数理解析研究所講究録
1024 巻 1998 年 94-111

ヒルベルト双加群と付随した C*-環

岡山大学環境理工学部 梶原 毅 (Tsuyoshi KAJIWARA)

本講演は、C.Pinzari, 綿谷安男氏との共同研究によるものであり、主として [KPW] の内容である。

1 定義と基本的性質

1.1 定義と基本性質

A を単位元をもつ C*-環とし、X は right Hilbert A-module とする。$\mathcal{L}_A(X_A)$ で X 上の線形作用素で A 内積について随伴をもつものとする。$\mathcal{L}_A(X_A)$ は C*-環である。さらに、$\theta^r_{x,y}(z) = x(y|z)_A$ によって (right) rank one 作用素を定義する。これは、$\mathcal{L}_A(X_A)$ に含まれる。rank one 作用素の線形結合のノルム閉包を $\mathcal{K}_A(X_A)$ とかき、コンパクト作用素環という。これは $\mathcal{L}_A(X_A)$ のイデアルであり、逆に $\mathcal{L}_A(X_A)$ は $\mathcal{K}_A(X_A)$ の multiplier 環である。X の有限集合 $\{u_i\}_{i=1}^n$ が X の基底であるとは、

$$x = \sum_{i=1}^{n} u_i(u_i|x)_A$$

が成り立つことである。有限基底が存在するとき、$\mathcal{L}_A(X_A) = \mathcal{K}_A(X_A)$ である。また、X の内積の値域が A を生成するとき、X は full という。通常、X は full を仮定する。

本講演では、主として C*-環は単位元をもち、bimodule は有限基底をもつと仮定する。

A から $\mathcal{K}_A(X_A)$ への *-単射 ϕ が与えられているとき、X または、(X,ϕ) を (right) Hilbert A-A bimodule 略して、Hilbert bimodule という。ここでは、[KW1] と違って左内積は考えていない。

X によって与えられる bimodule algebra O_X とは、A, X, $\mathcal{K}_A(X_A)$ の単射像を含み、任意の単位元をもつ C*-環 D に対して X から D への縮小写像 V, A から D への unital *-準同型 ρ_A, $K = \mathcal{K}_A(X_A)$ から D への unital *-準同型 ρ_K で、任意の $x, y \in X$, $k \in K$, $a \in A$ に対して

$$V_{kx} = \rho_K(k)V_x \qquad V_{xa} = V_x\rho_A(a) \qquad \rho_K(\phi(a)) = \rho_A(a)$$
$$V_xV_y^* = \rho_K({}_K(x|y)) \qquad V_x^*V_y = \rho_A((x|y)_A)$$

をみたしているときに、O_X から D への一意的な *-準同型 φ で 任意の $x \in X$, $a \in A$ と $k \in K$ に対して $\varphi(S_x) = V_x$, $\varphi(a) = \rho_A(a)$, $\varphi(k) = \rho_K(k)$ が成り立つようなものが存在するものである。この性質は、普遍性 (universality) と呼ばれる。

このような O_X は、X 上の Fock space への生成消滅演算子のなす環の quotient として具体的に構成される。その環の普遍性は、Pimsner [Pi] によって示された。$X^{\otimes m} = X \otimes_A X \otimes_A \cdots \otimes_A X$ (m-times), $X^{\otimes 0} = A$ とかき、$F(X) = \oplus_{m=0}^{\infty} X^{\otimes m}$ とおく。この right A-module が X の Fock space である。$x \in X$, に対して $T_x \in \mathcal{L}_A(F(X)_A)$ を、 $x_1 \otimes \cdots x_m \in X^{\otimes m}$, $a \in A$ に対して

$$
\begin{aligned}
&T_x(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = x \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \\
&T_x^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = \phi((x|x_1)_A) x_2 \otimes \cdots \otimes x_m \\
&T_x(a) = xa \qquad T_x^*(a) = 0
\end{aligned}
$$

と定義する。$\{T_x\}_{x \in X}$ で生成される C*-環 $\mathcal{T}_X$ は Toeplitz 環と呼ばれる。$\phi_{F(X)}$ を $\mathcal{L}_A(F(A))$ から $\mathcal{L}_A(F(X)_A)/\mathcal{K}_A(F(X)_A)$ への商写像とし、$S_x = \phi_{F(X)}(T_x)$ とおく。$\{S_x\}_{x \in X}$ で生成される C*-環が O_X の concrete な実現を与えている。

$x \in (x_1, \cdots, x_k) \in X^{\times k}$ に対して、$S_x = S_{x_1} S_{x_2} \cdots S_{x_k}$ とかき、$S_\phi = I$ とかく。O_X の中で $\{S_x S_y^* | x \in X^{\times s}, y \in X^{\times r}\}$ で生成される閉部分空間を $\mathcal{F}_{r,s}$ とかく。$T \in K = \mathcal{K}_A(X_A)$ に対して $\pi_K(T) \in \mathcal{L}_A(F(X)_A)/\mathcal{K}_A(F(X)_A)$ を $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_m \to T x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_m$ の 商像として定義する。$\phi_K(\theta_{x,y}) = S_x S_y^*$ であるから $\pi_K(T) \in \mathcal{F}_{1,1}$ である。また、$\mathcal{F}_{0,0} = \pi_K(\phi(A))$ とおく。

