数理解析研究所講究録
1022巻 1997年 27-34

コンパクトリーマン面の自己同型群の表現について

愛知産業大学造形学部　木村　秀幸（Hideyuki Kimura）

Xを種数$g(\geq 2)$のコンパクトリーマン面、$\mathrm{Aut}(X)$をX上の双正則写像全体の作る群、AGを$\mathrm{Aut}(X)$の部分群とする。さらに$\rho:\mathrm{Aut}(X)\to GL(g,\mathbf{C})$を$X$上の正則1形式の空間$\Omega$を表現空間とする$\mathrm{Aut}(X)$の表現とする、つまり$\mathrm{Aut}(X)$の元$\sigma$に対して$\Omega$の元$\varphi$を$\varphi\circ\sigma$にうつす$\Omega$の線形変換を対応させる写像。そして$AG$の$\rho$による像を$\rho(AG:X)$で表わす。このとき次の問題を考える：

<u>問題</u>　$\rho(AG:X)$と$GL(g,\mathbf{C})$-共役となる有限群$G\subset GL(g,\mathbf{C})$を特徴付けよ。

この条件を満たすとき、有限群$G\subset GL(g,\mathbf{C})$は種数$g$のコンパクトリーマン面から生ずるという。

Gがコンパクトリーマン面から生ずるための必要条件としてCY条件、RH条件という2つの条件が知られている。それらを定義するために次の記号を導入する：

有限群GおよびGの部分群Hに対して

$$CY(G)=\{K \mid K: non\text{-}trivial\ cyclic\ subgroup\ of\ G\}$$

$$CY(G:H)=\{K\in CY(G) \mid K\supset H\ and\ K\neq H\}$$

とおく。このときCY条件を次のように定義する：

<u>CY条件</u>　有限群$G\subset GL(g,\mathbf{C})$がCY条件を満足するとは$CY(G)$の任意の元が種数$g$のコンパクトリーマン面から生ずることをいう。

次にRH条件を定義するために以下のような量を導入する：

<u>定義</u>　有限群$G\subset GL(g,\mathbf{C})$の任意の元$a$に対して$\mathrm{Tr}a+\mathrm{Tr}a^{-1}\in\mathbf{Z}$が成り立つと仮定する。このとき$H\in CY(G)$に対して次のように定める：

$$g_0(G)=\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\mathrm{Tr}a$$

$$r(H)=2-\left(\mathrm{Tr}a+\mathrm{Tr}a^{-1}\right)\quad \text{ただし}\ H=\langle a\rangle$$

$$r_*(H:G)=r(H)-\sum_{K\in CY(G:H)} r_*(K:G)$$

$$l(H:G)=\frac{r_*(H:G)}{\left[N_G(H):H\right]}$$

ただし$N_G(H)$はHの正規化群。

このときRH条件を次のように定義する：

RH条件　有限群$G\subset GL(g,\mathbf{C})$がRH条件を満たすとは$G$の任意の元$a$に対して$\mathrm{Tr}a+\mathrm{Tr}a^{-1}\in\mathbf{Z}$が成り立ち、さらに$CY(G)$の任意の元$H$に対して$l(H:G)\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$が成り立つことをいう。ただし$\mathbf{Z}_{\geq 0}$は非負の整数の集合。

注意　$r(H)$はGがコンパクト リーマン面から生ずる場合に巡回部分群Hが固定する点の個数を表わす量。

そしてRH条件を満たす群Gに対してRHデータを次のように定義する：

RHデータ

$$RH(G)=\left[g_0(G);|H_1|,\ldots,|H_1|,\ldots,|H_s|,\ldots,|H_s|\right]$$

ただし$\{H_1,\ldots,H_s\}$は$CY(G)$のG-共役類の完全代表系、$|H_i|$はH_iの位数、そして$RH(G)$の中に$|H_i|$は$l(H_i:G)$個現われる。

このCY、RHの２条件はGがコンパクト リーマン面から生ずるための十分条件ではない、それを示すのが次の例１である：

例１　$GL(5,\mathbf{C})$の位数８の部分群

$$Q=\left\langle \begin{pmatrix}1&&&&\\&i&&&\\&&i&&\\&&&-i&\\&&&&-i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&&&&\\&&&&i\\&&&i&\\&&i&&\\&i&&&\end{pmatrix}\right\rangle \quad RH(Q)=[1;2,2]$$

