

ギリシア比例論の適用について

杉浦 光夫

1 「原論」第V巻の比例論

ユークリッドの「原論」第V巻にある連続量の比例の理論は、プロクロスの伝える所によれば、エウドクソスによるもので、有理数の切断によって実数を定義するデーデキントの方法と内容的に同値であるとして、19世紀終りから高い評価を得ている。本稿では、このエウドクソスの比例論を、具体的な幾何学的な諸量に適用する場合に生ずる問題を考察する。以下では、「原論」の中の第VI命題IをVI.1のように引用する。

最初に「原論」第V巻の冒頭の諸定義の中から、以下に必要なものを便宜上現代式の記号を用いて記しておく。

定義3 比とは同程の二つの量の間の大きさに関するある種の関係である。

定義4 二つの量 a, b に対し、適当な自然数 m, n をとるとき、 $ma > b, nb > a$ となるとき、 a, b は比を持つという。

定義5 四つの量 a, b, c, d があるとき、 a の b に対する比 $a:b$ が、 c の d に対する比 $c:d$ に等しいとは、任意の自然数 m, n に対して、その関係が成立つことを言う：

$$(1) ma \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} nb \Rightarrow mc \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} nd \text{ (複合同順)}$$

注意 転換法により、(1)における \Rightarrow は \Leftrightarrow と同値である。

定義7 ある自然数 m, n が存在して $ma < nb$ かつ $mc \leq nd$ となるとき、 $a:b > c:d$ と定義する。

このように、古代ギリシアでは、比とは同程の量の間の一項関係である。現代数学では、(スカラー)量 は、単位を定めて実数で表現する。そして比 $a:b$ と比の値 $\frac{a}{b}$ を同一視するのが普通である。こうして二項関係である比 $a:b$ は実数 $\frac{a}{b}$ に一元化される。この立場からすると、上の定義4による比の相等を有理数の集合

$$A = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid \frac{n}{m} < \frac{a}{b} \right\} \text{ と } A' = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid \frac{n}{m} < \frac{c}{d} \right\}$$

が一致することで定義したのと同値である。順序対 $(A, Q-A)$ は、有理数の切断となるので、エウドクソスの比例論は、デーデキントの実数論と内容的に同値である等と言われるのである。しかし上の集合 A, A' などは、古代ギリシア人には全く無縁のものであることは言うまでもない。

整数比のみを考えていたピュタゴラス教団の比例論(前5世紀)は、通約不能量の発見によって、限界がある事が分かったが、エウドクソスの比例論によって、任意の連続量の比が数学的にとらえられることになった。「原論」第V巻においては、上の比の相等、大小の定義に基づき、いくつかの比に関する基本的性質が証明されている。そのうちの二三のものを挙げておこう。

命題14 $a:b = c:d \Rightarrow a \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} c$ に応じて $b \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} d$ (複号同順)

命題15 任意の自然数 M に対し $a:b = Ma : Mb$

命題16 $a:b = c:d \Rightarrow a:c = b:d$

上の定義によれば、エウドクソス比例論において、同種の量の間比が定義されかつ比例論が適用できるためには、次の三条件I,II,IIIが満たされることが必要かつ十分である。

- I. その量について、相等および大小が定義されていること(現代的に言えば全順序集合であること)。
- II. 量 a の自然数 n 倍である na が定義されていること(加法半群であれば、 a の n 個の和として na が定義される)
- III. 同種の任意の二つの量 a, b に対して、自然数 n が存在して $na > b$ となる(定義4)(アルキメデスの公理)

「原論」第VI, XII巻では、長さ、面積、体積等の量に関し、比の理論を適用しているが、その場合大小 $a > b$ や n 倍 na をどのように定義したかは、明示されていない。しかし、いくつかの命題の証明から、これらの定義が推定される場合がある。次節でそれを調べて見よう。古代ギリシア数学においては、数は正の有理数までで、実数概念が無い。したがって、通約不能量を含む幾何学的な量では単位を定めて数値化することが出来ず、幾何学的量は図形そのものとして与えられている。従って、エウドクソスの比例論は連続量

全体に適用できる、一般論として構成されているが、具体的な量について考える場合には量の種類ごとに個別に考える必要が生ずる。それは次節の諸例によって具体的に示される。

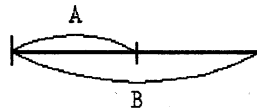
なお上の条件I,II,IIIを少し強めたもの(負の量も考える)の現代数学的な表現として次の定理がある。

定理([1]p.226)

アルキメデスの公理を満たす、任意の順序加群は、実数体の加法群 \mathbb{R} のある部分群と同型である。

Hölder(1906)

