数理解析研究所講究録
1020巻 1997年 165-179

マックス代数によるシステム理論の基礎

大阪大学大学院基礎工学研究科　　潮　俊光 (Toshimitsu Ushio)

1 はじめに

max-plus代数は，最適制御（動的計画法）やマルコフ決定過程などで自然に現れる代数構造である [1]．離散事象システムにおいても，時間付きイベントグラフと呼ばれるペトリネットのサブクラスの記述にmax-plus代数が応用されている [2, 3]．max-plus代数で記述できる離散事象システムのクラスは理論的にはかなり限定されてはいるが，生産システム，交通システムなど，工学的応用例は多くある．離散事象システムにおいてmax-plus代数が利用される最大の理由は，記述されたシステムの方程式にある種の線形性があり，解析が比較的容易になることである．さらに，従来の線形システム理論との対応関係がある程度あることも理論的には興味深い点である．

本稿では，max-plus代数の基本的な性質を述べ，離散事象システムのmax-plus代数によるモデリングをペトリネットとの関連づけて簡単に触れる．さらに，max-plus代数を拡張した対称化max-plus代数について紹介し，それと漸近的等価性との関係について述べる．

2 max-plus代数

max-plus代数$\mathcal{R}_{max} := (\mathcal{R}_\varepsilon,\ \oplus,\ \otimes)$は以下のように定義される [3].

- $\mathcal{R}_\varepsilon := \mathcal{R} \cup \{\,\varepsilon\,\}$．但し,$\varepsilon := -\infty$である．
- $x,\ y \in \mathcal{R}_\varepsilon$ に対して

$$\begin{aligned} x \oplus y &:= \max(x,\ y) \\ x \otimes y &:= x + y \end{aligned}$$

この代数において指数は

$$x^{\otimes r} := \underbrace{x \otimes x \otimes \ldots \otimes x}_{r\text{個}} = rx$$

と定義される．但し，

$$\begin{aligned} x^{\otimes 0} &= 0 \qquad\qquad \text{for } \forall x \in \mathcal{R}_\varepsilon \\ \varepsilon^{\otimes r} &= \begin{cases} \varepsilon & r > 0 \\ 0 & r = 0 \\ \text{undefined} & r < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

である．さらに，指数rが実数に対しても容易に拡張できる．

max-plus代数には以下の性質がある．

- $\oplus$ に関する零元は $\varepsilon(= -\infty)$ である．

$$x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x, \qquad \forall x \in \mathcal{R}_\varepsilon$$

- $\otimes$ に関する単位元は 0 である．

$$x \otimes 0 = 0 \otimes x = x, \qquad \forall x \in \mathcal{R}_\varepsilon$$

- $\otimes$ に関する逆元は

$$x^{\otimes -1} = \begin{cases} -x & x \in \mathcal{R} \\ \text{undefined} & x = \varepsilon \end{cases}$$

となる．

- $x \in \mathcal{R}$に対して

$$x \oplus \hat{x} = \hat{x} \oplus x = \varepsilon$$

を満たす$\hat{x}$は存在しない．すなわち，一般に，$\oplus$ に関して逆元は存在しない．

- $\oplus$ に関してべき等(idempotent) である．

$$x \oplus x = x \qquad \forall x \in \mathcal{R}_\varepsilon$$

max-plus 代数は dioid という代数構造をもつことが知られている．一般に，$(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ が以下の条件を満足するとき，dioidであるという．

1. 加法の結合律

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

2. 加法の交換律

$$a \oplus b = b \oplus a$$

3. 乗法の結合律

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

4. 加法に関する乗法の分配律

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \otimes c &= (a \otimes c) \oplus (b \otimes c) \\ c \otimes (a \oplus b) &= (c \otimes a) \oplus (c \otimes b) \end{aligned}$$

5. 零元 ε の存在

$$a \oplus \varepsilon = a$$

6. 零元への吸収

$$a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$$

7. 単位元 e の存在

$$a \otimes e = e \otimes a = a$$

8. 加法のべき等

$$a \oplus a = a$$

max-plus 代数上の行列演算も通常の行列演算と同様に以下のように定義される.