はCY、RHの２条件を満足するが, 種数５のコンパクト リーマン面から生じない。

<u>理由</u>　一般に、有限群$G\subset GL(g,\mathbf{C})$が種数$g$のコンパクト リーマン面から生ずるときkernelがtorsion freeとなる全射準同型写像$\varphi:\Gamma\to G$が存在する、ただしΓはGのRHデータを符号に持つFuchs群。また$\varphi:\Gamma\to G$のkernelがtorsion freeであることとφがΓの位数有限の生成元の位数を保つこととが同値であることが知られている。これらのことから、Qが種数５のコンパクト リーマン面から生ずるためには符号$[1;2,2]$を持つFuchs群ΓからQへの全射準同型写像でΓの位数有限の生成元の位数を保つものが存在しなければならないがQの群構造（Qは四元数群と同型）を考慮するとそのような準同型写像は存在しない。

例１から$GL(g,\mathbf{C})$の有限部分群Gに対しそのRHデータを符号に持つFuchs群からの全射準同型写像でkernelがtorsion freeとなるものが存在すれば常にGがコンパクト リーマン面から生じると思われるが、実はそうとは限らない。これに関して次の例がある。

<u>例２</u>　$GL(5,\mathbf{C})$の位数８の部分群

$$D=\left\langle \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & i & & & \\ & & i & & \\ & & & -i & \\ & & & & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \end{pmatrix} \right\rangle \quad RH(D)=[1;2,2]$$

は CY、RHの２条件を満足し、さらに全射準同型写像$\varphi:\Gamma\to D$ でkernel が torsion free となるものが存在する、ただしΓは符号$[1;2,2]$を持つFuchs群。 しかしD は種数５のコンパクト リーマン面から生じない。

<u>理由</u>　$\Gamma=\langle \alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2 \mid [\alpha,\beta]\gamma_1\gamma_2=\gamma_1^2=\gamma_2^2=1\rangle$とおき、$\varphi:\Gamma\to D$を次のように定義する：

$$\varphi(\alpha)=\begin{pmatrix}1&&&&\\&i&&&\\&&i&&\\&&&-i&\\&&&&-i\end{pmatrix}、\varphi(\beta)=\begin{pmatrix}1&&&&\\&&&&1\\&&&1&\\&&1&&\\&1&&&\end{pmatrix}、$$

$$\varphi(\gamma_1)=\begin{pmatrix}1&&&&\\&&&&-i\\&&&-i&\\&&i&&\\&i&&&\end{pmatrix}、\varphi(\gamma_2)=\begin{pmatrix}1&&&&\\&&&&i\\&&&i&\\&&-i&&\\&-i&&&\end{pmatrix}$$

このときφはDへの全射準同型写像でΓの位数有限の生成元の位数を保つ。

一般に$G\subset GL(g,\mathbf{C})$が CY、 RHの２条件を満足し、さらにkernel が torsion free である全射準同型写像 $\varphi:\Gamma\to G$ が存在するとき（ただしΓはGのRHデータ$RH(G)=[g_0(G);m_1,\ldots,m_r]$を符号にもつFuchs群：

$$\Gamma=\left\langle \alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_{g_0(G)},\beta_{g_0(G)},\gamma_1,\ldots,\gamma_r \,\middle|\, \prod_{i=1}^{g_0(G)}[\alpha_i,\beta_i]\gamma_1\ldots\gamma_r=\gamma_1^{m_1}=\ldots=\gamma_r^{m_r}=1\right\rangle$$

）種数gのコンパクト リーマン面Xと単射準同型写像$\iota:G\to \mathrm{Aut}(X)$が存在する。そして$G$ と$\iota(G)$を同一視するとき、次の式が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}\rho(a:X)=1+\sum_{(u,|a|)=1}\sum_{|a||m_j}\frac{1}{m_j}\left|\left\{\alpha\in G \,\middle|\, a=\alpha\varphi(\gamma_j)^{\frac{um_j}{|a|}}\alpha^{-1}\right\}\right|\frac{\zeta_{|a|}^u}{1-\zeta_{|a|}^u}\qquad (a(\neq 1)\in G).$$

ただし$\zeta_{|a|}=\exp\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{|a|}$.