$\{u_1, \cdots, u_n\}$ を X の基底とするとき、

$$
S_x S_y^* = \sum_{i=1}^{n} S_x S_{u_i} S_{u_i}^* S_y^*
$$

とかけることより、$\mathcal{F}_{r,s} \subset \mathcal{F}_{r+1,s+1}$ となることがわかる。そこで、$\mathcal{F}_\infty^{(k)}$ で、$\cup_{r=0}^{\infty} \mathcal{F}_{r,r+k}$ のノルム閉包を表す。

O_X 上には、自然な $\mathbf{T}$ の作用 γ が $\gamma_t(S_x) = tS_x$ によって定義される。これをゲージ作用という。$\mathcal{F}_\infty^{(k)}$ たちはスペクトル部分空間、$\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ はゲージ作用による不動点環である。ゲージ作用により、O_X から $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ への忠実条件付き期待値 E_X が定義される。

Lemma 1. *A は C^*-環、X_A は right A-module とする。$x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_n \in X$ に対して*

$$
\| \sum_{i=1}^{n} \theta_{x_i, y_i}^r \| = \| ((x_i|x_j)_A)_{ij}^{1/2} ((y_i|y_j)_A)_{ij}^{1/2} \|
$$

がなりたつ。

これは、Morita 同値と行列による議論で示される。これを用いて、次の重要な補題が示される。

Lemma 2. A を単位元をもつ C^*-環、X_A は *right A-module* とする。さらに D は単位元をもつ C^*-環とする。$\pi_A : A \to D$ を *unital* な *-準同型、$\pi_X : X \to D$ を縮小写像で、$x, y \in X$, $a \in A$ に対して、

$$\pi_X(xa) = \pi_X(x)\pi_A(a) \qquad \pi_A((x|y)_A) = \pi_X(x)^*\pi_X(y)$$

が成り立っているものとする。そのとき、$\mathcal{K}_A(X_A)$ から D への *-準同型 π_K で、$x, y \in X$, $k \in \mathcal{K}_A(X_A)$ に対して

$$\pi_K(\theta^r_{y,x}) = \pi_X(y)\pi_X(x)^* \qquad \pi_X(kx) = \pi_K(k)\pi_X(x)$$

であるものが一意的に存在する。特に、ϕ_A が 1 対 1 ならば、π_K も 1 対 1 で π_X は等距離的である。

Proof. Lemma 2 により、$x_1, \cdots, x_n \in X$, $y_1, \cdots, y_n \in X$ に対して

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^n \theta_{x_i,y_i}\| &= \|((x_i|x_j)_A)_{ij}^{1/2}((y_i|y_j)_A)_{ij}^{1/2}\| \\
&\geq \|(\pi_A((x_i|x_j)_A))_{ij}^{1/2}(\pi_A((y_i|y_j)_A))_{ij}^{1/2}\| \\
&= \|(\pi_X(x_i)^*\pi_X(x_j))_{ij}^{1/2}(\pi_X(y_i)^*\pi_X(y_j))_{ij}^{1/2}\| \\
&= \|\sum_{i=1}^n \pi_X(x_i)\pi_Y(y_i)^*\|
\end{aligned}$$

この不等式により、$\pi_K(\theta^r_{y,x}) = \pi_X(y)\pi_X(y)^*$ によって π_K を定義することができる。さらに、π_A が 1 対 1 であれば、上の不等式の中の唯一の不等号が等号になり、π_K は等距離的である。 □

Remark 1.1. 上の Lemma 2 において、一つの Hilbert A-module X を 二つの Hilbert A module X, Y に、$\mathcal{K}_A(X_A)$ を $\mathcal{K}_A(X_A, Y_A)$ に変えた形の命題が、少しの修正で成立する。

これは、O_X から定義される *-準同型がもし A 上忠実であれば O_X の homogeneus 部分空間上でも等距離的であることを示しており、あとで用いられる。

Lemma 3. A は単位元をもつ C^*-環とし、(X, ϕ) は *Hilbert A-A bimodule* とする。そのとき、$X^{\otimes m}$ から O_X への等距離作用素 $\pi_m : X^{\otimes m} \to O_X$ と *-同型 $\psi_{r,s} : \mathcal{K}_A(X^{\otimes r}{}_A, X^{\otimes s}{}_A) \to \mathcal{F}_{r,s}$ で次をみたすものがある。$x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m \in X$ に対して、

$$\pi_m(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = S_{x_1} \cdots S_{x_m}$$
$$\psi_{r,s}(\theta_{x_1\otimes\cdots\otimes x_s, y_1\otimes\cdots\otimes y_r}) = S_{x_1} \cdots S_{x_s} S^*_{y_r} \cdots S^*_{y_1}$$

Proof. Lemma 2 を $X^{\otimes r}{}_A$ と $X^{\otimes s}{}_A$ に対して適用すればよい。 □

同じ状況で、等距離的埋め込み $T \in \mathcal{K}_A(X^{\otimes m}{}_A) \to T \otimes I \in \mathcal{K}_A(X^{\otimes m+1}{}_A)$ が存在する。$\mathcal{F}_X$ は C*-帰納極限 $\lim_m \mathcal{K}_A(X^{\otimes m}{}_A)$ とする。