- スカラー $\alpha \in \mathcal{R}_\varepsilon$ と行列 $A \in \mathcal{R}_\varepsilon^{m\times n}$ の積 $\alpha \otimes A$

$$(\alpha \otimes A)_{ij} := \alpha \otimes a_{ij}$$

- 行列 $A,\ B \in \mathcal{R}_\varepsilon^{m\times n}$ の和 $A \oplus B$

$$(A \oplus B)_{ij} := a_{ij} \oplus b_{ij}$$

- $A \in \mathcal{R}_\varepsilon^{m\times p}$ と $B \in \mathcal{R}_\varepsilon^{p\times n}$ の積 $A \otimes B$

$$(A \otimes B)_{ij} := \bigoplus_{k=1}^{p} a_{ik} \otimes b_{kj} \ \left(= \max_{k=1,\ \ldots,\ p} \{\ a_{ik} + b_{kj}\ \} \right)$$

以上のように行列演算を定義すると, 単位行列 $E_{n\times n}$ は対角要素が 0 で, 非対角要素が ε である行列となり, 全ての要素が ε である行列が零行列となる. また, 通常の行列と max-plus 代数上の行列とは性質が多少異なっている. 例えば, 以下の命題で示されるように, max-plus 代数上の行列の逆行列が存在するための必要十分条件は, 通常の行列の場合に比べてかなり厳しいものとなっている.

【命題1】 [3] 行列 $T \in \mathcal{R}_\varepsilon^{n\times n}$ がmax-plus 代数において可逆であるための必要十分条件は $T = D \otimes P$ と分割できることである. 但し, $D \in \mathcal{R}_\varepsilon^{n\times n}$ は対角要素のεを持たない対角行列であり, $P \in \mathcal{R}_\varepsilon^{n\times n}$ は置換行列を表す. さらに,

$$\begin{aligned} (D^{\otimes -1})_{ij} &= \begin{cases} -d_{ii} & i = j \\ \varepsilon & i \neq j \end{cases} \\ P^{\otimes -1} &= P^T \\ T^{\otimes -1} &= P^{\otimes -1} \otimes D^{\otimes -1} \end{aligned}$$

と表すことができる. 但し, P^T は転置行列を表す.

3 max-plus代数とペトリネット

ペトリネットはコンカレントシステムのモデルとして有名であり，通信システム，生産システムなど様々な分野に応用されている．ペトリネットは，その応用目的に応じて様々な拡張が提案されている．まず，基本的なペトリネットについて簡単に説明する [4]．ペトリネットは5項組 $PN = (P, T, F, M_0)$ で表される．但し， P はプレースの集合，T はトークンの集合，$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ は有向枝の集合，M_0 は初期マーキングを表す．各プレースには非負整数が割り当てられる．これをトークン数という．各プレースでのトークン数をベクトル的に表したものをマーキングという．このマーキングがシステムの状態を表す．以下，プレースpのトークン数を$M(p)$とおく．トークンの移動はトランジションの発火によって生じる．各トランジションtに対して，$(p, t) \in F$を満たすプレース$p \in P$を入力プレース，$(t, p) \in F$を満たすプレースを出力プレースという．トランジションtの入力プレース及び出力プレースの集合をそれぞれ${}^\bullet t$，$t^\bullet$と書く．トランジションtが以下の条件を満足するとき，発火可能という．

$$M(p) \geq 1 \qquad \forall p \in {}^\bullet t$$

発火可能なトランジションtが発火することにより，マーキングMはM'に変化する．但し，

$$M'(p) = \begin{cases} M(p) + 1 & p \in t^\bullet - {}^\bullet t \\ M(p) - 1 & p \in {}^\bullet t - t^\bullet \\ M(p) & \text{otherwise} \end{cases}$$

【注意】ここでは，トランジションの発火によりトークン数の変動が高々1個としているが，多重アークを認めることにより，より一般的な発火規則に拡張することができる．

ペトリネットはそのグラフ的な特徴によって様々なクラスに分類することができる．その中の一つにイベントグラフがある．イベントグラフは各プレースにおいて入力アークと出力アークが1本あるペトリネットのことである [5]．イベントグラフはグラフ的な構造がシンプルなので，その構造的特徴を利用して可到達問題などの必要十分条件が明らかにされている．また，工学的にもイベントグラフで記述できるシステムが多くあり，実用上も有用なペトリネットである．

ところで，ペトリネットでは．トランジションの発火する時刻については考慮していないが，システムの性能を評価する場合には発火時間に関する規則を導入する必要がある．トランジションの発火時間に関する規則を定めたペトリネットは時間付きペトリネットと呼ばれ，$TPN = (PN, H)$ で表される．但し，PN はペトリネットであり，$H : P \to \mathcal{R}^+$ は各プレースに対する発火時間を規定する．すなわち，あるトランジションの発火によりトークンがプレース $p \in P$ に入ったとき，そのトークンは $H(p)$ 時間経過しないと次の発火に寄与できない．時間付きペトリネット$TPN = (PN, H)$ においてPNがイベントグラフとなるとき，TPNを時間付きイベントグラフと呼ぶ．

