

## INVARIANT TRACE FIELD と通約可能性

吉田 はん (HAN YOSHIDA)

Department of Mathematics  
Nara Women's University

### 1. 序

二つの体積が有限な双曲的多様体が共通の有限被覆を持つ時, 通約可能であるという. 二つの体積が有限な双曲的多様体が通約可能ならば, invariant trace field が一致することが知られている [R]. この命題の逆は一般には成立しない. 例えば  $5_2$  結び目の補空間と  $(-2, 3, 7)$  プレッツェル結び目の補空間の invariant trace field は共に  $\mathbb{Q}(\theta)$  ここで  $\theta^3 - \theta^2 + 2\theta + 1 = 0$  であるが, 通約可能でないことが示されている. [H-M-W]

一方 Thurston は [T chapter 6] の中で下記の定理を示している.

**定理 1.** 同じ理想的四面体の集合に分解できる双曲的多様体の対で, 互いに通約可能でないものが無限個存在する.

Neumann と Reid は特にカスプつきの双曲的多様体  $M$  の invariant trace field に幾何学的意味を与えた [N-R]. これは  $M$  の invariant trace field が,  $M$  の理想的四面体分割から計算されるパラメーターによって生成される体と一致するというものである. よって理想的四面体を理想的四面体に細分することで, 先の Thurston の定理から次のことが言える.

**系 2.** 双曲的多様体の対で invariant trace field は同じであるが, 互いに通約可能でないものが無限個存在する.

ここでは同じ理想的四面体の集合に分解できる双曲的多様体で, 互いに通約可能でないものが任意有限個存在することを示す. 故に次の結果が言える.