Lemma 4. $\mathcal{F}_X$ から $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ への同型 ψ で、$\psi\big|_{\mathcal{K}_A(X^{\otimes m}{}_A)} = \psi_{m,m}$ となるものがある。さらに、ψ は $\mathcal{K}_A(X^{\otimes m})$ から $\mathcal{K}_A(X^{\otimes m+1})$ への埋め込みを、$\mathcal{F}_{m,m}$ から $\mathcal{F}_{m+1,m+1}$ への埋め込みにうつしている。

これによって、$\mathcal{F}_X$ と $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ は同一視することができる。

Lemma 5. A は単位元をもつ C^*-環とし、X は *Hilbert A-A bimodule* とする。さらに、X は左内積をもち、*Kajiwara-Watatani* の意味での *finite type* であるとする。そのとき、条件付期待値 $E_m : \mathcal{F}_X \to \mathcal{K}_A(X^{\otimes m}{}_A)$ で、$T = \lim_{m\to\infty} E_m(T)$ となるものがある。さらに、O_X から A への条件付期待値 $E_A^{O_X}$ がある。

Proof. $\mathcal{K}_A((X^{\otimes m} \otimes_A X^{\otimes k})_A)$ から $\mathcal{K}_A(X_A^m)$ への条件付期待値

$$E_m^{m+k}(\theta^r_{x_1\otimes y_1, x_2\otimes y_2}) = [\mathrm{rind}(X^{\otimes k})]^{-1}\theta^r_{x_1, A(y_1|y_2)x_1}$$

がある。$k \to \infty$ とすればよい。 □

これにより、X が finite type のとき、$\phi(A)' \cap \mathcal{F}_\infty^{(0)}$ が $\cup_{m=1}^\infty(\phi(A)' \cap \mathcal{F}_{m,m})$ で近似されることがわかる。

1.2 Canonical CP map

A を単位元をもつ C*-環とし、(X, ϕ) は Hilbert right A-A bimodule とする。$\{u_1, \cdots, u_n\}$ として、O_X から O_X への写像 σ を

$$\sigma(T) = \sum_{i=1}^n S_{u_i} T S_{u_i}^*$$

で定義する。これは、作り方より、completely positive map である。σ は全体では基底のとりかたに依存している。

Lemma 6. σ を $\phi(A)' \cap O_X$ に制限すると *unital* 等距離的 *-準同型になり、また、基底のとりかたによらない。

Proof. $\{u_1, \ldots, u_n\}$ が基底であることより、σ が unital であることがわかる。

$$\begin{aligned}\sigma(T_1)\sigma(T_2) &= \sum_i \sum_j S_{u_i} T_1 \phi((u_i|u_j)_A) T_2 S_{u_j}^* \\ &= \sum_i \sum_j S_{u_i} \phi((u_i|u_j)_A) T_1 T_2 S_{u_j}^* \\ &= \sum_j S_{\sum_i u_i (u_i|u_j)_A} T_1 T_2 S_{u_j}^* \\ &= \sigma(T_1 T_2)\end{aligned}$$

である。また、$\sigma(T) = 0$ より $T = 0$ が従うので σ は 等距離的である。 □

Lemma 7. $T \in \phi(A)' \cap O_X$, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ に対して、$\sigma^m(T) S_{x_1} \cdots S_{x_m} = S_{x_1} \cdots S_{x_m} T$ がなりたつ。さらに、$\sigma(T)$ の元は、$\mathcal{F}_{m,m}$ の元と可換である。特に、$\sigma(T)$ は $\phi(A) \subset \mathcal{F}_{1,1}$ と可換となり、σ が$\phi(A)' \cap O_X$ を保存していることがわかる。

Proof. 簡単のため、ここだけで $S_i = S_{u_i}$ と略記する。

$$\begin{aligned}\sigma^m(T) S_{x_1} \cdots S_{x_m} &= \sum_{i_1, \cdots, i_m} S_{i_m} \cdots S_{i_1} T S_{i_1}^* \cdots S_{i_m}^* S_{x_1} \cdots S_{x_m} \\ &= \sum_{i_1, \cdots, i_m} S_{i_1} \cdots S_{i_1} S_{i_1}^* \cdots S_{i_m}^* S_{x_1} \cdots S_{x_m} T \\ &= \sum_{i_1, \cdots, i_m} S_{x_1} \cdots S_{x_m} T\end{aligned}$$

□

Lemma 8. $\psi : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_\infty^{(0)}$ は以前の *lemma* の同型写像とする。そのとき、$T \in {}_A\mathcal{K}_A(X_A^{\otimes m})$ に対して、$\psi^{-1}\sigma\psi(T) = I \otimes T \in \mathcal{K}_A((X \otimes_A X^{\otimes m})_A)$ となる。

Proof. $T = \sum_{x,y} S_{x,y}$ (有限和) とする。

$$\psi\sigma\psi^{-1}(T) = \sum_{i=1}^n \sum_{x,y} S_{u_i \otimes x, u_i \otimes y}$$

□

2 単純性とイデアル

2.1 (I)-free 条件

bimodule algebra の単純性、イデアル対応を議論するための条件として、次の条件 (I) を考える。${}^0O_X = \cup_{r,s}\mathcal{F}_{r,s}$ とおく。これは、O_X の中の代数的な元全体よりなる *-部分環である。