時間付きイベントグラフで記述される離散事象システムはmax線形な差分方程式で記述できる [3]．ここでは，フレキシブル生産システムにおける基本的な問題である，入力

ステーションと出力ステーション間でパーツを運搬する台車の解析を例にとり，時間付きイベントグラフからmax線形方程式への変換について述べる[6]．ここでは図1に示すシステムを考える．図1における各トランジションの意味を表1に示す．

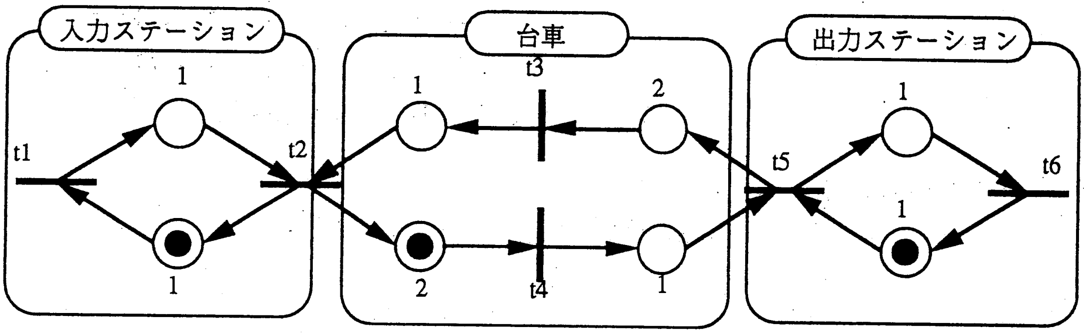

図1：例題

表1：例題におけるトランジションの意味

トランジションの番号	トランジションの意味
1	パーツが入力ステーションに搬入される
2	パーツが入力ステーションから搬出される
3	台車が入力ステーションに到着する
4	台車が出力ステーションに到着する
5	パーツが出力ステーションに搬入される
6	パーツが出力ステーションから搬出される

トランジションt_iの発火時刻をx_iと書くと，$k+1$回目のトランジションの発火時刻は次式となる．

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 1 \otimes x_2(k) \\ x_2(k+1) = 1 \otimes x_1(k+1) \oplus 1 \otimes x_3(k+1) \\ x_3(k+1) = 2 \otimes x_5(k+1) \\ x_4(k+1) = 2 \otimes x_2(k) \\ x_5(k+1) = 1 \otimes x_4(k+1) \oplus 1 \otimes x_6(k) \\ x_6(k+1) = 1 \otimes x_5(k+1) \end{cases}$$

上式を行列表現すると，

$$x(k+1) := \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \\ x_6(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \\ x_6(k+1) \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&\oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix} \\
:=\ & A_0 \otimes x(k+1) \oplus A_1 \otimes x(k)
\end{aligned}
$$

従って，次式が得られる.

$$
x(k+1) = A_0^* \otimes A_1 \otimes x(k)
$$

但し，

$$
A_0^* := \bigoplus_{k \geq 0} A_0^{\otimes k} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 3 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

以上より，このシステムは次式で表されるmax線形な方程式でモデル化されることがわかる.

$$
x(k+1) = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{bmatrix} \otimes x(k)
$$

ここで，初期値として，

$$
x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

を与えたときの $x(k)$ は以下のようになる.

$$
\underset{x(0)}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \rightarrow \underset{x(1)}{\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}} \rightarrow \underset{x(2)}{\begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 11 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}} \rightarrow \underset{x(3)}{\begin{bmatrix} 13 \\ 18 \\ 17 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{bmatrix}} \rightarrow \underset{x(4)}{\begin{bmatrix} 19 \\ 24 \\ 23 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \end{bmatrix}} \rightarrow \underset{x(5)}{\begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 29 \\ 26 \\ 27 \\ 28 \end{bmatrix}} \rightarrow \cdots
$$

ここで，

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 6 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

の関係が成り立つ．一般に，$A \in \mathcal{R}_\varepsilon^{n\times n}$ に対して

$$A \otimes v = \lambda \otimes v$$

のとき，$\lambda \in \mathcal{R}_\varepsilon$ を固有値，$v \in \mathcal{R}_\varepsilon^n$ を固有ベクトルという．固有値は通常の行列とは異なり，以下の性質がある．

