数理解析研究所講究録
1019巻 1997年 61-69

関孝和の括要算法における自然数の累乗和について

竹之内 脩

1 自然数の累乗和

自然数の累乗和

$$s_p(x) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

を求める問題は、中国、日本、ヨーロッパでそれぞれ研究された。

中国では、13世紀末、朱世傑 [1] がこの問題を取り上げている。それの継承かどうかはわからないが、関孝和は、その著書「括要算法」 [2] においてこの問題を論じ、完全な解答を与えた。同じ頃、ヨーロッパでは、Jakob Bernoulli [3] が、同じくこの問題を論じて、今日 Bernoulli の多項式として知られる次の結果を導いた。

$$s_p(x) = \frac{1}{p+1}n^{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \frac{p}{2}B_1 n^{p-1} - \frac{p(p-1)(p-2)}{2\cdot 3\cdot 4}B_2 n^p - 3 + \cdots$$

Bernoulli は、この式を導く過程を詳しく記述しているので問題ないが、関はどのようにしてこの方式を得たのか、明確には示していない。

2 関孝和の朶積術に関する問題点

関の括要算法は4巻から成り、その第1巻が、この和を求めることにあてられている。この巻は、朶積総術という簡単な序文と、解術、朶積術解という部分から成っている。

解術では、$a_1, a_2 \cdots$ ならびに $b_1, b_2, \cdots$ が与えられたとき、b_k を a_k の多項式として表す問題、いわゆる定差法が論ぜられており、1次相乗演段、2次相乗演段、3次相乗演段と4次の多項式になる場合まで論じられている。その書き方は、例を入れて、くどいくらいていねいである。

これに対して、朶積術解は、方朶、各方朶演段、式図第一、式図第二、式図第三、そして衰朶という部分から成り、ほとんど説明がない。

従来、これに対してとられている解釈は、関は、方朶の値を、多項式としてとらえ、その係数を、解術にある定差法によって定めたのだ、ということである。[4], [5]

私は、この解釈に疑問を呈するものである。その論点を以下に述べる。

(1) 和を実際求めて、それが 1 乗の和のときは 2 次式、2 乗の和のときは 3 次式、3 乗の和のときは 4 次式になることを認め、その先、4 乗の和のときは 5 次式、5 乗の和のときは 6 次式になることを推測したとして、それがどこまで求められたのであろうか。関は 11 乗の和までの式を出しているのである。いかに計算達者でも、とても、そこまでの計算をしたとは思えない。(痕跡がない)

(2) 関のような大数学者が、このような素人くさいやりかたをしたであろうか。このあとの非凡な処理の仕方を見ても、とてもそのようには思えない。むしろ、このような解釈をするのは、この天才を冒涜するものだといえよう。

(3) 関は、2 項係数の表(いわゆるパスカルの三角形)の運用を知っていた。これは、式図一がだいたい 2 項係数の表なのであるから、当然、そのように推測されることである。また、天元術に通暁していたことからも、このことは当然である。朱世傑がすでにこの表を活用しており、Bernoulli の方法がまた 2 項係数から出発していることから、関も 2 項係数の表をベースにその方法を得た、と考えられる。

(4) 関の朶積術解の最後は衰朶となっているが、これが何のためにあるのか、従来、何の解釈も与えられていない。[4] にしても [5] にしても、最後にこのような表が与えられている、と書いてあるだけである。しかし、私は、ここころが関の出発点であった、と思うのである。

以上の疑問点を踏まえて、私の考察を以下に述べる。

3 私の考察

関は、まず、衰朶の考察から出発した。

衰朶というのは、

$$1+2+3+\cdots+n$$

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n\cdot(n+1)$$

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n\cdot(n+1)\cdot(n+1)$$

$$\cdots$$

すなわち、

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+p-1)$$

のことである。

これを関は、圭朶、三角衰朶、再乗衰朶、三乗衰朶、四乗衰朶、五乗衰朶として、$p = 1,\cdots,6$ についてつくっている。この和は、すなわち

$$\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}{p!}$$

となるのであるが、したがって

基数　n

から出発して、順次

$n+1$ を掛けて 2 で割る

$n+2$ を掛けて 3 で割る

$n+3$ を掛けて 4 で割る

$\cdots$ として、和を書いている。

どうして、このようにして和がもとめられることを知ったのであろうか。

まず 2 項係数の表を作る。

1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

ここで、上の 1 からはじめて、順次下方にどこかまで加えると、和は、最後の数の右下の数になる。これは、この表の生成原理からいって当然のことである。

Bernoulli [3] は、このことを明確に出発点としている。

関 [2] は何も記していないのであるが、しかし、朱 [1] ははっきり、このことを認識している。すなわち、第 2 列の数を底子といい、第 3 列以降、交草朶、三角朶、三角落一形朶、三角撒

星形朶などといっている。そして、n 行目、第 $k+1$ 番目の数が、$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$ であることを述べている。

このことを考えると、関も、上の事実は認識していたと見てよいであろう。関が、朱や Bernoulli と異なるところは、第 n 行という形に横にとらないで、右下、右下ととっていく点である。他の操作は、同様と考えられる。

さて、関は衰朶を $p=5$ の場合まで導いているわけである。その結果は、

$$\sum_{k=1}^{n} k^p$$

を、$p=6$ まで求めたことになる。すなわち、これによって、式図第三が、五乗のところまで得られたことになる。

式図第三から、式図第二を作る。その結果、この表は、2 項係数の表で、

第 2 列に $\frac{1}{2}$
第 3 列に $\frac{1}{6}$
第 4 列に 0
第 5 列に $\frac{1}{42}$

を乗じて加えたものであることが知られる。これによって式図第一の五乗のところまでが得られる。

次に、これらの乗数は何であるかを考える。それは、恐らく $n=1$ の場合として、各行で、これらの乗数を掛けて加えたものが 1 となるべきであることから求めればよい、というのが、圭朶演段、…、五乗方朶演段、なのであろう。