上記のφにこの式を適用すると，$\rho(D:X)$は

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & i & \\ & & & & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

と$GL(5,\mathbf{C})$−共役になることがわかる。つまり$\rho(D:X)$とDは$GL(5,\mathbf{C})$-共役でない。全く同様に他の$\varphi:\Gamma\to D$に対しても$\rho(D:X)$とDが$GL(5,\mathbf{C})$-共役でないことがわかり、Dが種数５のコンパクト リーマン面から生じないことがわかる。

この例２は有限群がコンパクト リーマン面から生ずるかどうかの判定にはもっと強い条件が必要であることを意味している。そのより強い条件を導入するためにRH条件を次のように変更する。その基本的なアイデアは群Gの共役類に注目することである（以下についてはA.Kuribayashi and S.Ohmori An application of the character theory to automorphism groups of compact Riemann surfaces,Math.Nachr.162(1993), pp.193-208 を参照）：

Gを有限群とし、aをGの元とする。そして

$$[a]=\{\alpha\in\langle a\rangle \mid \alpha\ is\ G-conjugate\ to\ a\}$$

$$CY^c(G)=\{[a] \mid a\in G-\{1\}\}$$

$$CY^c(G:[a])=\{[b]\in CY^c(G) \mid \langle b\rangle\supset\langle a\rangle and \langle b\rangle\neq\langle a\rangle, b^{[b:a]}\in[a]\}$$

とおく。

このとき$\langle a\rangle$の生成元の集合$\{\alpha \mid \langle\alpha\rangle=\langle a\rangle\}$は正の整数$\nu(\langle a\rangle), k(\langle a\rangle)$および$\beta_1(=1),\ldots,\beta_\nu$が存在し、次のように分解する：

$$\{\alpha \mid \langle\alpha\rangle=\langle a\rangle\}=\bigcup_{i=1}^{\nu(\langle a\rangle)}[a^{\beta_i}] \qquad (\beta_i,|a|)=1、\ 1\le\beta_i\le|a|-1$$

そして

$$[a^{\beta_i}]=\{a^{\beta_{i1}},\cdots,a^{\beta_{ik(\langle a\rangle)}}\} \qquad k(\langle a\rangle)=[N_G(\langle a\rangle):C_G(\langle a\rangle)]$$

ここで$C_G(\langle a\rangle)$は$\langle a\rangle$の中心化群。

RH条件は巡回部分群$\langle a\rangle$（その生成元の集合と言っても同じ）に注目して定義されたが、ここではその代わりに$[\beta_i]$に注目してRH条件より強い条件を定義する。

このため$r(H)$に対応するGのconjugate class rotation data を次のように定義する：

<u>定義</u>　$G\subset GL(g,\mathbf{C})$を有限群とする。写像$\tilde{r}:CY^c(G)\to\mathbf{Q}$が$G$のconjugate class rotation dataであるとは任意の$a\in G-\{1\}$に対して$\mathrm{Tr}a=1+\sum_{i=1}^{v(\langle a\rangle)}\frac{\tilde{r}([a^{\beta_i^*}])}{k(\langle a\rangle)}\sum_{j=1}^{k(\langle a\rangle)}\frac{\zeta_{|a|}^{\beta_{ij}}}{1-\zeta_{|a|}^{\beta_{ij}}}$が成り立つことをいう、ただし$\beta_i\beta_i^*\equiv 1(\mathrm{mod}|a|)$および$\zeta_{|a|}=\exp\frac{2\pi\sqrt{-1}}{|a|}$。

さらにRH条件にならい次のように定める：

Gのconjugate class rotation data $\tilde{r}$ に対して

$$\tilde{r}_*([a]:G)=\tilde{r}([a])-\sum_{[b]\in CY^c(G:[a])}\tilde{r}_*([b]:G)$$

$$\tilde{l}([a]:G)=\frac{\tilde{r}_*([a]:G)}{[N_G(\langle a\rangle):\langle a\rangle]}$$

とおく。このときRH条件より強いRH*条件を次のように定義する：

<u>RH*条件</u>　対$(G,\tilde{r})$が RH*条件を満たすとはすべての$[a]\in CY^c(G)$に対して$\tilde{l}([a]:G)\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$が成り立つことをいう。

<u>注意</u>　$\tilde{r}([a])$はGがコンパクト リーマン面から生ずる場合、$[a]$の元の固定点でその点での回転角が$\exp\frac{2\pi\sqrt{-1}}{|a|}$となるものの個数を表わす量である。