**定理 3.** invariant trace field が同じであるが, 互いに通約可能でないものが任意有限個存在する.

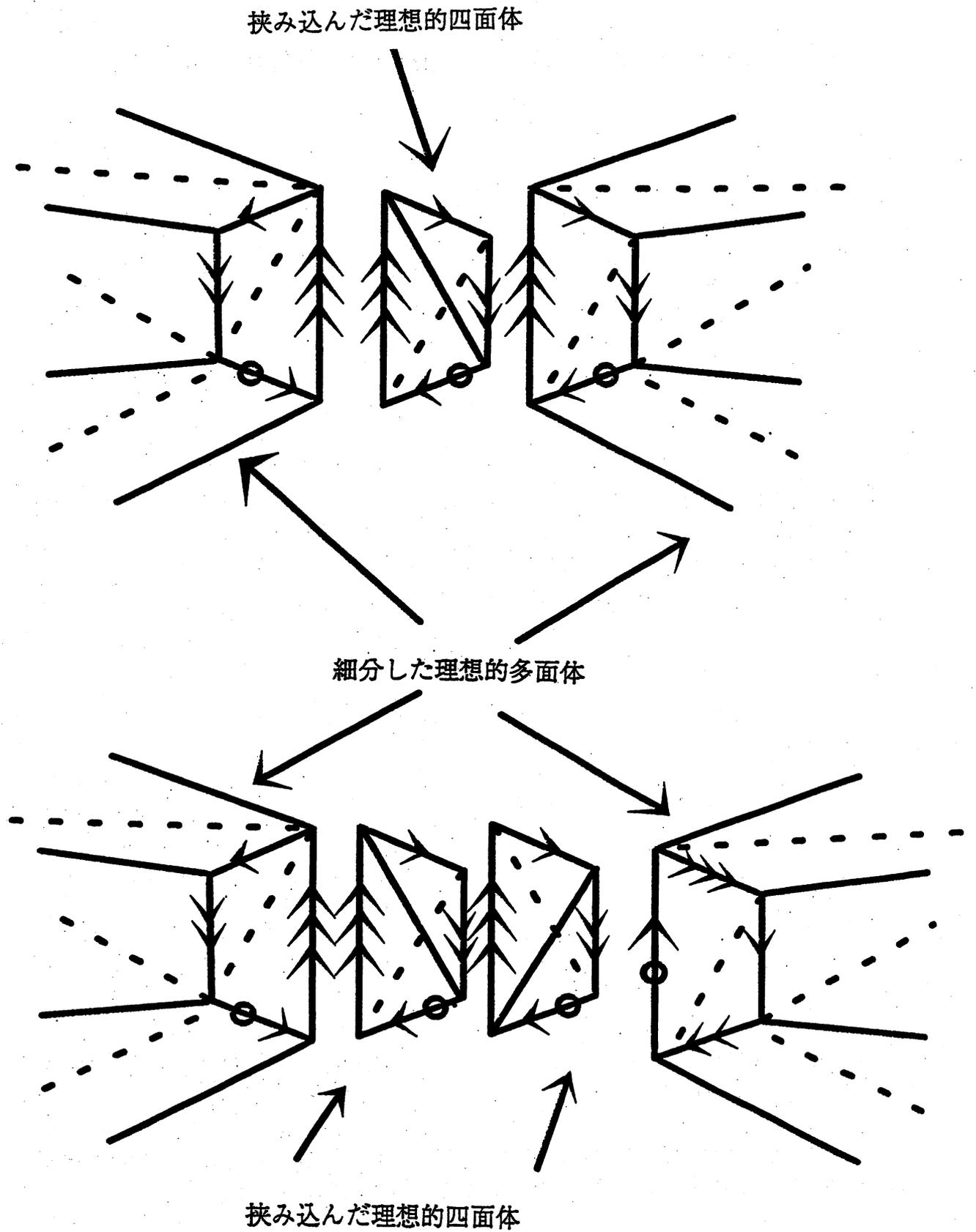


Figure 1

## 2. 準備

$\Gamma$  を Kleinian group,  $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ ,  $\Gamma^{(2)}$  を  $\{\gamma^2 : \gamma \in \Gamma\}$  で生成される  $\Gamma$  の部分群とする.  $k(M) = \mathbb{Q}(\text{tr } \gamma : \gamma \in \Gamma^{(2)})$  とし,  $k(M)$  を  $M$  の *invariant trace field* と呼ぶ.

命題 4. カスプつき双曲的多様体  $M_1$  と  $M_2$  が同じ理想的多面体の集合に分解できるならば *invariant trace field* が同じである.

証明.  $M_1$  の理想的多面体分割は次のようにして得られる. まず理想的多面体のある頂点から垂をとり, 理想的多面体に細分する. 多面体の細分から誘導される面上の三角形分割を考える. 一般には 2 つの理想的多面体の共通の面上での三角形分割は一致するとは限らない. そこで, このようなことが起これば三角形分割が一致するように, 退化した理想的多面体を挟み込めばよい. このようにして得られる理想的多面体分割を

$$M_1 = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_l$$

とかく. ここで各々  $S_j$  は  $\mathbb{H}^3$  での理想的多面体とする.  $z_j$  を  $S_j$  の頂点の非調和比とする. Neumann と Reid の定理 2.4[N-R] より

$$k(M_1) = \mathbb{Q}(z_j : j = 1, \dots, l).$$

$M_2$  を構成する時と  $M_1$  を構成する時の面の同一視の仕方は  $M_1$  と違うので,  $S_1, \dots, S_l$  を張り合わせても  $M_2$  は構成できないかもしれない. このようなとき, さらに退化した理想的多面体  $S_{l+1}, \dots, S_k$  を挟み込むことによって,  $M_2$  は  $S_1, \dots, S_k$  を張り合わせて出来る. よって

$$k(M_2) = \mathbb{Q}(z_j : j = 1, \dots, k).$$

故に

$$k(M_1) \subset k(M_2).$$

$M_1$  と  $M_2$  の立場を取り替えることによって

$$k(M_1) \supset k(M_2).$$

命題 4 の証明終り.

$M = \mathbb{H}^3/\Gamma$  を カスプ付き双曲的多様体,  $C$  を  $M$  のカスプとする. 適当に共役をとり  $C$  に対応する可換群を  $J = \langle \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$  ( $\text{Im } u/v > 0$ )  $\subset \Gamma$  とする.  $\alpha = u/v$  を  $C$  の cusp parameter とする.  $\tilde{M} = \mathbb{H}^3/\tilde{\Gamma}$  ( $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ ) を  $M$  の有限被覆とし,  $\tilde{C}$  を  $\tilde{J} = \tilde{\Gamma} \cap J$  に対応する  $C$  のリフトとする. 生成元のとり方を適当に変えればある正の整数  $p, q$  が存在し,  $\tilde{J} = \langle \begin{pmatrix} 1 & pu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & qv \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$  と書ける. よって  $\tilde{\alpha}$  を  $\tilde{C}$  の cusp parameter とすると,  $\tilde{\alpha} = \frac{p}{q}\alpha$ . 定義より次の命題が言える.

命題 5.  $M$  をカスプ付きの双曲的多様体,  $C_1, \dots, C_k$  を  $M$  のカスプとする.  $\alpha_i$  を  $C_i (i = 1, \dots, k)$  の cusp parameter とする.  $PGL_2(\mathbb{Q})$  の作用による  $M$  の cusp parameters の集合  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  の同値類は通約可能類不変量である.

3. THURSTON による CHAIN LINK の補空間の理想的多面体分割

$C_k$  を Figure 2 のような  $2k$  成分の chain link とする ( $k \geq 3$ ).