Definition 9. Hilbert bimodule X が (I)-free であるとは、自然数 k ごとに、以下の (1), (2), (3) をみたすような $r_k \in \mathbf{N}$, $T_k \in \phi(A)' \cap {}^0O_X, \|T_k\| = 1$ がとれることである。

1. $T_k^* \sigma^j(T_k) \in \mathcal{F}_{r_k, r_k} \qquad (0 \leq j \leq k)$
2. $a \in A \to \phi(a) T_k^* T_k \in \mathcal{F}_{r_k, r_k}$ は completely isometric である。
3. $\|T_k^* \sigma^j(T_k)\| < 1 \qquad (1 \leq j \leq k)$

(2) の条件は、実際に適用するときはつぎの形にする。

Lemma 10. *X に対して、$\{T_k\}$ は (I)-free 条件をみたす族とする。そのとき、任意の $p \in \mathbf{N}$, $B \in \mathcal{F}_{p,p}$ に対して、$\|B\sigma^p(T_k^* T_k)\| = \|B\|$ が成り立つ。*

Proof. これは、Morita equivalence の理論と行列を使った議論からでる。 □

(3) の条件は、そのまま適用するには不十分である。

Lemma 11. *X が (I)-free であるとする。そのとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$k \in \mathbf{N}$ ごとに以下の (1), (2), (3) をみたすような $r_k^\varepsilon \in \mathbf{N}$, $T_k^\varepsilon \in \phi(A)' \cap {}^0O_X$, $\|T_k^\varepsilon\| = 1$ がとれる。*

1. $T_k^{\varepsilon *} \sigma^j(T_k^\varepsilon) \in \mathcal{F}_{r_k^\varepsilon, r_k^\varepsilon} \qquad (0 \leq j \leq k)$

2. 任意の $p \in \mathbf{N}$ と $B \in \mathcal{K}_A(X^{\otimes p}{}_A)$ に対して $\|\sigma^p(T_k^{\varepsilon *} T_k^\varepsilon) B\| = \|B\|$ がなりたつ。

3. $\|T_k^{\varepsilon *} \sigma^j(T_k^\varepsilon)\| < \varepsilon \qquad (1 \leq j \leq k)$

Proof. $\varepsilon > 0$ を固定する。また、$0 \leq j \leq k$ とする。$\|T_k^* \sigma^j(T_k)\|^{q+1} < \varepsilon$ となるような q をとる。そこで $T_k^\varepsilon = T_k \sigma^{r_k}(T_k) \cdots \sigma^{r_k q}(T_k)$ とおく。そのとき、

$$
\begin{aligned}
T_k^{\varepsilon *} \sigma^j(T_k^\varepsilon) &= \sigma^{r_k q}(T_k^*) \cdots \sigma^{r_k}(T_k^*) T_k^* \sigma^j(T_k) \sigma^{r_k + j}(T_k) \sigma^{2r_k + j}(T_k) \cdots \sigma^{r_k q + j}(T_k) \\
&= T_k^* \sigma^j(T_k) \sigma^{r_k} \left(\sigma^{r_k(q-1)}(T_k^*) \cdots T_k^* \sigma^j(T_k) \cdots \sigma^{r_k(q-1)+j}(T_k) \right)
\end{aligned}
$$

ここで、$T_k^*\sigma^j(T_k) \in \mathcal{F}_{r_k,r_k}$ となり、σ^{r_k} のかかっている項と可換になることを用いた。この議論を繰り返して、

$$T_k^{\varepsilon *}\sigma^j(T_k^\varepsilon) = T_k^*\sigma^j(T_k)\sigma^{r_k}\left(T_k^*\sigma^j(T_k)\right)\sigma^{2r_k}\left(T_k^*\sigma^j(T_k)\right)\cdots\sigma^{r_kq}\left(T_k^*\sigma^j(T_k)\right)$$

を得る。これより、$r_k^\varepsilon = r_k(q+1)$ とすれば (1) がみたされる。

(3) を示す。$1 \leq j \leq k$ とする。

$$\begin{aligned}
&\|T_k^{\varepsilon *}\sigma^j(T_k^\varepsilon)\| \\
=&\|T_k^*\sigma^j(T_k)\sigma^{r_k}(T_k^*\sigma^j(T_k))\sigma^{2r_k}(T_k^*\sigma^j(T_k))\cdots\sigma^{r_kq}(T_k^*\sigma^j(T_k))\| \\
\leq&\|T_k^*\sigma^j(T_k)\|^q \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

最後に (2) を示す。$j=0$ とすると、

$$\begin{aligned}
T_k^{\varepsilon *}T_k^\varepsilon =&(T_k^*T_k)\sigma^{r_k}(T_kT_k^*)\cdots\sigma^{r_k(q-1)}(T_kT_k^*)\sigma^{r_kq}(T_kT_k^*) \\
=&\left\{(T_k^*T_k)\sigma^{r_k}(T_kT_k^*)\cdots\sigma^{r_k(q-1)}(T_kT_k^*)\right\}\sigma^{r_kq}(T_kT_k^*)
\end{aligned}$$

