数理解析研究所講究録
1019巻 1997年 30-39

古典関数解析と確率解析

飛　田　武　幸　(Takeyuki Hida)

名城大学　　理工学部

§1。はじめに。

無限次元解析の典型としての確率解析は、前世紀の終わり頃から活発になった古典関数解析の中に深いつながりを見ることができる。その関連は一面において確率解析の特徴を表現しており、それを見るとき、この解析に新しい視点を与えることができて、一層の発展を促すことになる。ここでは、いわば、温故知新の故知に倣って、古典の意義をよりよく理解するとともに、新たな展開を期待しようというのである。

本稿では、まず古典解析のうち確率論に直接関連するところを歴史として概観し、それが自然に確率解析に移行する様子を眺める。

ついで、古典関数解析と確率解析とを結ぶいくつかのルートについて、それぞれの意義を考えたい。

古いものの中に見いだされる新しい確率解析の課題をみながら、その類似を探して遊弋し、新たな知見を得ようとするのが我々の目標である。

§2。古典関数解析。

ここで古典関数解析と呼ぶ解析の内容は、１８８０年代からはじまり１９５０年頃まで、ヨーロッパで盛んに研究された関数解析を意味するものであり、主として、

Volterra-Hadamard-Fréchet-Lévy

によって活発に研究され、展開された理論を指す。その思想と成果は新たな装いのもとに、現代解析の中に蘇っている。

この流れの中で我々が気がつくのは次ぎの三つの方向である。

1）ヒルベルト空間 $H = L^2[0,1]$ で定義された汎関数の解析：

空間 H 上の関数の平均あるいは積分を考えるためにはまず H に目的に沿った測度を導入しなければならない。それにはいくらかの困難さが伴うが、それらは克服される。そこでは無限次元の特性があらわになっているのを見ることができる。ついで、解析学としての体系を整えつつ内容が充実する過程が知られる。

2）汎関数、あるいは曲面の関数の変分問題。

変数が無限次元空間の点であるような関数というならば、その変数は関数であるとは限らず、より一般な変量でも同様な解析が行えるであろう。微分が定義できるためには無限小変換の概念が導入できるようなものでなければならない。
古典解析における曲線や曲面の関数は、変分問題の歴史から見られるように、その重要さが再認識され、確率解析の中にその重要な位置を見いだそうとしている。

3）無限次元回転群

V.Volterra および P.Lévy の業績の中にその萌芽と調和解析への指向をみることができる。

2。1。汎関数

はじめの1）について、 H 上の適当な測度の導入であるが、有限次元の場合の類似、すなわちルベーグ測度に相当するものは存在しないことはよく知られている。しかし、そのような理想的な測度に固執するならば、次ぎのような素朴な観察ができよう。

H の単位球の体積は1である：

(2.1) $$\int_0^1 x(t)^2\,dt = 1, \qquad x \in H.$$

近似すれば、

(2.2) $$\Sigma x_i^2 = n, \qquad x_i = x(t_i),\ i = 1,2,\dots,n、$$

となり、各 x_i を座標とみたとき、(2.2) は半径が $\sqrt{n}$ の n-1 次元球面を表している。

一方、極座標を用いれば、容易に

i)　測度は球の表面に集中する、

ii)　さらに、赤道に集まる

ことがわかる。i) は回転不変な性質であり、ii) は座標の並べ方の順序によることに注意しよう。

このように、有限次元の類似が可能なものと、無限次元特有な性質とが混在している。後者の場合でも、有限次元的な概念で十分近似できるものと、そのような近似を許さないものとがある。そのことは後に述べる。

ここで、(2.2) の近似の方法を問わなければならない。

典型的な近似法として次ぎの二つをとりあげよう：

a) H の完全正規直交系をもちいて、各 x_i をフーリエ係数と考える場合、

b) H の元 $x(t)$, $t \in [0,1]$, を $n = 2^p$, $p = 1,2,\ldots,$ 等分し、各小区間の代表値を x_i とする。そして、順次区間を細分していく。

[註]。無限次元ラプラシアンを考えるとき、上の a) と b) とでは本質的な差異が現れる。そのような現象は他にも随所にみられる。

H 上で定義される汎関数のうち、最も基本的なものは多項式であり、それは次ぎのように記述される： n 次の斉次式なら

$$(2.3) \qquad \phi(x) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 F(u_1, \ldots, u_n)\, x(u_1) \cdots x(u_n)\, du^n, \qquad x \in H.$$

これを normal functional とよんでいる。kernel F を超関数にしてより一般の汎関数があらわされる。もし、F を対称なものに制限すれば (2.3) の表現は一意的である。