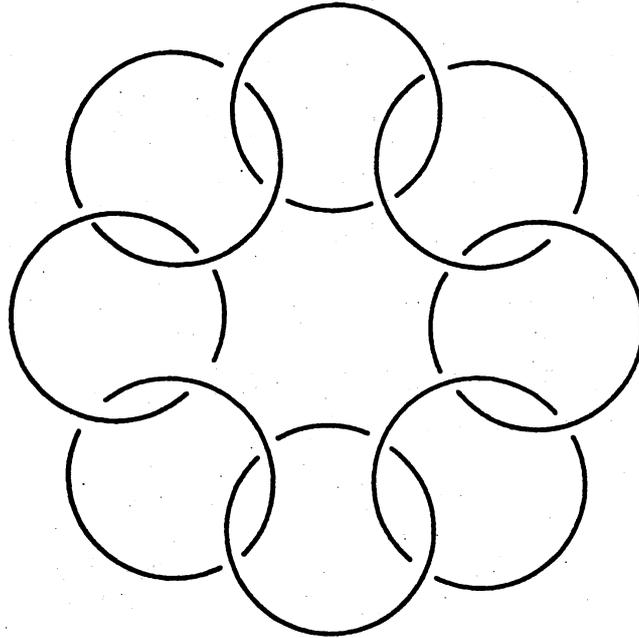


Figure 2

$P_k$  を Figure 3 のような理想的多面体とする. この理想的多面体の面角はすべて  $\pi/2$  で四角形はすべて regular とする.

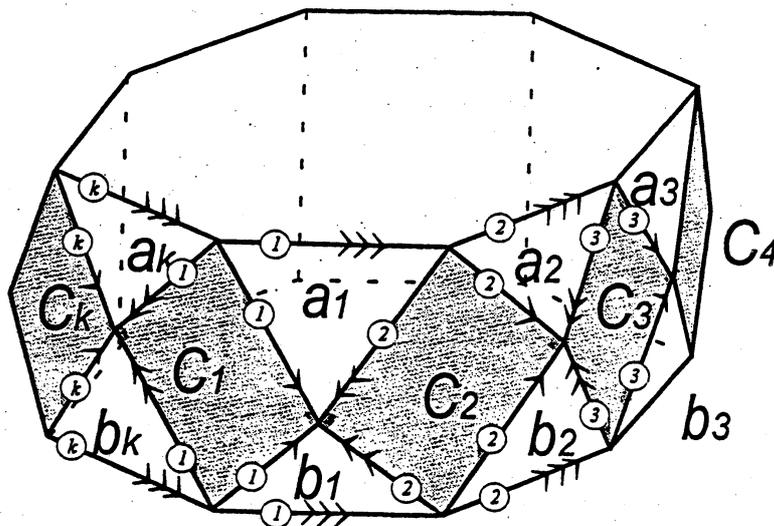


Figure 3

[T Chapter 6] で, Thurston は  $S^3 \setminus C_k$  が  $P_k$  の 2 つの copies を張り合わせて出来ることを示している. Figure 3. のように面に名前をつける. まず, 矢印の向きが

合うように  $P_k$  の三角形  $a_i$  を  $P_k$  の三角形  $b_i$  に張り合わせる。このとき、 $B^3$  から曲線と境界上の円を取り除いたものが2個得られる。これらを境界で同一視することで位相的に  $S^3 \setminus C_k$  が得られることがわかる。

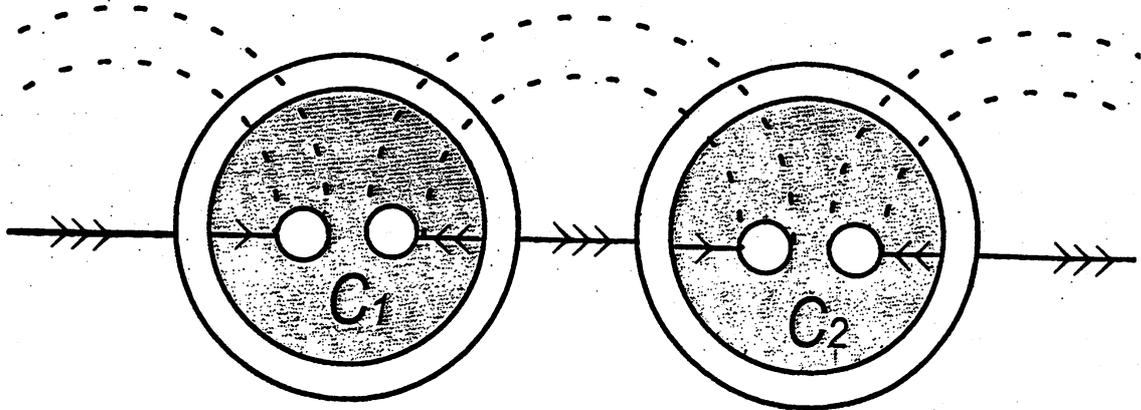


Figure 4

さらに辺の回りの角度が  $2\pi$  であることより、この2個の理想的多面体の張り合わせによって、双曲構造が与えられることがわかる。完備であることは、各頂点の horospherical section を張り合わせたものが Euclid 構造を与えることを確かめればよい。そのために以下、頂点の horospherical section を調べる。