すでに、$p \in \mathbf{N}$ に対して、$B \in \mathcal{K}_A(X_A^{\otimes p})$ に対して、

$$\|B\sigma^p(T_k^*T_k)\| = \|B\|$$

となることが示されている。$T_k^*T_k \in \mathcal{F}_{r_k,r_k}$ であることより、

$$(T_k^*T_k)\sigma^{r_k}(T_kT_k^*)\cdots\sigma^{r_k(q-1)}(T_kT_k^*) \in \mathcal{F}_{r_k(q-1)+r_k,r_k(q-1)+r_k} = \mathcal{F}_{r_kq,r_kq} = \mathcal{K}_A(X_A^{\otimes r_kq})$$

である。$B \in \mathcal{K}(X_A^{\otimes p})$ として、

$$\begin{aligned}
&\|B\sigma^p((T_k^*T_k)\sigma^{r_k}(T_kT_k^*)\cdots\sigma^{r_k(q-1)}(T_kT_k^*)\sigma^{r_kq}(T_kT_k^*))\| \\
=&\|B\sigma^p((T_k^*T_k)\sigma^{r_k}(T_kT_k^*)\cdots\sigma^{r_k(q-1)}(T_kT_k^*))\sigma^{r_kq+p}(T_kT_k^*))\| \\
=&\|B\sigma^p((T_k^*T_k)\sigma^{r_k}(T_kT_k^*)\cdots\sigma^{r_k(q-1)}(T_kT_k^*))\| \\
=&\|B\sigma^p(T_k^*T_k)\| \\
=&\|B\|
\end{aligned}$$

となる。ここでは、r_kq+p 等に対して繰り返し Lemma 10 を適用した。 □

この中で、(3) はもっとも本質的な条件であり、どのように変形しても生き残るものであるが、free を表現するには、ε の形にしておいた方が直観に適合する。

(2) の条件は、一般的にはなかなか期待できない。特に、X が単純 C* 環 A 上の 外部自己同型で与えられている場合、$A = \mathcal{F}_\infty^{(0)}$ であるから、意味のある元はとれなくなる。定理の証明を見ると、このような元は、個別にとれれば十分なことが多い。それにも関わらずこの形の条件をあげている理由は、あとで現われる意味のある例において、極めて代数的に $\{T_k\}$ を構成することがるからである。

この条件 (2) は例ごとに緩めて設定しなければならないことが多い。その場合には、(3) の方は厳重な条件にしないとうまく行かない。

2.2 単純性定理

A を単位元をもつ C*-環とし、(X,ϕ) は right Hilbert A-A bimodule とする。A のイデアル J が X-invariant であるとは、$a \in J$, $x, y \in X$ に対して、$(x, \phi(a)y)_A \in J$ となることである。A の X-invariant イデアルが自明なものしかないとき、A を X-simple という。

(X,ϕ) は単位元をもつ C*-環 A 上の right Hilbert bimodule とし、$K = \mathcal{K}_A(X_A)$ とかく。(V, ρ_A, ρ_K) が X の単位元をもつ C*-環 D への表現であるとは、$V : X \to D$ が縮小写像、$\rho_A : A \to D$, $\rho_K : K \to D$ がそれぞれ *準同型で、任意の $x, y \in X$, $k \in K$, $a \in A$ に対して、

$$
\begin{gathered}
V_{kx} = \rho_K(k)V_x \qquad V_{xa} = V_x\rho_A(a) \\
\rho_K(\phi(a)) = \rho_A(a) \qquad V_xV_y^* = \rho_K({}_K(x|y)) \\
V_x^*V_y = \rho_A((x|y)_A)
\end{gathered}
$$

成り立つことである。

Theorem 12. *A は 単位元をもつ C^*-環とし、(X,ϕ) は Hilbert A-A bimodule とする。D を単位元をもつ C^*-環とし、(V, ρ_A, ρ_K) を X の D への表現とする。φ は、$\varphi(S_x) = V_x$, $\varphi(\phi(a)) = \rho_A(a)$, $\varphi(\pi_K(k)) = \rho_K(k)$ によってきまる O_X の D への表現とする。O_X の普遍性によって常にこの表現は存在する。*

1. *もし、$a \in A \to \rho_A(a) \in D$ が 1 対 1 であれば、φ の $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ への制限も 1 対 1 である。*

2. *さらに X が (I)-free であれば、φ は 1 対 1 である。*

Proof. m を任意の自然数とする。Lemma 2 を $X^{\otimes m}$ に対して適用すると、φ の $\mathcal{F}_{m,m}$ への制限が 1 対 1 になる。従って、$\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ までも 1 対 1 である。

つぎに X は (I)-free をみたすとしよう。任意の $\varepsilon > 0$ を取って固定する。これに対して、Lemma 11 により、$\{T_k^\varepsilon\}_k$ をとっておく。$B = \sum_{j=-n}^{n} B_j \in {}^0O_X$ をとる。ただし、B_j は degree j の元の和とする。このような形の元全体は、O_X の中で dense である。ここで、自然数 p を十分大きく取っておくことによりすべての $-n \le j \le n$ に対して、$B_j \in \mathcal{K}(X_A^{\otimes p}, X_A^{\otimes p+j})$ とすることができる。そのとき、

$$
\varphi(\sigma^p(T_n^{\varepsilon *}))\varphi(B)\varphi(\sigma^p(T_n^\varepsilon)) = \sum_{j=-n}^{n} \varphi(B_j')
$$

