数理解析研究所講究録
1024巻 1998年 87-93

Full projections and automorphisms of stable algebras of unital C*-algebras

琉球大学　理学部　小高一則　(Kazunori Kodaka)

0.　はじめに

A を unital C*-環とし $\mathbf{K}$ を countably infinite dimensional Hilbert space 上の compact operators 全体がつくる C*-環とする。$Aut(A\otimes\mathbf{K})$ の元にはどのようなものがあるかということを考えると、$\alpha\in Aut(A)$ として、$\alpha\otimes id$ がある。また、w を $A\otimes\mathbf{K}$ の multiplier 環 $M(A\otimes\mathbf{K})$ の unitary として、$Ad(w)$ を、任意の $x\in A\otimes\mathbf{K}$ に対して、$Ad(w)=wxw^*$ と定義したときの $Ad(w)$(これを、$A\otimes\mathbf{K}$ の generalized inner automorphism という) が考えられる。上のもの以外にどのような automorphism があるか。というと、実際には、上のようなものの合成写像以外にはないような C*-環もあれば、上のようなもの以外の automorphism がある C*-環もある。

例 1.　$\theta\in[0,1]$ を無理数とし A_θをθに対応する無理数回転 C*-環とする。

(1) θが 2 次の無理数でないときは、任意の$\beta\in Aut(A_\theta\otimes\mathbf{K})$ は、$\beta=Ad(w)\circ\alpha\otimes id$ という形に書ける。ここで、$\alpha\in Aut(A_\theta)$, $w\in M(A_\theta\otimes\mathbf{K})$ は unitary である。

(2) θが 2 次の無理数のとき、$Ad(w)\circ\alpha\otimes id$ の形には、ならないような$\beta\in Aut(A_\theta\otimes\mathbf{K})$ が存在する。

例 2.　n を 2 以上の自然数とし、O_nを n に対応する Cuntz 環とする。

(1) $n=2,3$ のとき、任意の$\beta\in Aut(O_n\otimes\mathbf{K})$ は、$\beta=Ad(w)\circ\alpha\otimes id$ という形にかける。ここで、$\alpha\in Aut(O_n)$, $w\in M(O_n\otimes\mathbf{K})$ は unitary である。

(2) n が素数でないとき、$Ad(w)\circ\alpha\otimes id$ の形には、ならないような$\beta\in Aut(O_n\otimes\mathbf{K})$ が存在する。

このようなことが起こる理由を知りたいため、以下のことを行う。

A の automorphism の同値類の集合と、ある条件を満足する $A\otimes\mathbf{K}$ の projection

の同値類の集合とを考え、その間に bijection があることを示す。

1. 同値関係

$Int(A)$ を A の inner automorphisms の全体の集合、$Int(A\otimes\mathbf{K})$ を $A\otimes\mathbf{K}$ の generalized inner automorphisms の全体の集合。更に、$Out(A) = Aut(A)/Int(A)$, $Out(A\otimes\mathbf{K}) = Aut(A\otimes\mathbf{K})/Int(A\otimes\mathbf{K})$ とおく。

Lemma 1.1. $Out(A)$ から $Out(A\otimes\mathbf{K})$ への写像Ψを$\Psi([\alpha]) = [\alpha\otimes id]$ と定めると、Ψは *injective* である。ここで、$[\alpha]$ は、*automorphism* αの属す類である。

上の Lemma 1.1 により $Out(A)$ を $Out(A\otimes\mathbf{K})$ の部分群と見なすことができる。$Out(A\otimes\mathbf{K})$ の中に同値関係を、$[\beta_1],[\beta_2]\in Out(A\otimes\mathbf{K})$ に対して、

$$[\beta_1]\sim[\beta_2] \quad\Longleftrightarrow\quad \exists\alpha\in Aut(A) \quad s.t. \quad [\beta_1] = [\beta_2][\alpha\otimes id]$$

と定義する。同値類を $[[\beta]]$ で表わし、また、$\mathbf{P} = Out(A\otimes\mathbf{K})/\sim$とする。

$K_0(A)$ と $K_0(A\otimes\mathbf{K})$ とを同一視し、$Aut(K_0(A))$ と $Aut(K_0(A\otimes\mathbf{K}))$ とを同じものと思う。$Aut(A)$ から $Aut(K_0(A))$ への写像T_Aを、任意の$\alpha\in Aut(A)$ に対して、$T_A(\alpha) = \alpha_*$と定義する。同様に、$T_{A\otimes\mathbf{K}}$も定義する。$rangeT_A$, $rangeT_{A\otimes\mathbf{K}}$を $T_A, T_{A\otimes\mathbf{K}}$の像とすると、上のことより $rangeT_A$は $rangeT_{A\otimes\mathbf{K}}$ の部分群になる。