2 幾何学的諸量への比例論の適用の実態



2.1 線分の長さ

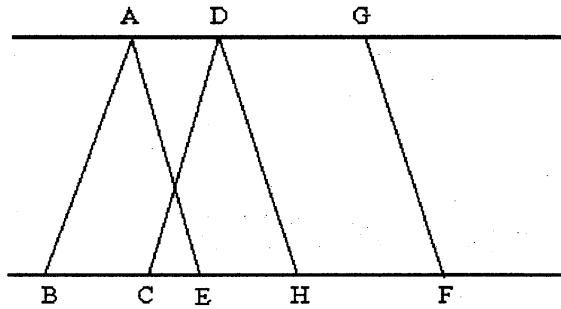
- I. 線分 a, b を重ね双方の一方の端点を一致させる。このとき双方の他の端点が一致すれば $a=b$ とし、そうでないとき a の他の端点が b 上にあれば $a < b$ とし、 b の端点が a 上にあれば、 $b < a$ とする。
- II. 線分 a の延長上に、 a と合同な線分 n 個を端点が重なるように並べて得られる線分を na とする。
- III. 線分の長さがアルキメデスの公理をみたすことは「原論」のどこにも証明されていない。おそらく直感的に明らかだと考えられていたと思われる。

現代数学の立場から、完備非アルキメデス順序体の上の2次元解析幾何を考えれば、アルキメデスの公理が成立たない。従ってユークリッドの体系の中で、線分の長さがアルキメデスの公理をみたすことの証明は原理的に不可能である。

上のI,IIにおける大小および na の定義の仕方がユークリッドの考えていたものであることは、「原論」第VI巻命題1(以下VI,1と記す)の証明からわかる。現代的な記号で、それを紹介しよう。先ず次の命題Aが第I巻の諸結果からすぐ証明される。

命題A 同じ平行線の間にある(つまり等高の)二つの平行4辺形(または3角形)P,Q(の面積)は、底辺の大きいほうが大きい。また逆も成立つ。

証明 下図から平行4辺形の場合は明らか。BC < EF なら



$$\square ABCD < \square AEF G$$

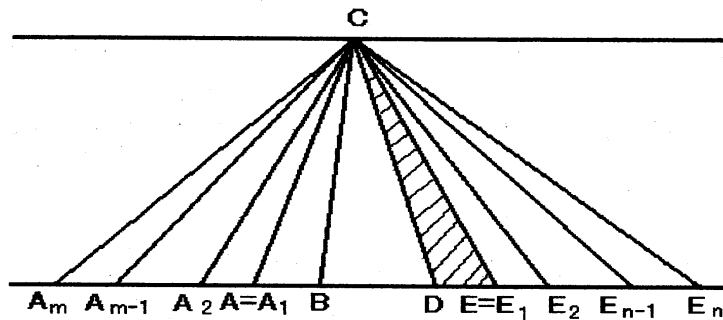
となる。三角形の場合はI,41により平行4辺形の場合に帰着する。転換法により逆も成立つ。与えられた高さ h を持つ三角形の集合 $J(h)$ に対し、面積の相等・大小を底辺のそれで定義する(命題A)。 $a \in J(h)$ の n 倍 na は、底辺が a の n 倍の三角形 $J(h)$ とする。これで $J(h)$ の二つの面積比が定義される。

IV. 1. 等高線な三角形(または平行4辺形)(の面積)は、底辺に比例する。

証明 平行4辺形Pと三角形Tが、同じ底辺と同じ高さを持つとき、 $P=2T$ である(I.41)。従って三角形についてVI.1が証明できれば、平行四辺形についてもVI.1が証明できる。V.15により $a : b = 2a : 2b$ だからである。今同じ高さの二つの三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle DEC$ に対し

$$(1) \triangle ABC : \triangle DEC = AB : DE$$

を証明する。 m, n を任意の自然数(≥ 1)とする。今、 $A = A_1$ とし、線分BAと合同な線分 $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{m-1}A_m$ を作る。同様に $E = E_1$ とし、線分DEと合同な線分 $E_1E_2, E_2E_3, \dots, E_{n-1}E_n$ を作る(下図参照)。等底、等高の三角形(の面積)は等しい(I.38)から、 $a = \triangle ABC = \triangle A_1A_2C = \dots = \triangle A_{m-1}A_mC$ となるので



(2) $ma = A_m BC$ となる。同様にして

(3) $nb = \triangle E_n DC$

である。したがって上の命題 A と I.38 により、次の同値が成立つ。

$$ma \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} nb \Leftrightarrow mBA = BA_m \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} DE_n = nDE$$

そこで比の相等の定義により、(1) が成立つ。

2.2 多角形の面積

理論的なギリシア数学 ~~など~~ では、平面図形の面積を考えている場合でも、それは、現代のように数値では表されておらず図形そのもの(の広がり)を考えているのである。この場合面積の相等、大小を定める場合の基本原理は次の二つの公理である。