このようにして、乗数の求め方を理解した上で、あと、次々の乗数を求めて、六乗方朶演段、…、十乗方朶演段までを式図第一のように書き上げる。そして、これでほんとうによいか、という検算をやってみたのが、朶積術解の最初のところであろう。これは、$n=3$ のときにしかやっていないので、検算として見るのが適当である、と思われる。

以上のようなプロセスで、この関の方式は出来上がったのだと考える。

式図　第一[1]

原法

基数		1	0											
圭	2	1	2	0										
平	3	1	3	3	0									
立	4	1	4	6	4	0								
三乗	5	1	5	10	10	5	0							
四乗	6	1	6	15	20	15	6	0						
五乗	7	1	7	21	35	35	21	7	0					
六乗	8	1	8	28	56	70	56	28	8	0				
七乗	9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	0			
八乗	10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	0		
九乗	11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	0	
十乗	12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	0
		1項	2項	3項	4項	5項	6項	7項	8項	9項	10項	11項	12項	
		全	$\frac{1}{2}$を乗じて加える	$\frac{1}{6}$を乗じて加える	空	$\frac{1}{30}$を乗じて減ずる	空	$\frac{1}{42}$を乗じて加える	空	$\frac{1}{30}$を乗じて減ずる	空	$\frac{5}{66}$を乗じて加える	空	

各項の乗数を掛け、原法で割る。

1　この表の意味は、次の通りである。五乗のところを例にとる。

$$((((((n+\frac{1}{2}\times 7)\times n+\frac{1}{6}\times 21)\times n)\times n-\frac{1}{30}\times 35)\times n)\times n+\frac{1}{42}\times 7)\times n$$

を計算し、原法の7で割ったものが、累乗和の答えになる。
ここの原法は、式図第三に再び出る。
右端の欄は、1の上に0を重ね書きしたものである。

式図　第二

	公分母													
圭		1	1	0										
平	2	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0									
立		1	2	1	0	0								
三乗	6	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	0							
四乗	2	1	3	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0						
五乗	6	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{7}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0					
六乗	3	1	4	$\frac{14}{3}$	0	$-\frac{7}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	0				
七乗	10	1	$\frac{9}{2}$	6	0	$-\frac{21}{5}$	0	2	0	$-\frac{3}{10}$	0			
八乗	2	1	5	$\frac{15}{2}$	0	-7	0	5	0	$-\frac{3}{2}$	0	0		
九乗	6	1	$\frac{11}{2}$	$\frac{55}{6}$	0	-11	0	11	0	$-\frac{11}{2}$	0	$\frac{5}{6}$	0	
十乗	2	1	6	11	0	$-\frac{33}{2}$	0	22	0	$-\frac{33}{2}$	0	5	0	0

（垜積術解における）各項の乗数は、公分母を求め、通分することにより、
分子に得られた数である。

式図　第三

	法													
圭	2	1	1	0										
平	6	2	3	1	0									
立	4	1	2	1	0	0								
三乗	30	6	15	10	0	−1	0							
四乗	12	2	6	5	0	−1	0	0						
五乗	42	6	21	21	0	−7	0	1	0					
六乗	24	3	12	14	0	−7	0	2	0	0				
七乗	90	10	45	60	0	−42	0	20	0	−3	0			
八乗	20	2	10	15	0	−14	0	10	0	−3	0	0		
九乗	66	6	33	55	0	−66	0	66	0	−33	0	5	0	
十乗	24	2	12	22	0	−33	0	44	0	−33	0	10	0	0

この式図の中の数を各垜の法で割ったものが、係数になる。
各垜の法は、式図第一の原法と式図第二の公分母の積である。
十一乗方垜以上のものも、これまでの方法で、逐次、求めていくことができる。

衰朶

原数の図

基数 n をおき、順次 1 を加えていって、各原数をつくっていく。

また、基数の法を 1 とし、順次 1 を加えていったものを原数法とする。

級数の図

原数を順に掛け合わせていくと、各衰垜の分子の部分ができる。その最高の級（最高次の項になる）の係数と原数法を乗じたもので割ったのが、各衰垜の答えである。

		原数法	
基数		1	0
圭	2	1	1
三角	3	1	2
再乗	4	1	3
三乗	5	1	4
四乗	6	1	5
五乗	7	1	6

1	1	0					
1	3	2	0				
1	6	11	6	0			
1	10	35	50	24	0		
1	15	85	225	274	120	0	
1	21	175	735	1624	1764	720	0
n にこの項の数を乗ずる	この項の数を加えて n に乗ずる	この項の数を加えて n に乗ずる	この項の数を加えて n に乗ずる	この項の数を加えて n に乗ずる	この項の数を加えて n に乗ずる	この項の数を加えて n に乗ずる	

この表の数によって得た結果を、各垜の法で割って答を得る。

六乗衰垜以上も之に倣う。

参考文献

[1] 朱世傑、四元玉鑑 1303

[2] 関孝和、括要算法 1712

[3] Jakob Bernoulli, Ars Conjectandii 1713

[4] 明治前日本数学史、岩波書店 1956

[5] 平山諦・下平和夫・広瀬秀雄編著「関孝和全集」、大阪教育図書 1974