【命題2】[3] 任意の正方行列は固有値を持つが，その個数は n 以下である．特に，その行列が既約ならば固有値は 1 個しかない．

4　対称化

max-plus代数における基本的問題点の一つに$\oplus$ に関して一般に逆元が存在しないという点がある．この問題点を解決するために．対称化という操作を行う [3]．まず，集合$\mathcal{P}_\varepsilon$を

$$\mathcal{P}_\varepsilon := \mathcal{R}_\varepsilon \times \mathcal{R}_\varepsilon$$

と定義し，$\mathcal{P}_\varepsilon$上の演算$\oplus$，$\otimes$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}(x_1,\ x_2) \oplus (y_1,\ y_2) &:= (x_1 \oplus y_1,\ x_2 \oplus y_2) \\ (x_1,\ x_2) \otimes (y_1,\ y_2) &:= (x_1 \otimes y_1 \oplus x_2 \otimes y_2,\ x_1 \otimes y_2 \oplus x_2 \otimes y_1)\end{aligned}$$

このとき，$\oplus$ に関して 結合律，交換律，およびべき等性が成り立ち，零元は $(\varepsilon,\ \varepsilon)$ となる．$\otimes$ に関して結合律，交換律，および加法 $\oplus$ に関する分配律が成り立ち，単位元は $(0,\ \varepsilon)$ となる．さらに，以下に示すように，$(\varepsilon,\ \varepsilon)$ は $\otimes$ に対して吸収的となる．

$$\begin{aligned}(x_1,\ x_2) \otimes (\varepsilon,\ \varepsilon) &= (x_1 \otimes \varepsilon \oplus x_2 \otimes \varepsilon,\ x_1 \otimes \varepsilon \oplus x_2 \otimes \varepsilon) \\ &= (\varepsilon \oplus \varepsilon,\ \varepsilon \oplus \varepsilon) = (\varepsilon,\ \varepsilon)\end{aligned}$$

以上より，$(\mathcal{P}_\varepsilon,\ \oplus,\ \otimes)$ は可換dioidとなることがわかる．

次に，$u = (x_1,\ x_2) \in \mathcal{P}_\varepsilon$ に対して以下の示す 1 項演算を定義する．

- u の (max) 絶対値

$$|u|_\oplus := x_1 \oplus x_2$$

- 一項演算 $\ominus$

$$\ominus u := (x_2,\ x_1)$$

$u \oplus (\ominus v)$ を $u \ominus v$ と書く．

- バランス演算

$$u^\bullet := u \oplus (\ominus u) = (|u|_\oplus,\ |u|_\oplus)$$

以下の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} u^\bullet &= (\ominus u)^\bullet = (u^\bullet)^\bullet \\ u \otimes v^\bullet &= (u \otimes v)^\bullet \\ \ominus(\ominus u) &= u \\ \ominus(u \oplus v) &= (\ominus u) \oplus (\ominus v) \\ \ominus(u \otimes v) &= (\ominus u) \otimes v \end{aligned}$$

ところで，任意の $u \neq (\varepsilon,\ \varepsilon)$ に対して

$$u \ominus u = u \oplus (\ominus u) = u^\bullet \neq (\varepsilon,\ \varepsilon)\ (= \oplus \text{ の逆元})$$

となる．この問題を解決するために，まずバランス (balance) と呼ばれる関係 ∇ を以下のように定義する．

【定義1】　$u = (u_1,\ u_2), v = (v_1,\ v_2) \in \mathcal{P}_\varepsilon$ に対して $u_1 \oplus v_2 = u_2 \oplus v_1$ のとき，$u \nabla v$ と書く．

以下の例が示すように，∇ は推移的ではない．

$$(\ (2,\ 1) \nabla (2,\ 2),\quad (2,\ 2) \nabla (1,\ 2),\quad (2,\ 1) \not\nabla (1,\ 2))$$

そこでさらに，新しい関係を定義する．

【定義2】　$\mathcal{P}_\varepsilon$ 上の関係 $\mathcal{B}$ を以下のように定義する．

$$(u_1,\ u_2)\mathcal{B}(v_1,\ v_2) \iff \begin{cases} (u_1,\ u_2) \nabla (v_1,\ v_2) & \text{if } u_1 \neq u_2 \wedge v_1 \neq v_2 \\ (u_1,\ u_2) = (v_1,\ v_2) & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき，$\mathcal{B}$ は同値関係となり，演算 $\oplus, \otimes$ と両立する．そして，以下の3種類の同値類が存在する．

$$\begin{aligned} \overline{(w,\ \varepsilon)} &= \{\ (w,\ x) \in \mathcal{P}_\varepsilon \mid x < w\ \} \\ \overline{(\varepsilon,\ w)} &= \{\ (x,\ w) \in \mathcal{P}_\varepsilon \mid x < w\ \} \\ \overline{(w,\ w)} &= \{\ (w,\ w)\ \} \end{aligned}$$