公理7 重なり合うものは等しい。

公理8 全体は部分より大きい。

ただし、図形の包含関係は、全順序関係ではないのでこの二つの公理だけでは図形の面積の相等、大小を直接決定できる場合は少ない。図形を適当に分割して比較することが一般には必要になる。

任意の多角形は、有限個の三角形に分割される。また任意の三角形と等積な長方形が作図可能であり (I.42) かつその長方形の一辺は与えられた線分に等しくできる (I.44)。従って任意の多角形は、与えられた重さの長方形と等積になる (I.45)。従って多角形の面積の比を考えるためには、理論的には、与えられた高さの長方形全体の集合 R を考え、 R の二つの元の比を考えれば十分である。

- I. R の二つの元の(面積の)相等、大小は、底辺の相等、大小で定義すればよい(上の命題とI.38による)。
 (A)
- II. $a \in R$ と自然数 n に対し、 na は底辺が a の底辺の n 倍の長方形 $b \in R$ であるとすればよい。
- III. 大小と na の定義から、 R においてアルキメデスの公理が成立つことは、線分に関するアルキメデスの公理に帰着される。従ってこれはユークリッドの体系内では論理的には証明できず、直接的に認められていたものと思われる。

2.3 角の大きさ

現在定本とされているハイベルク・メンゲ版の「原論」[3]では、角の比は次のVI.33にしか現れない。

VI.33 等しい二円において中心角も円周角もそれらが立つ弧と同じ比を持つ。

先づ角は、第1巻定義8で、角とは平面上で互に交わる二つの線のなす傾きとして定義されているが、あまり明確ではない。一つはつきりしているのは、幾何学的量を図形そのものとしてとらえる「原論」の行き方からすると、一般角のようなものは考えられないということである。角を一点からでる二本の半直線の作る図形と見るか、一点で交わる二直線の作る図形を見るかで二つの考え方がある。今前者だとしよう。この時優角、劣角のどちらをとるかを指定しないと角の大きさは定まらない。

この場合角の大きさは4直角以下で、4直角は0とみなすことになる。こうすると角 a の n 倍 na に対してはアルキメデスの原理は成り立たない。従って「原論」の体系の中では、本来角の比は考えられないのである。従って上述のVI.33も、本来の「原論」にはなかった部分で後世の加筆と考えられる。いくつかの文献上の証拠からこの加筆をしたのをアレクサンドリアのテオン(4世紀後半)とされているが(cf.[2]) 数学的内容の吟味からも、本来の「原論」には無かったことが推定されるのである。

2.4 円の面積

「原論」第XII巻命題2は、次の通りである。

XII.2 円(の面積)は、直径上の正方形に比例する。

従って「原論」では、円(板)の面積の比を考えている。円板に対し、三条件I.II.IIIを考えて見よう。

直径 r,s の円板 a,b の中心を重ねるとき、

$$r \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} s \Leftrightarrow a \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} b$$

となるから、円板の相等、大小は直径の相等、大小で定義すればよい。

次に直径 r の円板 a の自然数倍 na が何の意味するかを考える。一つの解釈は、互いに重なり合わない直径 r の n 個の円板の合併を na とするのである。そうすると比の相等を定義するためには、 ma, nb の形の図形の面積の大小が定められる必要がある。しかしそれはそう簡単ではない。もう一つの解釈は中心が a と一致し直径が \sqrt{nr} の円板を、 na とするのである。これは na がまた円板となる点で、都合がよい。しかしXII.2の証明という観点からすると、これはこの命題の一部を、定義として先取りしていることになる。

ユークリッドは、円の比というとき na をどう定義していたのであろうか。

なおXII.2の証明は、いわゆる「とりつくし方」によって、「二つの円に内接する相似な多角形(の面積)の比は、それぞれの直径上の正方形(の面積)に比例する」(XII.1)に帰着させるものである。その証明において、面積に関する第4比例項の存在を用いているが、この存在は「原論」では証明されていない。(線分の比については、第4比例項の存在はVI.12として証明されている)。この点は「原論」の欠陥といえよう。

文献

- [1] G.Birkhoff, Lattice Theory, 2nd ed., Amer.Math.Soc., Providence, 1948.
- [2] I.Bulmar-Thomas, Theon of Alexandria, Dictionary of Scientific Biography, vol. XIII, p.322, Scribner's Sons, New York, 1976.
- [3] I.L.Heiberg & H.Menge, Euclidis Opera Omnia, I-VIII, Teubner, Leipzig, 1883-1916
- [4] 中村、寺阪、伊東、池田 訳・解説、ユークリッド原論、共立出版1971
- [5] 杉浦光夫、数学史の面白さ、数学セミナー、1987年3月号
- [6] 寺阪、大西 訳・解説、ヒルベルト幾何学の基礎、共立出版1970