理想的多面体  $P_k$  を Poincaré モデル内に描くと Figure 5 のようになる。  $e$  と  $v$  を Figure 5 のような  $P_k$  の頂点とする。

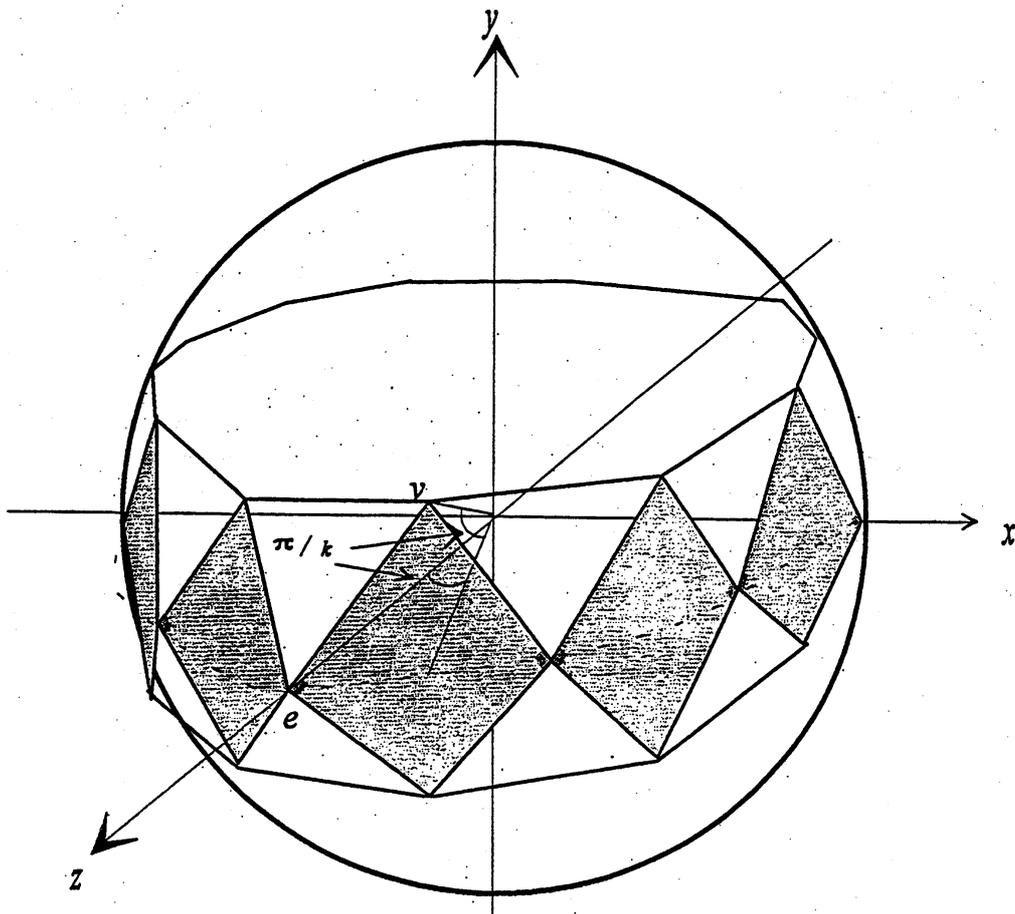


Figure 5

まず頂点  $e$  の horospherical section を調べる.  $\hat{i}$  を Poincaré モデル  $\mathbb{B}^3$  から上半空間モデル  $\mathbb{H}^3$  への次のように定義される写像とする.

$$\hat{i}: \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3; x \mapsto 2 \frac{x - e}{\|x - e\|} + e.$$

ここで  $\|\cdot\|$  は  $\mathbb{R}^3$  上の Euclid ノルムとする.  $\hat{i}(e) = \infty$  であり, 頂点  $v$  の座標が  $(\cos \frac{\pi}{k} \sin \frac{\pi}{k}, \sin \frac{\pi}{k}, \cos^2 \frac{\pi}{k})$  なので  $\hat{i}(v) = (\cot \frac{\pi}{k}, \sin \frac{\pi}{k}, 0)$  となる. よって  $e$  の horospherical section は Figure 6(a) のようになる. 同様にすれば  $v$  の horospherical section は Figure 6(b) のようになる.