[註] x の n 次斉次多項式 (2.3)を確率解析の言葉に翻訳すれば、それは K.Itô による multiple Wiener integral であり、また N.Wiener による homogeneous chaos である。

なお、汎関数 $U(x)$ の二次変分の正規型が

$$(2.4) \qquad \delta^2 U = \iint U''_{xx_1}(t,t')\,\delta x(t)\,\delta x(t')\,dt\,dt' + \int U''_{x^2}(t)\,[\delta x(t)]^2\,dt$$

で与えられるとした P.Lévy の考えはホワイトノイズ解析に対する大きなヒントとなった。特に (2.4) の第二項 (singular part) を正規型の中にいれているのは重要なこととして指摘したい。

２。２。変分解析

２ページの ２）の方向については、Green 関数 $g(a,b;C)$ に対するいわゆる Hadamard equation が大きな刺激になったことは P.Lévy の仕事（学位論文、および 1922 年、1951 年の書物）からもうかがわれる。

Contour C を δC だけ変化させたとき g の変分は次式で与えられる：

$$(2.5) \qquad \delta g(a,b;C) = -(1/2\pi)\int_C \partial g(a,m;C)/\partial n \cdot \partial g(m,b;C)/\partial n \;\; \delta n\,ds$$

さらに、応用上の問題が提起する具体的な変分問題があった。例えば帯電した曲面の微小な変形に応じた電場の変分などであり、Lévy 他、この伝統的な課題に取り組んできた。古くからいろいろなアプローチがなされてきたが、依然として体系作りの道は遠いようだ。

２。３。無限次元回転群

H の単位球から話を始めたとすれば、回転群に至るのは自然のことである。特に、無限次元標準ガウス測度は回転不変であり、さらに真に無限次元的な Lévy ラプラシアンを定義しようとすれば、座標の回転に関する不変性を要求することになる。後者について、 Lévy は 1922 年の書物（第３部、第３章）で考え方を示し、さらに 1951 年の本では、無限個の座標の置換からなる、いわゆる Lévy 群に到達している。現代数学における種々の分野での無限次元回転群の役割を思うとき、古典関数解析における回転群の発生は、ごく自然なものとして受け止めることができる。

また V.Volterra も積分変換を用いて

(2.6) $f(s) \to f(s) + Kf(s)$, K は積分核、$K + K^* + K*K^* = 0$,

とあらわされる functional rotation を利用した functional dynamics を展開している。

いずれもホワイトノイズ解析に示唆を与えることになった。

§3。ホワイトノイズ解析

前節で概観した古典関数解析が最近の確率解析、特にホワイトノイズ解析にどのように反映したかを見よう。

1）特性汎関数が

(3.1) $C(\xi) = \exp[-(1/2)\|\xi\|^2]$

で与えられる超関数空間 E^* 上の確率測度を μ とする。 測度空間 (E^*, μ) がホワイトノイズである。

この測度の性質は §2.1 i) で述べたことの反映として半径が $\sqrt{\infty}$ の球面上の一様（回転不変）な確率測度とみなせることから説明できることが多い。

2）ヒルベルト空間 (L^2); 超汎関数空間 $(S)^*$.

ホワイトノイズ汎関数の空間

(3.2) $(L^2) = L^2(E^*, \mu) = \bigoplus H_n$ (Fock space)

が出発点となる。上の H_n の元には (2.3) の normal functional を対応させることができる。また、(3.2) の和において、各 H_n が拡張されて（H_n が無限次元であることに注意！）、それ等の和として超汎関数の空間 $(S)^*$ が得られている。

この手順として、まずテスト関数の空間 (S) から始めて下のような Gel'fand triple を構成する。このときの $(S)^*$ が求めるものである。

$$(S) \subset (L^2) \subset (S)^* 。 \tag{3.3}$$

また汎関数の S-変換は次式であたえられる：

$$(S\phi)(\xi) = \int_{E^*} \phi(x+\xi)\,d\mu(x) \tag{3.4}$$

この変換により x の超汎関数を ξ の関数で表現することができる。そして
これがホワイトノイズ汎関数と古典的汎関数をつなぐ手段となるのである。

3）演算など。

確率的な演算における著しい特徴は、確率分布の言葉でいうと、独立な諸量の加法に関して$\sqrt{n}$ 法則が成立していることである。この法則を標語的にいえば、1＋1 は2でなくて、スケールにおいて $\sqrt{2}$ である。これは古典解析では到底容認し難いことであろう。

ランダムな関数について、確率解析を進めるにあたっては、それら関数の変数にあたる基本的なランダム量をきめておくのが好都合である。そのような基本的な変数は、確率素子とでもよぶべきものであって、独立でホモジニアスな性質をもつ理想的な確率変数の系である。その系は "idealized elementary random variables" とよばれる。(John R. Klauder の suggestion!)