Proposition 1.2. $Out(A)$ が $Out(A\otimes\mathbf{K})$ の正規部分群ならば、$rangeT_A$は $rangeT_{A\otimes\mathbf{K}}$の正規部分群になる。$A$ が、*cancellation* をもつか、あるいは、A が *purely infinite simple unital C^*-algebra* ならば、逆も成り立つ。

次に、$A\otimes\mathbf{K}$ の full projection p で $p(A\otimes\mathbf{K})p\cong A$ となるもの全体を FP で表わす。ここで、projection p が full であるとは、$(A\otimes\mathbf{K})p(A\otimes\mathbf{K})$ が $A\otimes\mathbf{K}$ で dense ということである。FP の中に同値関係を $p,q\in FP$ に対

して、

$$p \sim q \iff \exists z \in A \otimes \mathbf{K} \quad s.t. \quad z^* z = p, \quad zz^* = q$$

で定義する。(p) で p の類を表わすものとする。

2. $FP/\sim$から $\mathbf{P}$ への map

$p \in FP$ とすると、$p(A \otimes \mathbf{K})p \cong A$. χ_pを A から $p(A \otimes \mathbf{K})p$ の上への isomorphism とする。このとき、Brown の結果より、p に対して、

$$\exists z \in M(A \otimes \mathbf{K} \otimes \mathbf{K}) \quad s.t. \quad p \otimes 1 = z^* z, \quad 1 \otimes 1 \otimes 1 = zz^*$$

ψを $\mathbf{K} \otimes \mathbf{K}$ から $\mathbf{K}$ の上への isomorphism で K_0で identity とする。$\beta(p, \chi_p)$ を

$$\beta(p, \chi_p) = id \otimes \psi \circ Ad(z) \circ \chi_p \otimes id$$

とおくと、$\beta(p, \chi_p) \in Aut(A \otimes \mathbf{K})$ となる。

Lemma 2.1. *(1)* $[\beta(p, \chi_p)] \in Out(A \otimes \mathbf{K})$ は、ψ, z の取り方によらない。
(2) $[[\beta(p, \chi_p)]] \in \mathbf{P}$ は、χ_pの取り方によらない。

上の Lemma 2.1 より $[[\beta(p, \chi_p)]]$ は、χ_pの取り方によらないので、$\beta(p, \chi_p)$ をβ_pで表わす。$FP/\sim$から $\mathbf{P}$ への写像 $\mathcal{F}$ を、任意の $p \in FP$ に対して、$\mathcal{F}((p)) = [[\beta_p]]$ と定義する。

Lemma 2.2. $\mathcal{F}$ は、*well-defined*である。

3. $\mathbf{P}$ から $FP/\sim$への map

$\{e_{ij}\}$ を $\mathbf{K}$ の matrix units とする。$1 \otimes e_{00} \in FP$ だから、任意の$\beta \in Aut(A \otimes \mathbf{K})$ に対して、$\beta(1 \otimes e_{00}) \in FP$ である。$\mathbf{P}$ から $FP/\sim$への写像 $\mathcal{J}$ を、任意の$\beta \in Aut(A \otimes \mathbf{K})$ に対して、$\mathcal{J}([[\beta]]) = (\beta(1 \otimes e_{00}))$ とおく。このとき、$\mathcal{J}$ は、well-defined である。

Lemma 3.1. $\mathcal{J}$ は、*injective* である。

このLemmaは、次のLemmaによりすぐわかる。

Lemma 3.2. $\beta \in Aut(A \otimes \mathbf{K})$ とし、$(\beta(1 \otimes e_{00})) = (1 \otimes e_{00})$ とする。このとき、

$$\exists \alpha \in Aut(A), \quad \exists w \in M(A \otimes \mathbf{K}) \quad a\ unitary \quad s.t. \quad \beta = Ad(w) \circ \alpha \otimes id$$