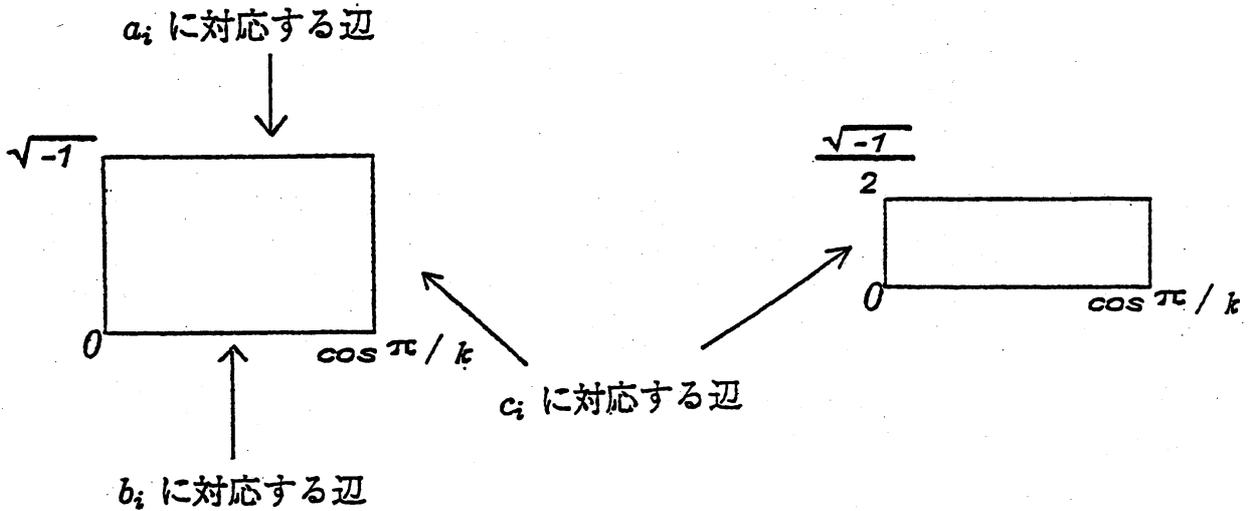


Figure 6(a)

Figure 6(b)

Figure 6

よって各頂点の horospherical section を張り合わせたものが Euclid 構造を与え,  $S^3 \setminus C_k$  の cusp parameters は  $\frac{\sqrt{-1}}{2 \cos \pi / k}$ .

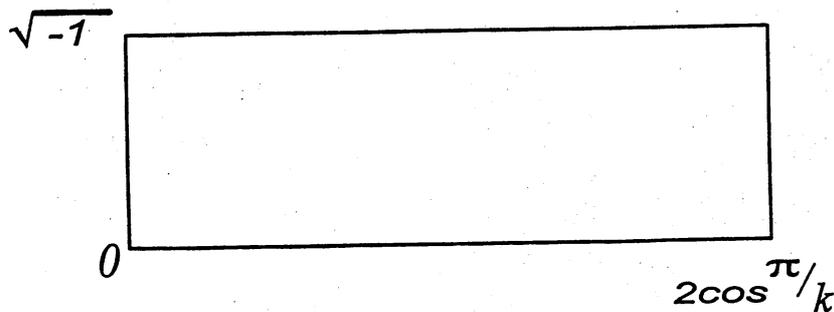


Figure 7

4. 定理 1 の証明

$n$  を十分大きい整数とする. 以下, invariant trace field が同じ  $n-1$  個の双曲的多様体を構成する.  $S^3 \setminus C_n$  と  $S^3 \setminus C_3$  を理想的多面体  $P_n$  と  $P_3$  の四角形に対応する twice punctured discs で切る. Figure 8 の絡み目の補空間になるように, この twice punctured discs の copies をもう一度張り合わせる.