とかくことができる。ここで、

$$
\varphi(B_j') = \varphi(\sigma^p(T_n^{\varepsilon *}))\varphi(B_j)\varphi(\sigma^p(T_n^\varepsilon))
$$

である。$j > 0$ に対しては、

$$\varphi(B'_j) = \varphi(\sigma^p(T_n^{\varepsilon *}\sigma^j(T_n^\varepsilon)))\varphi(B_j)$$

であり、条件 (1) より B'_j が degree j の元であることもわかる。(3) の条件から、

$$\|\varphi(B'_j)\| \leq \varepsilon\|\varphi(B_j)\|$$

である。$j < 0$ のときも同様にして、

$$\|\varphi(B'_j)\| \leq \varepsilon\|\varphi(B_j)\|$$

となることがわかる。さらに、(2) より、$\|\sigma^p(T_n^{\varepsilon *}T_n^\varepsilon)B_0\| = \|B_0\|$ である。φ は homogeneous 部分空間上では等距離的であるから、$\|\varphi(B_0)\| = \|B_0\| = \|B'_0\| = \|\varphi(B'_0)\|$ である。これらより、

$$\begin{aligned}
\|\varphi(B_0)\| &= \|\varphi(B'_0)\| \\
&= \|\varphi(B') - \sum_{j\neq 0}\varphi(B'_j)\| \\
&\leq \|\sum_{j=-n}^{n}\varphi(B'_j)\| + \sum_{j\neq 0}\|\varphi(B'_j)\| \\
&\leq \|\sum_{j=-n}^{n}\varphi(B'_j)\| + 2nK\varepsilon \\
&\leq \|\varphi(\sigma^p(T_n^{\varepsilon *}))\varphi(B)\varphi(\sigma^p(T_n^\varepsilon))\| + 2nK\varepsilon \\
&\leq \|\varphi(B)\| + 2nK\varepsilon
\end{aligned}$$

ここで ε は任意なので、$\|\varphi(B_0)\| \leq \|\varphi(B)\|$ がなりたつ。

$\varphi(O_X)$ から $\varphi(\mathcal{F}_\infty^{(0)})$ への条件付期待値 $\hat{E}$ で $\hat{E}(\varphi(B)) = \varphi(B_0)$ をみたすものが存在する。すなわち $\hat{E}\varphi = \varphi E_X$ であり、下の可換図式が成立する。

$$\begin{array}{ccc}
O_X & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(O_X) \\
{\scriptstyle E_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{E}} \\
\mathcal{F}_\infty^{(0)} & \xrightarrow[\varphi]{} & \varphi(\mathcal{F}_\infty^{(0)})
\end{array}$$

φ は $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ 上で 1 対 1 で E_X は忠実であるから φ は O_X 全体で忠実となる。 □

Corollary 13. (X, ϕ) は単位元をもつ C^*-環 A 上の *full Hilbert bimodule* であるとする。X が *(I)-free* であり、A が *X-simple* であれば、O_X は単純である。

Proof. $\mathcal{J} \neq O_X$ は O_X のイデアルとし、$J = \mathcal{J} \cap A$ とおく。そのとき、J は A の X-invariant イデアルとなる。A が X-simple という仮定より、$J = \{0\}$ でなければならない。よって、$O_X \to O_X/\mathcal{J}$ は、A 上で忠実であり、全体で忠実である。すなわち $\mathcal{J} = \{0\}$ である。 □

2.3 イデアル対応定理

イデアル対応を考えるためには、X-invariant イデアルの概念だけでは不十分にである。A の X-invariant イデアル J に対して、$J_X = \{a \in A : (x|\phi(a)y)_A \in J, \forall x, \forall y \in X\}$ とおく。このとき、J_X は $J_X \supset J$ となるような X-invariant イデアルである。

A のイデアル J に対して、$X_J = \{x \in X : (x|x)_A \in J\}$ とおく。$\{u_\alpha\}_\alpha$ を J の approximate unit とし、$x \in X_J$ を xu_α で近似できることにより、$(y|x)_A \in J$ などがわかる。これからさらに $x, y \in X_J$ であるときに $x + y \in X_J$ であり、X_J は X の部分空間である。さらに $XJ \subset X_J$ であり、$X_J A \subset X_J$ がわかる。これらより、X/X_J は right A/J module であることがわかる。

Lemma 14. *J が A の X-invariant イデアルであるとする。そのとき、$\tilde{\phi} : A/J \to \mathcal{K}_{A/J}((X/X_J)_{A/J})$ を $\tilde{\phi}([a])[x] = [\phi(a)x]$ と決めると $\tilde{\phi}$ は *-準同型となり、$\tilde{\phi}$ の核は J_X/J である。特に、$J_X = J$ であれば $\tilde{\phi}$ は等距離的である。*