ホワイトノイズ解析は、ブラウン運動の微分であるホワイトノイズを確率素子にとり、それを変数とする関数を扱う解析である。そのような変数の積は Wick 積が好都合になる。

以上のような困難な演算も (3.4) の S-変換によって、通常の汎関数の古典的な演算に移行させることができる。

さらに、素子（変数）による偏微分は、S-変換をすれば、Fréchet 微分に他ならない（定義！）。この微分作用素の共役作用素も自然に導入される。こうして各種の演算がスムースに実行できる。

そこでは有限次元的なものを真に越えた（有限次元的のもので近似できない）汎関数や演算が登場して、興味深い事実が知られる。それらは超汎関数や Lévy のラプラシアン等である。
（§2.1 近似の方法 a），b）と比較参照）

4）調和解析。

ホワイトノイズ解析は無限次元回転群から生ずる調和解析の側面をもつ。ここでいう回転群は H.Yoshizawa によるものである。それは P.Lévy や V.Volterra の回転群を含むし、その他パラメータ空間のある種の微分同型によって定義される変換群（whiskers）も内蔵している。その群は勿論真に無限次元的なものであり，その群論的構造の解明とともに今後その役割の重要さが一層認識されることであろう。

無限次元のラプラシアンもこの立場からの研究が活発になされている。中でも Kuo-Obata-Saitô の結果に注目したい。

その他、量子ホワイトノイズ解析への展開もこの立場および上記3）の線上での研究も興味深いし、古典関数解析とも無関係ではない。

5）確率場の変分。

Contour や曲面 C をパラメータにもつ確率場 X(C) でホワイトノイズの超汎関数として表されるものは C が変化したときの変分についての方程式によって特徴づけられることがある。その場合 S-変換によって知られた古典関数解析における変分方程式に帰着させることができれば、解法にたいする有力な手段となる。物理学や分子生物学などの応用面からの要請もあって、実り多い今後の研究分野となろう。

[References and Biographies]

L.Euler 1707 - 1783

Variational calculus, 1744

H.Poincaré 1854 - 1912

Le méthodes nouvelles de la mécanique céleste III, 1899

Chapt.XXIX Diverses formes du principe moindre action,

V.Volterra 1860 - 1940

Functionnelle (named by Hadamard) 1887 -

Integral equation 1896 -

Leçons sur les fonctions de lignes. 1913.

Fluctuations biologiques - calcul des variations, 1936 -

Opere 5, 1926 - 1940

Lotka-Volterra equation

Théorie générale des fonctionnelles 1936 (with J.Pérés)

Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. 1959 (Dover ed.)

J.Hadamard 1865 - 1963

Leçons sur le calcul des variations, 1910

La vie et l'oeuvre de Jacques Hadamard. (P.Lévy, S. Mandelbrojt, B.Malgrange et P.Malliavin) 1967.

M.Fréchet 1873 - 1973

Les espaces abstraits. 1928

P.Lévy 1886 - 1971

Leçons d'analyse fonctionnelle. 1922

Calcul des probabilités. 1925

Théorie de l'addition des variables aléatoires. 1937

Processus stochastiques et mouvement brownien.1948,1965.

Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. 1951

Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien. 1970

N.Wiener 1894 - 1964

Differential space, 1923

Cybernetics,or controland communication ....,1948

Nonlinear problems in random theory. 1958.

A.N.Kolmogorov 1903 - 1987

Uber der analytischen Methoden in.... .Math.Ann. 1931.

L.Schwartz 1915 -

Theorie des distributions.1950-1.

K.Itô 1915 -

Multiple Wiener integral. 1951, and others

G.Maruyama,I.E.Segal, L.Gross, R.Cameron-W.T.Martin, I.M.Gel'fand, H.-H. Kuo,........

[Quotation] from L.Schwartz's article:

"Quelques reflexions et souvenirs sur Paul Lévy".

Societe Mathematique de France Asterisque.1988, 13-28.

En 1919, un an avant sa nomination comme professeur a l'Ecole Polytechnique, le directeur des études, Carvallo, lui a demandé de faire trois conférences sur les probabilités et de les rédiger. Il accepta avec enthousiasme. Il regarda la littérature qui existait sur le sujet, trouva qu'elle etait assez importante, mais qu'elle ne contenait pas grand-chose.Il écrivit à sa femme: "Les probabilités sont au fond a peu pres inexistantes; j'ai deux mois pour les rédiger; ce n'est pas assez pour avoir le temps de lire cette littérateure, mais c'est largement assez pour avoir le temps de tout retrouver". Et c'est en effet à peu près ce qu'il fit.

(see: Lévy's autobiography § 28)