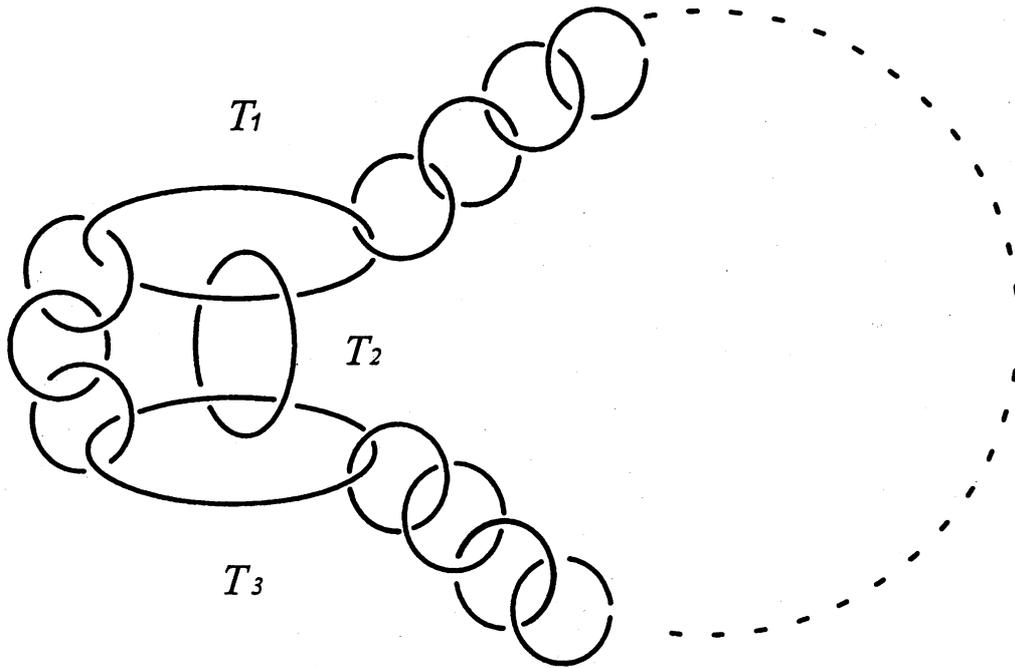


Figure 8

$M_1$  をこのようにして出来る双曲的多様体とする. よって  $M_1$  は  $P_3$  の copy の理想的多面体  $P_3^1, P_3^2$ , と  $P_n$  の copy の理想的多面体  $P_n^1, P_n^2$  を張り合わせて出来る.  $M_1$  のカスプの cusp parameter を計算する. Figure 8 のようにカスプを  $T_1, T_2, T_3$  とおく.  $T_1$  と  $T_3$  の cusp parameter は  $\sqrt{-1}(1 + 2 \cos \pi/n)$ ,  $T_2$  の cusp parameter は  $\sqrt{-1}(1 + \frac{1}{2 \cos \pi/n})$ .

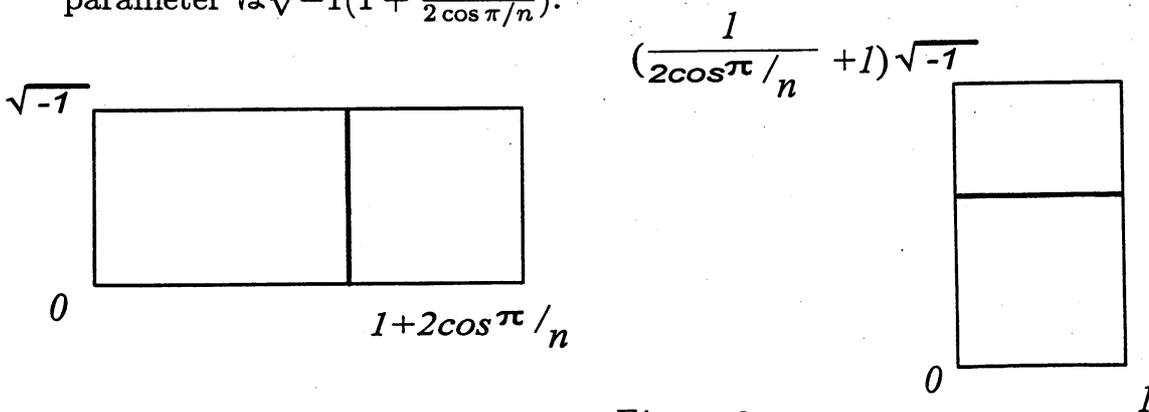


Figure 9

他のカスプの cusp parameters については  $P_3$  または  $P_n$  の cusp parameters

に対応するものと同じなので,  $M_1$  のカスプの cusp parameter の集合は

$$\{2\sqrt{-1} \cos \pi/n, \sqrt{-1}, \sqrt{-1}(1 + 2 \cos \pi/n), \sqrt{-1}(1 + \frac{1}{2 \cos \pi/n})\}.$$

理想的多面体  $P_n^1$  と  $P_n^2$  の四角形  $c_2$  に対応する twice punctured disc で  $M_1$  を切り,  $\pi$  回転し, 再び張り合わす. このようにして出来た双曲的 3 次元多様体を  $M_2$  とする.  $c_3, \dots, c_j$  に対応する twice punctured disc に対して同様のことを行なう.