Lemma 3.1 の証明. $\beta_1, \beta_2 \in Aut(A \otimes \mathbf{K})$, $\mathcal{J}([[\beta_1]]) = \mathcal{J}([[\beta_2]])$ であるとすると、$(\beta_1(1 \otimes e_{00})) = (\beta_2(1 \otimes e_{00}))$. 従って、$((\beta_2^{-1} \circ \beta_1)(1 \otimes e_{00})) = (1 \otimes e_{00})$. よって、Lemma 3.2 より、

$$\begin{aligned} &\exists \alpha \in Aut(A) \quad \exists w \in M(A \otimes \mathbf{K}) \quad \text{a unitary} \\ &s.t. \quad \beta_2^{-1} \circ \beta_1 = Ad(w) \circ \alpha \otimes id \end{aligned}$$

よって、$[[\beta_1]] = [[\beta_2]]$. (証終)

Lemma 3.3. 任意の $p \in FP$ に対して、$(\mathcal{J} \circ \mathcal{F})((p)) = (p)$ である。

このLemmaは、次のLemmaによりすぐわかる。

Lemma 3.4. 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して、$\exists v \in \mathbf{K}$ *a partial isometry*

$$\begin{aligned} s.t. \quad v^*v = \sum_{j=-n}^{n} e_{jj}, \quad vv^* = \sum_{j=-n}^{n} \psi(e_{jj} \otimes e_{00}) \\ ve_{ij}v^* = \psi(e_{ij} \otimes e_{00}) \quad i, j = -n, \ldots, 0, \ldots, n \end{aligned}$$

Lemma 3.3 の証明. $\mathcal{F}$ の定義より $(\mathcal{J} \circ \mathcal{F})((p)) = \mathcal{J}([[\beta_p]])$. また、

$$\beta_p = id \otimes \psi \circ Ad(z) \circ \chi_p \otimes id$$

だから、

$$\begin{aligned}\beta_p(1\otimes e_{00}) &= (id\otimes\psi\circ Ad(z)\circ\chi_p\otimes id)(1\otimes e_{00})\\ &= (id\otimes\psi\circ Ad(z))(p\otimes e_{00})\\ &= (id\otimes\psi)(z(p\otimes e_{00})z^*)\end{aligned}$$

$id\otimes\psi$を $M(A\otimes\mathbf{K}\otimes\mathbf{K})$ から $M(A\otimes\mathbf{K})$ の上への isomorphism に拡張しておくと、

$$\beta_p(1\otimes e_{00}) = (id\otimes\psi)(z)(id\otimes\psi)(p\otimes e_{00})(id\otimes\psi)(z)^*$$

$\cup_{n=1}^{\infty}M_n(A)$ は、$\mathbf{K}$ で dense だから

$$\exists n\in\mathbf{N}\quad s.t.\quad p\in M_{2n+1}(A)$$

と思ってよい。$p=\sum_{i,j=-n}^{n}a_{ij}\otimes e_{ij}$ とおくと、

$$(id\otimes\psi)(p\otimes e_{00}) = \sum_{i,j=-n}^{n}a_{ij}\otimes\psi(e_{ij}\otimes e_{00})$$

Lemma 3.4 より　$\exists v\in\mathbf{K}$ a partial isometry

$$\begin{aligned}s.t.\quad v^*v=\sum_{j=-n}^{n}e_{jj},\quad vv^*=\sum_{j=-n}^{n}\psi(e_{jj}\otimes e_{00})\\ ve_{ij}v^*=\psi(e_{ij}\otimes e_{00})\quad i,j=-n,\ldots,0,\ldots,n\end{aligned}$$

このとき

$$(1\otimes v)p(1\otimes v)^* = \sum_{i,j=-n}^{n}a_{ij}\otimes\psi(e_{ij}\otimes e_{00}) = (id\otimes\psi)(p\otimes e_{00})$$

よって

$$\beta_p(1\otimes e_{00}) = (id\otimes\psi)(z)(1\otimes v)p(1\otimes v)^*(id\otimes\psi)(z)^*$$

更に、

$$[p(1\otimes v)^*(id\otimes\psi)(z)^*][p(1\otimes v)^*(id\otimes\psi)(z)^*]^* = p$$

ゆえに　$(\beta_p(1\otimes e_{00}))=(p)$. (証終)

Lemma 3.1 と Lemma 3.3 より、

Theorem 3.5. $\mathcal{J}: \mathbf{P} \to FP/\sim$ は *bijection* で $\mathcal{F}$ は $\mathcal{J}$ の逆写像である。