ここで，$\overline{(w,\ \varepsilon)}$, $\overline{(\varepsilon,\ w)}$, $\overline{(w,\ w)}$をそれぞれ(max)正数，(max)負数，バランス数という．さらに，$\overline{(\varepsilon,\ \varepsilon)}$ をmax零 という．

ここで，$\mathcal{S} := \mathcal{P}_\varepsilon/\mathcal{B}$とおくと，$\mathcal{S}_{max} := (\mathcal{S},\ \oplus,\ \otimes)$ を対称化 max-plus 代数という．このとき，$w \in \mathcal{R}_\varepsilon$ を $\overline{(w,\ \varepsilon)} \in \mathcal{S}$ と対応させることにより，$\mathcal{R}_\varepsilon$ は $\mathcal{S}$ のmax正とmax零のクラスからなる集合 $\mathcal{S}^\oplus$ と同一視できる．さらに，$\mathcal{S}^\ominus := \{\ \ominus w \mid w \in \mathcal{S}^\oplus\ \}$ はmax負とmax零のクラスからなる集合，$\mathcal{S}^\bullet := \{\ w^\bullet \mid w \in \mathcal{S}^\oplus\ \}$ はバランスのクラスからなる集合となり，以下の式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{S} = \mathcal{S}^\oplus \cup \mathcal{S}^\ominus \cup \mathcal{S}^\bullet \\
&\mathcal{S}^\oplus \cap \mathcal{S}^\ominus \cap \mathcal{S}^\bullet = \{\ \overline{(\varepsilon,\ \varepsilon)}\ \}\ (=\{\ \varepsilon\ \}) \\
&\varepsilon = \ominus\varepsilon = \varepsilon^\bullet
\end{aligned}
$$

集合$\mathcal{S}^\vee := \mathcal{S}^\oplus \cup \mathcal{S}^\ominus$ の要素を符号付き要素という．また，$x, y \in \mathcal{R}_\varepsilon$ に対して，

$$
x \oplus (\ominus y) = \begin{cases} x & \text{if } x > y \\ \ominus y & \text{if } x < y \\ x^\bullet & \text{if } x = y \end{cases}
$$

となる．

5 ∇ の性質

関係 ∇ の基本的な性質を以下にまとめておく [3].

- $\forall a,\ b,\ c \in \mathcal{S}$

$$a \oplus b \nabla c \quad \Longleftrightarrow \quad a \nabla c \ominus b$$

- $\forall a,\ b,\ c,\ d \in \mathcal{S}$

$$a \nabla b,\quad c \nabla d \quad \Longrightarrow \quad a \oplus c \nabla b \oplus d$$

- $\forall a,\ b,\ c \in \mathcal{S}$

$$a \nabla b \quad \Longrightarrow \quad a \otimes c \nabla b \otimes c$$

- 弱い代入：$\forall a,\ b,\ c \in \mathcal{S}$

$$x \nabla a,\quad c \otimes x \nabla b,\quad x \in \mathcal{S}^\vee \quad \Longrightarrow \quad c \otimes a \nabla b$$

- 弱推移性：$\forall a,\ b \in \mathcal{S}$

$$a \nabla x,\quad x \nabla b,\quad x \in \mathcal{S}^\vee \quad \Longrightarrow \quad a \nabla b$$

- バランス関係から等式の導出

$$x \nabla y,\quad x,\ y \in \mathcal{S}^\vee \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

線形方程式と線形バランス式の解の間には以下の関係がある.

【定理1】[3]　線形方程式

$$A \otimes x \oplus b = C \otimes x \oplus d \qquad x \in \mathcal{R}_\varepsilon^n$$

の解 x の集合とバランス式

$$(A \ominus C) \otimes x \oplus (b \ominus d) \,\nabla\, \varepsilon \qquad x \in \mathcal{S}^n$$

の max 正の解 x の集合は一致する.

線形方程式を解くときに，それをバランス式に置き換え，それを解くことにより元の線形方程式の解を求めることが可能であることを上の定理は示している．そこで，次にバランス式の解法について簡単に紹介する.

σ を置換とおく.

$$\mathrm{sgn}(\sigma) := \begin{cases} 0 & \sigma\text{が偶置換とき} \\ \ominus 0 & \sigma\text{が奇置換のとき} \end{cases}$$

行列 $A \in \mathcal{S}^{n \times n}$ の (max代数) 行列式を

$$\det A := \bigoplus_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

と定義する．バランス式に対するCramerの定理が証明されている.