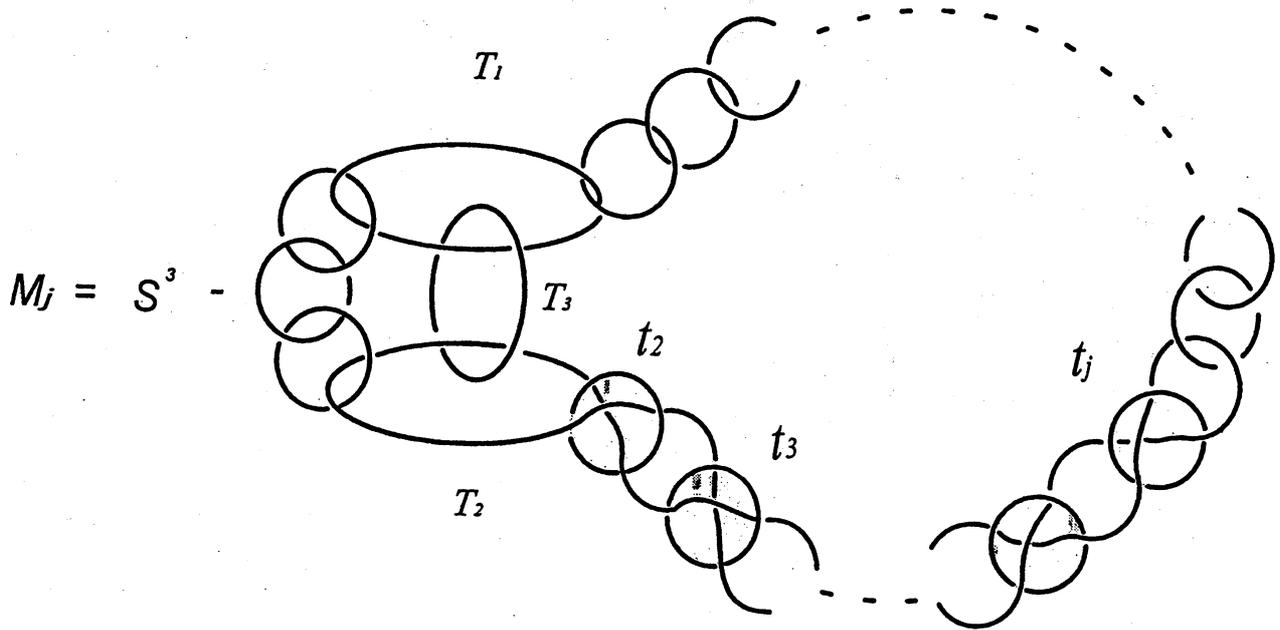


Figure 10

このようにして出来る双曲的多様体を  $M_j$  ( $j = 2, \dots, n-1$ ) とする. Figure 10 のカスプ  $t_2, \dots, t_j$  の Euclid 構造は Figure 11 の平行四辺形の辺を張り合わせることで得られる. Figure 10 のようにカスプを  $T_3$  とおく.

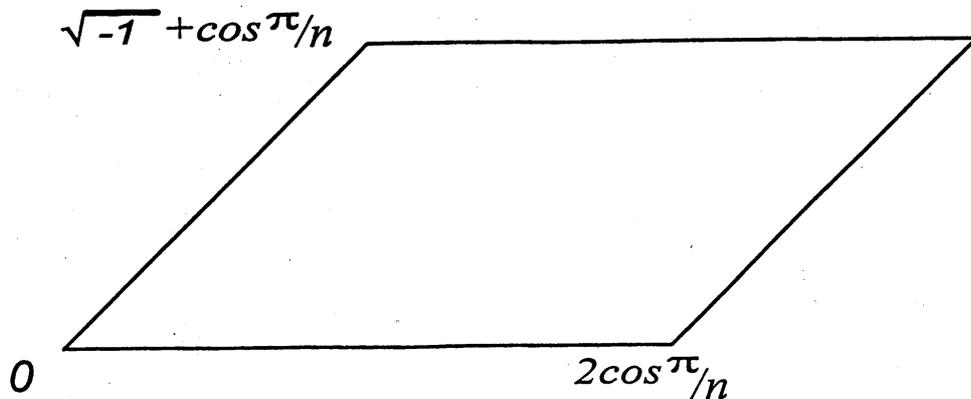


Figure 11

$T_3$  の Euclid 構造は Figure 12 の長方形の辺を張り合わせることで得られる.

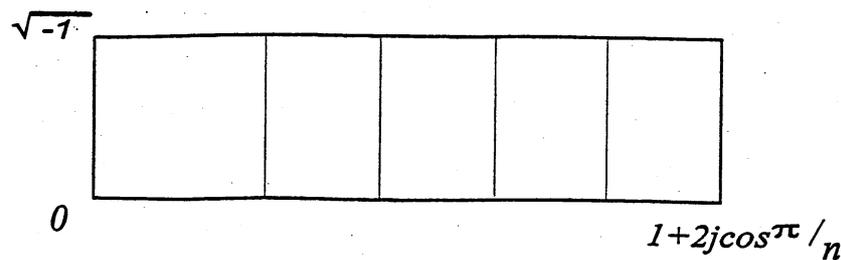


Figure 12

$M_j$  も理想的多面体  $P_3^1, P_3^2, P_n^1, P_n^2$  を張り合わせて出来る.  $M_j$  のカスプの cusp parameter の集合は

$$\left\{ 2\sqrt{-1} \cos \pi/n, \sqrt{-1}, \sqrt{-1}(1 + 2 \cos \pi/n), \sqrt{-1}\left(1 + \frac{1}{2 \cos \pi/n}\right), \right. \\ \left. \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{-1} \frac{1}{\cos \pi/n}\right), \sqrt{-1}(1 + 2j \cos \pi/n) \right\}.$$