そしてRH*条件を満たす対$(G,\tilde{r})$に対してRHデータを次のように定義する：

<u>RHデータ</u>

$$RH(G,\tilde{r})=\left[g_0(G);|a_1|,\ldots,|a_1|,\ldots,|a_Y|,\ldots,|a_Y|\right]$$

ただし$\{a_1,\ldots,a_Y\}$はGの非自明な共役類の完全代表系、$|a_i|$は元a_iの位数、そして

$RH(G,\tilde{r})$の中には$|a_i|$が$\tilde{l}([a_i]:G)$個現われる。

そしてこのRHデータを用いてFuchs群$\Gamma(G,\tilde{r})$を次のように定義する：

$$\Gamma(G,\tilde{r})=\left\langle \alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_{g_0(G)},\beta_{g_0(G)},\gamma_{1,1},\dots,\gamma_{1,\tilde{l}([a_1]:G)},\dots,\gamma_{Y,1},\dots,\gamma_{Y,\tilde{l}([a_Y]:G)} \;\middle|\; \prod_{i=1}^{g_0(G)}[\alpha_i,\beta_i]\prod_{k,j}\gamma_{k,j}=\gamma_{1,1}^{|a_1|}=\dots=\gamma_{1,\tilde{l}([a_1]:G)}^{|a_1|}=\dots=\gamma_{Y,1}^{|a_Y|}=\dots=\gamma_{Y,\tilde{l}([a_Y]:G)}^{|a_Y|}=1\right\rangle$$

<u>定義</u>　準同型写像$\varphi:\Gamma(G,\tilde{r})\to G$がconjugate class rotation data $\tilde{r}$ に付随するとは$\varphi(\gamma_{i,j})$がa_iとG-共役になることをいう$(1\le i\le Y)$。

以上の準備のもとで次の定理が得られる：

<u>定理</u>　有限群$G\subset GL(g,\mathbf{C})$が次の条件(i)、(ii)を満たすconjugate class rotation data $\tilde{r}$ を持てばGは種数gのコンパクト リーマン面から生ずる:

(i)$(G,\tilde{r})$はRH*条件を満たす。 (ii) $\tilde{r}$に付随する全射準同型写像$\varphi:\Gamma(G,\tilde{r})\to G$が存在する。

従ってこの定理により、RH*条件を満たすGがどのような全射準同型写像φを許せばコンパクト リーマン面から生ずるかがわかる。しかしそのようなφがいつ存在するかは今後の問題である。

最後にRH*条件がRH条件より真に強い条件であることを示す例をあげる。

<u>例3</u>　Gを$GL(41,\mathbf{C})$の$\langle 2,2|2\rangle=\langle a,b|a^8=b^2=1,b^{-1}ab=b^5\rangle$と群同型な位数１６の部分群で自然な表現$G\to GL(41,\mathbf{C})$の指標が$3\chi_2+3\chi_3+3\chi_4+\chi_5+3\chi_6+\chi_7+3\chi_8+7\chi_9+5\chi_{10}$であるものとする。このとき$G$がRH条件を満たすことが確かめられる。一方、$G$と$G$の唯一のconjugate class rotation data $\tilde{r}$の対$(G,\tilde{r})$に対しては$\tilde{l}([a^6]:G)=-1$となりRH*条件を満たさないことがわかる。ただし$\tilde{r}:CY^c(G)\to\mathbf{Q}$は

$$\tilde{r}([a])=\tilde{r}([a^3])=\tilde{r}([ab])=\tilde{r}([a^3b])=4、\tilde{r}([a^2])=12、\tilde{r}([a^6])=4、$$

$$\tilde{r}([a^2b])=0、\tilde{r}([a^4])=16、\tilde{r}([b])=\tilde{r}([a^4b])=0.$$

で定義されるconjugate class rotation dataである。

$\langle 2,2|2\rangle$の指標表

	1	a	a^3	ab	a^3b	a^2	a^6	a^2b	a^4	b
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	i	$-i$	i	$-i$	-1	-1	-1	1	1
χ_3	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
χ_4	1	$-i$	i	$-i$	i	-1	-1	-1	1	1
χ_5	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1
χ_6	1	i	$-i$	$-i$	i	-1	-1	1	1	-1
χ_7	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1
χ_8	1	$-i$	i	i	$-i$	-1	-1	1	1	-1
χ_9	2	0	0	0	0	$2i$	$-2i$	0	-2	0
χ_{10}	2	0	0	0	0	$-2i$	$2i$	0	-2	0