【定理2】(Cramerの定理) [7]

$$A \otimes x \,\nabla\, b \qquad A \in \mathcal{S}^{n \times n}, \quad b \in \mathcal{S}^n$$

の解は，次式を満足する.

$$\det A \otimes x \,\nabla\, A^{adj} \otimes b$$

さらに,

$$\begin{array}{rcl} A^{adj} \otimes b & \in & (\mathcal{S}^{\vee})^n \\ \det A & \not\nabla & \varepsilon \end{array}$$

のとき，符号付き解は一意に存在し，次式で与えられる.

$$x = (\det A)^{\otimes -1} \otimes A^{adj} \otimes b$$

但し，A^{adj} は A の余因子行列である.

【例題1】バランス式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ \ominus 1 & 2^{\bullet} \end{bmatrix}}_{A} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\nabla\, \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b}$$

を考える．このとき，

$$\det A = -1 \otimes 2^{\bullet} \ominus 4 \otimes (\ominus 1) = 1^{\bullet} \oplus 5 = 5 \not\nabla \varepsilon$$

となり，

$$(\det A)^{\otimes -1} = -5$$

となる．さらに，

$$\begin{aligned} A^{adj} \otimes b &= \begin{bmatrix} 2^{\bullet} & \ominus 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{\bullet} \otimes 2 \oplus (\ominus 4) \otimes 1 \\ 1 \otimes 2 \oplus -1 \otimes 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4^{\bullet} \ominus 5 \\ 3 \oplus 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ominus 5 \\ 3 \end{bmatrix} \in (\mathcal{S}^{\vee})^2 \end{aligned}$$

となるので，Cramer の定理から，バランス式の解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \nabla (\det A)^{\otimes -1} \otimes A^{adj} \otimes b = \begin{bmatrix} -5 \otimes (\ominus 5) \\ -5 \otimes 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ominus 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

となる．さらに，$\det A \not\nabla \varepsilon$, かつ $A^{adj} \otimes b$ が符号付き数であることより，この方程式は一意解を持つ．

6　漸近的等価性の利用

以下の対応があることはよく知られている [3, 7].

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \lim_{s \to \infty} s^{-1}(\ln(e^{xs} + e^{ys})) \\ x \otimes y &= s^{-1} \ln(e^{xs} e^{ys}) \end{aligned}$$

上記の関係を対称化 max-plus 代数に拡張できることを述べる [8].

【定義3】　$\alpha \in \mathcal{R} \cup \{\infty\}$ と実数値関数 f, g に対して，

1. α の近傍で f と g は漸近的に等価

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

2. $\alpha \in \mathcal{R}$ のとき

$$f(x) \sim 0, \quad x \to \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \delta, \forall x \in (\alpha - \delta,\ \alpha + \delta) : f(x) = 0$$

3. $\alpha = \infty$ のとき

$$f(x) \sim 0, \quad x \to \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists K \in \mathcal{R}, \forall x > K : f(x) = 0$$

4. $A(x), B(x)$ が $m \times n$ の行列のとき

$$A(x) \sim B(x), \quad x \to \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad A(x)_{i,j} \sim B(x)_{i,j} \quad x \to \alpha$$

関数 F を次のように定義する．任意の $x \in \mathcal{R}_\varepsilon$ と実数値パラメータ s に対して

$$\begin{aligned} F(x,\ s) &= \mu e^{xs} \\ F(\ominus x,\ s) &= -\mu e^{xs} \\ F(x^\bullet,\ s) &= \nu e^{xs} \end{aligned}$$

但し，$\mu > 0, \nu \in \mathcal{R} - \{\,0\,\}$ である．

【注意】 $F(\varepsilon, s) = 0$

F の逆写像を R と書くと，

$$\begin{aligned} f(s) \sim \mu e^{xs}, \quad s \to \infty &\quad\Longrightarrow\quad R(f(\cdot)) = x \\ f(s) \sim -\mu e^{xs}, \quad s \to \infty &\quad\Longrightarrow\quad R(f(\cdot)) = \ominus x \\ f(s) \sim \nu e^{xs}, \quad s \to \infty &\quad\Longrightarrow\quad R(f(\cdot)) = x^\bullet \end{aligned}$$

