  を支配する方程式は式(61)を変分することにより得られ、次式の一般固有値問題に帰着する。

$$(A_{jk}^\tau - \gamma A_{jk}^0) \zeta_k = 0.$$

固有値  $\gamma$  は時刻  $\tau$  でのエネルギーと時刻 0 でのエネルギーの比を表し、 $\zeta_k$  は固有値に対応する固有ベクトルを表す。固有値  $\gamma$  の最大値  $\gamma_{max}$  に対応する固有ベクトルが、求める最適攪乱である。

## 6 まとめと今後の展望

矩形管内流れの線形安定性を矩形断面のアスペクト比に対して調べ、その臨界レイノルズ数を求めた。アスペクト比が比較的大きいとき、不安定となる攪乱は、壁近傍で乱れが大きなモードである。この攪乱は臨界アスペクト比  $A_{cr} = 3.116$  に近づくと、臨界レイリー数無限大を与えることが示された。 $A < A_{cr}$  に対しては、別のモードが支配的になる可能性が示唆された。

線形安定性解析に続いて、臨界点の近傍で摂動展開することにより攪乱の弱非線形段階における分岐の振る舞いを調べた。増幅率展開と多重尺度展開を用いて、攪乱の振幅に関する方程式を導いた。ただし、今回は振幅方程式の係数の決定は行わなかった。

最後に、最適攪乱の考え方について、簡単に紹介した。

今後は、弱非線形安定性理論における振幅方程式の係数を決定し、その結果を確かめるために数値シミュレーションを行う予定である。

## 7 参考文献

- [1] S.A.Orszag, Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. J.Fluid.Mech. 50(1971)689

- [2] 巽友正と後藤金英(1976):流れの安定性理論. 産業図書.
- [3] A.T.Patera & S.A.Orszag, Finite amplitude stability of axisymmetric pipe flow. *J.Fluid.Mech.* **112**(1981)467
- [4] H.Salwen, F.W.Cotton & C.E.Grosch, Linear stability of Poiseuille flow in a circular pipe. *J.Fluid.Mech.* **92**(1980)273
- [5] T.Tatsumi & T.Yoshimura, Stability of the laminar flow in a rectangular duct. *J.Fluid.Mech.* **212**(1990)437
- [6] R.R.Kerswell & A.Davey, On the linear stability of elliptic pipe flow. *J.Fluid.Mech.* **316** (1996)307
- [7] 水島二郎, 藤村薫と柳瀬真一郎, 平面ポアズイユ流中の2次元攪乱の非線形発展. 京大数理研講究録 **601**(1986)154
- [8] T.Kao & C.Park, Experimental investigations of the stability of channel flows.Part 1.Flow of a single liquid in a rectangular channel. *J.Fluid.Mech.* **43**(1970)145
- [9] L.Bergstrom, Initial algebraic growth of small angular dependent disturbances in pipe Poiseuille flow. *Stud.Appl.Math.* **87**(1992)61
- [10] L.Bergstrom, Optimal growth of small disturbances in pipe Poiseuille flow. *Phys.Fluids A5*(1993)2710
- [11] P.L.O'Sullivan & K.S.Breuer, Transient growth in circular pipe flow.I.Linear disturbances. *Phys.Fluids* **6**(1994)3643
- [12] K.M.Butler & B.F.Farrell, Three dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. *Phys.Fluids A4*(1991)1637