上の Theorem 3.5 より

Corollary 3.6. 次の *2* つの条件は同値。
(1) $\exists\beta \in Aut(A \otimes \mathbf{K})$ *s.t.* $[\beta] \notin Out(A \otimes \mathbf{K})$,
(2) $\exists p \in A \otimes \mathbf{K}$ *a full projection s.t.*

$$p(A \otimes \mathbf{K})p \cong A, \quad (p) \neq (1 \otimes e_{00})$$

Corollary 3.7. A が *cancellation* をもつか、あるいは *purely infinite simple unital C*-algebra* とする。このとき、つぎの *2* つの条件は同値。
(1) $\exists\beta \in Aut(A \otimes \mathbf{K})$ *s.t.* $\beta_* \neq \alpha_*$ *on* $K_0(A)$ $\forall\alpha \in Aut(A)$,
(2) $\exists p \in A \otimes \mathbf{K}$ *a full projection s.t.*

$$p(A \otimes \mathbf{K})p \cong A, \quad [p] = [1 \otimes e_{00}] \quad in\ K_0(A \otimes \mathbf{K})$$

4. 応用

(1) θを2次の無理数とし、A_θを無理数回転C*-環とする。A_θは、cancellationをもち　$rangeT_{A_\theta} = \{1\}$ なので、$FP/\sim$は group になる。$p(A_\theta \otimes \mathbf{K})p \cong A_\theta$ となる full projection p をさがす。τを A_θの trace とし、$M_n(A_\theta)$ に正規化せずに拡張しておく。$\tau(p) = a + b\theta$ とすると、Rieffel の結果により、互いに素な整数 a, b で$\dfrac{c + d\theta}{a + b\theta} = \theta$ かつ $a + b\theta > 0$ となる a, b の組を探せばよいということになる。これを行うと、$FP/\sim \cong \mathbf{Z}$ であることがわかる。従って、$Out(A \otimes \mathbf{K})/Out(A) \cong \mathbf{Z}$.

(2) θを無理数とする。

$$uv = e^{2\pi\theta}vu, \quad wv = vw, \quad uw = vwu$$

という関係式を満たす unitaries u, v, w により生成される universal C*-algebra を H_θ とする。H_θ は、class 2 の Heisenberg C*-algebra と呼ばれている。Packer の結果により H_θ には

$$p(H_\theta \otimes \mathbf{K})p \cong H_\theta, \quad [p] \neq [1 \otimes e_{00}] \quad \text{in } K_0(H_\theta \otimes \mathbf{K})$$

となる projection $p \in H_\theta \otimes \mathbf{K}$ が存在することがわかる。また、H_θ は cancellation をもつこともわかるので、

$$\exists \beta \in Aut(H_\theta \otimes \mathbf{K}) \quad s.t. \quad \beta_* \neq \alpha_* \quad \text{on } K_0(H_\theta)\ \forall \alpha \in Aut(H_\theta)$$

参考文献

[1] B. Blackadar, *K-theory for operator theory,* M. S. R. I. Publications, Springer-Verlag, 1986.

[2] L. G. Brown, *Stable isomorphism of hereditary subalgebras of C*-algebras,* Pacific J. Math., **71** (1977), 335-348.

[3] L. G. Brown, P. Green and M. A. Rieffel, *Stable isomorphism and strong Morita equivalence of C*-algebras,* Pacific J. Math., **71** (1977), 349-363.

[4] R. C. Busby, *Double centralizers and extensions of C*-algebras,* Trans. Amer. Math. Soc., **132** (1968), 79-99.

[5] J. A. Mingo, *K-theory and multipliers of stable C*-algebras,* Trans. Amer. Math. Soc., **299** (1987), 397-411.

[6] J. Packer, *C*-algebras generated by projective representations of the discrete Heisenberg group,* J. Operator Theory, **18** (1987), 41-66.

[7] J. Packer, *Strong Morita quivalence for Heisenberg C*-algebras and the positive cones of their K_0-groups,* Canad. J. Math., **40** (1988), 833-864.

[8] M. A. Rieffel, *C*-algebras associated with irrational rotations,* Pacific J. Math., **93** (1981), 415-429.

[9] M. A. Rieffel, *The cancellation theorem for projective modules over irrational rotation C*algebras,* Proc. London Math., **47** (1983), 285-302.