ここで，e^{xs} の係数に数値を与えて逆写像を取ると，必ず符号付き数になることに注意されたい．このとき，以下の性質が成り立つ．

$$\begin{aligned} a \oplus b = c &\quad\Longrightarrow\quad F(a,\ s) + F(b,\ s) \sim F(c,\ s), \quad s \to \infty \\ a \oplus b \nabla c &\quad\Longleftarrow\quad F(a,\ s) + F(b,\ s) \sim F(c,\ s), \quad s \to \infty \\ a \otimes b = c &\quad\Longleftrightarrow\quad F(a,\ s) \times F(b,\ s) \sim F(c,\ s), \quad \forall s \in \mathcal{R} \end{aligned}$$

以上より，$(\mathcal{R}^+,\ +,\ -)$ と $(\mathcal{R}_\varepsilon,\ \oplus,\ \otimes) = \mathcal{R}_{max}$ が，$(\mathcal{R},\ +,\ -)$ と $(\mathcal{S},\ \oplus,\ \otimes) = \mathcal{S}_{max}$ がそれぞれ対応することがわかる．さらに，行列の場合には，$A \in \mathcal{S}^{n\times n}$ に対して，$\tilde{A}(\cdot) := F(A,\ \cdot)$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} F(A,\ s)_{i,j} &:= F(A_{i,j},\ s) \\ R(\tilde{A}(\cdot))_{i,j} &:= R(\tilde{A}_{i,j}(\cdot)) \end{aligned}$$

このとき，A, B, C を $\mathcal{S}$ での行列とおくと以下の性質が成り立つ．

$$\begin{aligned} A \oplus B = C &\quad\Longrightarrow\quad F(A,\ s) + F(B,\ s) \sim F(C,\ s), \quad s \to \infty \\ A \oplus B \nabla C &\quad\Longleftarrow\quad F(A,\ s) + F(B,\ s) \sim F(C,\ s), \quad s \to \infty \\ A \otimes B = C &\quad\Longrightarrow\quad F(A,\ s) \times F(B,\ s) \sim F(C,\ s), \quad s \to \infty \\ A \otimes B \nabla C &\quad\Longleftarrow\quad F(A,\ s) \times F(B,\ s) \sim F(C,\ s), \quad s \to \infty \end{aligned}$$

【例題2】直接的に計算すると次式が得られる．

$$\begin{bmatrix} 2^\bullet & \varepsilon \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \ominus(-1) & \varepsilon \\ -3 & \ominus 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^\bullet & \varepsilon \\ (-2)^\bullet & \ominus 2 \end{bmatrix}$$

上式の左辺を漸近表現して計算すると，

$$\begin{bmatrix} \nu_1 e^{2s} & 0 \\ \mu_1 e^{-s} & \mu_2 e^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mu_3 e^{-s} & 0 \\ \mu_4 e^{-3s} & -\mu_5 e^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu_1\mu_3 e^s & 0 \\ (\mu_2\mu_4 - \mu_1\mu_3)e^{-2s} & -\mu_2\mu_5 e^{2s} \end{bmatrix}$$

となる．ここで，パラメータを変えると以下のようになる．

- $\nu_2 := -\nu_1\mu_3$, $\nu_3 := \mu_2\mu_4 - \mu_1\mu_3$, $\mu_6 := \mu_2\mu_5$ とおく．

$$\begin{bmatrix} \nu_2 e^s & 0 \\ \nu_3 e^{-2s} & -\mu_6 e^s \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1^\bullet & \varepsilon \\ (-2)^\bullet & \ominus 2 \end{bmatrix}$$

- $\nu_1 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 1$ とおく．

$$\begin{bmatrix} -e^s & 0 \\ 0 & -e^{2s} \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \ominus 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \ominus 2 \end{bmatrix} \left(\nabla \begin{bmatrix} 1^\bullet & \varepsilon \\ (-2)^\bullet & \ominus 2 \end{bmatrix} \right)$$

- $\nu_1 = -1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, $\mu_4 = \mu_5 = 2$ とおく．

$$\begin{bmatrix} e^s & 0 \\ e^{-2s} & -2e^{2s} \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ -2 & \ominus 2 \end{bmatrix} \left(\nabla \begin{bmatrix} 1^\bullet & \varepsilon \\ (-2)^\bullet & \ominus 2 \end{bmatrix} \right)$$