Proof. X が有限生成であるという仮定から $j \in J$ として、

$$\phi(j)x = \sum_{i=1}^{n} u_i(u_i|\phi(j)x)_A$$

である。J が X-invariant であるという仮定より、$(u_i|\phi(j)x)_A \in J$ である。従って $\phi(J)X \subset XJ \subset X_J$ である。さらに $x \in X_J$, $a \in A$ に対して、$(\phi(a)x|\phi(a)x)_A = (x|\phi(a^*a)x)_A \in J$ である。したがって、$\phi(A)X_J \subset X_J$ である。 □

Bimodule X が (II)-free であるとは、$J_X = J$ をみたすような任意の X-invariant イデアルに対して X/X_J が (I)-free になることである。$J = \{0\}$ とすれば ϕ が忠実であることから $J_X = \{0\}$ となる。したがって、(II)-free なら (I)-free である。

Theorem 15. *A は単位元をもつ C^*-環とし、(X, ϕ) を A-A bimodule とする。もし X が (II)-free であるならば、*

1. *$\mathcal{J} \to J = \phi^{-1}(\mathcal{J} \cap \phi(A))$, $J \to \mathcal{J} = \mathrm{cls}\{X^{\otimes r}\phi(J)X^{\otimes s*}, r, s = 0, 1, 2, \dots\}$ は O_X のイデアルと A の $J_X = J$ をみたすような X-invariant イデアルとの 1 対 1 対応を与える。*

2. *J が A のイデアルであり、$\mathcal{J}$ を対応する O_X のイデアルであるとするとき、$O_X/\mathcal{J} = O_{X/X_J}$ がなりたつ。*

Proof. $\mathcal{J}$ は O_X のイデアルとする。そのとき、$J=\phi^{-1}(\mathcal{J}\cap\phi(A))$ とすると、J は A の X-invariant イデアルで、$J_X=J$ をみたす。したがって、X/X_J は (I)-free である。Bimodule X/X_J は A/J-bimodule とみて、$X/\mathcal{J}$ と同じものである。X_J の元は、xu_α, $u_\alpha\in J$ の形の元で近似できる。$u_\alpha\in J\subset\mathcal{J}$ であるから、$X_J\subset\mathcal{J}$ となる。方、$\tilde{x}\in X\cap\mathcal{J}$, $y\in X$ とすると、$(\tilde{x}|y)_A\in\mathcal{J}\cap\phi(A)=\phi(J)$ であり、$X_J=\mathcal{J}\cap X$ である。

そこで、X/X_J の $O_X/\mathcal{J}$ の中への表現で、A/J 上忠実なものがあることになる。したがって、O_{X/X_J} と $O_X/\mathcal{J}$ は標準的に同型である。

イデアル対応を考える。m_k で $\mathcal{F}_\infty^{(k)}$ への射影とする。O_{X/X_J} において、直前の定理の expectation の議論を適用して、商イメージの元 $\tilde{X}$ に対して、$\|\tilde{X}_0\|\leq\|\tilde{X}\|$ がいえる。したがって、$X\in\mathcal{J}$ であれば、$m_0(X)\in\mathcal{J}$ でなければならない。$x\in X^{\otimes k}$ に対して、$x^*m_k(B)=m_0(x^*B)$ である。したがって、$x^*m_k(B)\in\mathcal{J}$ となり、$m_k(B)\in\mathcal{J}$ である。これは、左から $X^{\otimes k}$ の元をかけていくことによって示される。フーリエ解析により、$B\in O_X$ は $m_k(B)$ たちのチェザロ極限でかけるので、$\mathcal{J}$ はゲージ不変となる。従って、$\mathcal{J}$ は、$\mathcal{J}\cap\mathcal{F}_{r,s}$ たちによって生成される。また、$X^{\otimes r*}(\mathcal{J}\cap\mathcal{F}_{r,s})X^{\otimes s}\in\mathcal{J}\cap A=J$ であり、基底を使った議論でもとにもどすことが可能であるから、$\mathcal{J}$ は、$X^{\otimes s}\phi(J)X^{\otimes r*}$ たちによって生成される。$\mathcal{J}$ が J によって復元されるので、$\mathcal{J}$ から J への対応は 1 対 1 である。

最後にこの対応が全射であることを示す。すなわち、A の X-invariant イデアルで J で $J_X=J$ をみたすものに対して $\mathcal{J}\cap\phi(A)=\phi(J)$ となることである。ただし、$\mathcal{J}$ は $\phi(J)$ によって O_X の中で生成されたイデアルである。明らかに $\phi(J)\subset\mathcal{J}\cap\phi(A)$ である。作り方より $\mathcal{J}$ はゲージ不変であるから、$\mathcal{J}\cap\phi(A)\subset\mathcal{J}^{(0)}\cap\phi(A)=\lim_r X^{\otimes r}\phi(J)X^{\otimes r*}$ である。ここで、$\mathcal{J}^{(0)}=\lim_r X^{\otimes r}\phi(J)X^{\otimes r*}$ とおく。$X^{\otimes r}\phi(J)X^{\otimes r*}$ は $\mathcal{F}_{r,r}$ の閉イデアルであり、これを $\mathcal{J}_r$ とかく。π_r で、A の $\mathcal{F}_{r,r}$ への埋め込みと、$\mathcal{F}_{r,r}/\mathcal{J}_r$ への商写像の合成とする。さらには、π_∞ は A の $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ への埋め込みと $\mathcal{F}_\infty^{(0)}/\mathcal{J}^{(0)}$ への商写像の合成とする。そのとき、$\ker(\pi_r)=\phi^{-1}(\phi(A)\cap\mathcal{J}_r)$ であり、$\ker(\pi_\infty)=\phi^{-1}(\phi(A)\cap\mathcal{J}^{(0)})$ である。次の明らかな *-準同型が存在する。

$$\phi(A)/(\phi(A)\cap\mathcal{J}_r)\to\mathcal{F}_{r,r}/\mathcal{J}_r\qquad\phi(A)/(\phi(A)\cap\mathcal{J}^{(0)})\to\mathcal{F}_\infty^{(0)}/\mathcal{J}^{(0)}$$