命題 4 より  $M_1, \dots, M_{n-1}$  の invariant trace field は同じである. 命題 5 より定理 3 を証明するためには  $j \neq k$  に対して,  $M_j$  と  $M_k$  の cusp parameters の集合が異なることを示せばよい. 以下  $j \geq 2$  に対して,  $\sqrt{-1}(1 + 2j \cos \pi/n)$  が  $M_k$  の cusp parameter にならないことを示す. すなわち次のことを示せばよい.

$$\begin{aligned} \sqrt{-1}(1 + 2j \cos \pi/n) &\not\sim 2\sqrt{-1} \cos \pi/n, \\ \sqrt{-1}(1 + 2j \cos \pi/n) &\not\sim \sqrt{-1}, \\ \sqrt{-1}(1 + 2j \cos \pi/n) &\not\sim \sqrt{-1}\left(1 + \frac{1}{2 \cos \pi/n}\right), \\ \sqrt{-1}(1 + 2j \cos \pi/n) &\not\sim \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{-1} \frac{1}{\cos \pi/n}\right) \text{ かつ} \\ \sqrt{-1}(1 + 2j \cos \pi/n) &\not\sim \sqrt{-1}(1 + 2k \cos \pi/n) \end{aligned}$$

ここで  $\alpha \sim \beta$  とはある  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{Q})$  が存在して  $\alpha = \frac{a\beta+b}{c\beta+d}$  となることを言う.

ここでは  $\sqrt{-1}(1 + 2j \cos \pi/n) \not\sim 2\sqrt{-1} \cos \pi/n$  だけを示す. 他の時も同様に示すことができる. もし  $\sqrt{-1}(1 + 2j \cos \pi/n) \sim 2\sqrt{-1} \cos \pi/n$  ならば,  $ad - bc \neq 0$  である  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$  が存在してかつ

$$\frac{2a\sqrt{-1} \cos \pi/n + b}{2c\sqrt{-1} \cos \pi/n + d} = \sqrt{-1}(1 + 2j \cos \pi/n).$$

よって

$$4cj \cos^2 n/\pi + (2a\sqrt{-1} + 2c - 2dj\sqrt{-1}) \cos \pi/n + b - d\sqrt{-1} = 0.$$

これは

$$[\mathbb{Q}(\cos \pi/n, \sqrt{-1}) : \mathbb{Q}(\sqrt{-1})] \leq 2$$

または

$$4cj = 2a\sqrt{-1} + 2c - 2dj\sqrt{-1} = b - d\sqrt{-1} = 0$$

ということになる。したがって

$$[\mathbb{Q}(\cos \pi/n, \sqrt{-1}) : \mathbb{Q}(\sqrt{-1})] \leq 2 \quad \text{または} \quad a = b = c = d = 0.$$

ところが  $\varphi$  を Euler 関数 とすると,  $[\mathbb{Q}(\cos \pi/n) : \mathbb{Q}]$  は  $n$  が偶数か奇数かによって  $\varphi(n)$  または  $\varphi(n)/2$  である。これは  $n$  のとり方に矛盾する。よって

$$\sqrt{-1}(1 + 2j\cos \pi/n) \not\sim 2\sqrt{-1} \cos \pi/n.$$

定理 3 の証明終り.

#### REFERENCES

- [H-M-W] C. D. Hodgson, G. D. Meyerhoff, J. R. Weeks, *Surgeries on the Whitehead link yield geometrically similar manifolds*, O.S.U.Math.Research Inst. Topology '90 Proceedings of the Research Semester in Low Dimensional Topology at Ohio State Univ. (de Gruyter Berlin) (1991).
- [N-R] W. Neumann, A. Reid, *Arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, O.S.U.Math.Research Inst. Topology '90 Proceedings of the Research Semester in Low Dimensional Topology at Ohio State Univ. (de Gruyter Berlin) (1991).
- [R] A. Reid, *A note on trace-fields of Kleinian groups*, Bull.London Math.Soc. **22** (1990), 349-352.
- [T] W. P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Mimeographed lecture notes Princeton Univ. (1977).
- [Y] H. Yoshida, *Invariant trace fields and commensurability of hyperbolic 3-manifolds*, Proceedings of Knots 96 (1997).

Department of Mathematics, Nara Women's University, Kita-uoya-Nishimachi, Nara, 630  
Japan

*E-mail adress:* han@ics.nara-wu.ac.jp