以上より，パラメータの与え方に依存して得られる行列は異なるが，いずれもバランス関係が成り立っていることがわかる．

最後に，漸近等価性を利用した線形代数方程式の解法アルゴリズムを以下に示す．

1. 代数方程式

   $$A \otimes x = c$$

   に対して，

   $$\tilde{A}(s)\tilde{x}(s) = \tilde{c}(s)$$

   を考える．

2. $\tilde{x}(s) = \tilde{A}^{-1}(s)\tilde{c}(s)$ を計算する．

3. $\hat{x} = R(\tilde{x}(s))$ を計算する．このとき，

   $$A \otimes \hat{x} \mathbin{\nabla} c$$

   が成り立つ．

4. もし符号付きの一意解を持つならば

$$A \otimes \hat{x} = c$$

となる．

【例題3】 例題1で考察したバランス式に対応する方程式

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ \ominus 1 & 2^{\bullet} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を考える．この式に対して，

$$\begin{bmatrix} \mu_1 e^{-s} & \mu_2 e^{4s} \\ -\mu_3 e^{s} & \nu e^{2s} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \tilde{x}(s) \\ \tilde{y}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_4 e^{2s} \\ \mu_5 e^{s} \end{bmatrix}$$

の解を求めると，

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(s) \\ \tilde{y}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_1 \nu e^{s} + \mu_2 \mu_3 e^{5s}} \begin{bmatrix} \mu_4 \nu e^{4s} - \mu_2 \mu_5 e^{5s} \\ \mu_3 \mu_4 e^{3s} - \mu_1 \mu_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_5/\mu_3 e^{0s} + \ldots \\ \mu_4/\mu_2 e^{-2s} + \ldots \end{bmatrix}$$

となり，次式が得られる．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} \ominus 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

7 あとがき

ここでは，max-plus代数の基本的な性質を紹介し，以下の関係があることを述べた．

従来の代数	max-plus 代数
$+$	$\oplus$
$\times$	$\otimes$
0	$\varepsilon(:= -\infty)$
1	0

従来の代数	対称化max-plus 代数
$-$	$\ominus$
$=$	∇
0	$a^{\bullet}\ (a \in \mathcal{R}_{\varepsilon})$

max-plus代数は離散事象システムのモデルとして，しばしば用いられているが，適用できる範囲が時間付きイベントグラフでモデル化されるシステムに限定されいている．より広いクラスのペトリネットへの拡張の研究も行われれている [9]．また，離散事象システムにおける制御問題は近年急速に進歩したが [10, 11]，max-plus代数で記述されるシステムにおける制御問題についても検討されている [12, 13]．また，max-plus代数の代数的特徴はべき等解析とも関連している [14]．

参考文献

[1] S. Gaubert and Max Plus, "Methods and Applications of (max,+)Linear Algebra," STACKS97, Lecture Notes in Computer Science Vol. 1200, pp. 261–282, 1997.

[2] G. Cohen, D. Dubois, J. P. Quadrat, and M. Viot, "A Linear-System-Theoretic View of Discrete-Event Processes and Its Use for Perforamce Evaluation in Manufacturing," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-30, no. 3, pp. 210–220, 1985.

[3] F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, and J.-P. Quadrat, Synchronization and Linearity, John Wiley & Son, 1992.

[4] J. L. Peterson, Petri Net Theory and the Modeling of Systems, Prentice-Hall, 1981.

[5] G. Cohen, P. Moller, J.-P. Quadrat, and M. Viot, "Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems," *Proc. IEEE*, vol. 77, no. 1, pp. 39–58, 1989.

[6] 松浦，Max-Plus代数による生産システムのモデル化と解析，大阪大学工学部電子工学科平成 7 年度卒業論文，1996.

[7] G. J. Olsder and C. Roos, "Cramer and Cayley-Hamilton in the Max Algebra," *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 101, pp. 87–108, 1988.

[8] B. D. Schutter and B. D. Moor, "The Singular-Value Decomposition in the Extended Max Algebra," *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 250, pp. 143–176, 1997.

[9] F. Baccelli, S. Foss, and B. Gaujal, "Free-Choice Petri Nets– An Algebraic Approach," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 41, no. 12, pp. 1751–1778, 1996.

[10] P. J. Ramadge and W. M. Wonham, "Supervisory Control of a Class of Discrete Event Systems," *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 25, no. 3, pp. 637–659, 1987.

[11] 潮，"離散事象システムにおける制御問題とスーパバイザ," システム／制御／情報，vol. 34, no. 9, pp. 531–538, 1990.

[12] D. D. Cofer and V. K. Garg, "Supervisory Control of Real-Time Discrete-Event Systems Using Lattice Theory," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 41, no. 2, pp. 199–209, 1996.

[13] S. Takai, "A Characterization of Realizable Behavior in Supervisory Control of Timed Event Graphs," *Automatica*, vol. 33, no. 11, 1997.

[14] V. P. Maslov and S. N. Samborskii, Idempotent Analysis, Advances in Soviet Mathematics, vol. 13, 1992.