一般に、$a\in B$ で $\mathcal{J}$ を B のイデアルとする。a の $B/\mathcal{J}$ の像を $[a]_{B/\mathcal{J}}$ と書くことにする。

簡単のため、以下、ϕ は省略する。$a \in A$ に対して、

$$\begin{aligned}\|[a]_{A/A\cap\mathcal{J}^{(0)}}\| &= \|[a]_{\mathcal{F}_\infty^{(0)}/\mathcal{J}^{(0)}}\| \\ &= \mathrm{dist}(a, \mathcal{J}^{(0)}) \\ &= \lim_r \mathrm{dist}(a, \mathcal{J}_r) \\ &= \lim_r \|[a]_{\mathcal{F}_{r,r}/\mathcal{J}_r}\| \\ &= \lim_r \|[a]_{A/A\cap\mathcal{J}_r}\|\end{aligned}$$

以下に $A \cap \mathcal{J}_r = J$ であることが示されるので、

$$\|[a]_{A/A\cap\mathcal{I}^{(0)}}\| = \|[a]_{A/J}\|$$

となる。これにより $A/J \to A/A \cap \mathcal{J}^{(0)}$ は単射となり、$A \cap \mathcal{J}^{(0)} = J$ である。

最後に $A \cap \mathcal{J}_r = J$ であることを示さなければならない。$\phi(a) \in X^{\otimes r}\phi(J)X^{\otimes r*}$ と仮定する。$x, y \in X^{\otimes r}$ に対して $x^*\phi(a)y \in \phi(J)$ である。さらに $x', y' \in X^{\otimes r-1}$ に対して $x'^*\phi(a)y' \in \phi(J_X) = \phi(J)$ である。これを繰り返して r をどんどん小さくしていけば、最後に $a \in J$ を得る。 □

3 例

3.1 Cuntz-Krieger algebra

もともと、条件 (I) は、Cuntz-Krieger [CK] で、条件 (II) は、Cuntz [C] で定義されていた。すでに知られている Cuntz-Krieger 環の単純性定理とイデアル分類定理を bimodule のことばで説明する。

$\Sigma = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし、$D = (D(i,j))_{i,j\in\Sigma}$ は 0 または 1 を成分にもつ行列とする。する。ここで、Σ を頂点集合とし、D によって決定されるグラフ $\mathcal{G} = (\Sigma, E, r, s)$ を考える。ここで、E は辺の集合、$(i,j) \in E$ に対して $r(i,j) = j$, $s(i,j) = i$ とおく。E は Connes の意味の correspondense と考えることができる。$i \in \Sigma$ に対応する A の元を P_i と、$\gamma \in E$ に対応する E の元を δ_γ とかく。

$A = c(\Sigma)$ とおく。これは有限次元可換 C*-環である。$X = c(E)$ とおく。そのとき、$a, b \in A$, $f \in X$ に対して、

$$(a \cdot f \cdot b)(i,j) = a(i)f(i,j)b(j)$$

と置くことにより、X は A-A bimodule となる。また、

$$(f|g)_A(j) = \sum_{(i,j)\in E} \overline{f(i,j)}g(i,j)$$

とおくと、X は right Hilber A-module である。そのとき、

$$\sum_{\gamma \in E} \delta_\gamma (\delta_\gamma | f)_A = f$$

であり、$\{\delta_\gamma\}_{\gamma \in E}$ は、X_A の有限基底である。

X から $O_X = C^*(S_x | x \in X)$ をつくる。$\alpha \in E$ に対して、S_{δ_α} を S_α とかく。$r(\alpha) = s(\beta)$ のときに $F(\alpha, \beta) = 1$、そうでないとき $F(\alpha, \beta) = 0$ として、行列 $F(\alpha, \beta)_{\alpha, \beta \in E}$ を定義する。そのとき、

$$S_\alpha^* S_\alpha = \sum_\beta F(\alpha, \beta) S_\beta S_\beta^*$$

が成り立つ。これは、edge model の Cuntz-Krieger family である。

さらに、$S_i = \sum_{s(\alpha)=i} S_\alpha \in O_X$ とおく。$\alpha = (i, j)$ であるとき、$S_\alpha = S_i P_j$ である。$S_i S_i^* = P_i$ であることから $\{S_i | i \in \Sigma\}_{i \in \Sigma}$ はやはり O_X を生成し、

$$S_i^* S_i = \sum_j D(i, j) S_j S_j^*$$

をみたしている。すなわち、$\{S_i\}$ は D によって決まる Cuntz-Krieger family である。

Σ_0 は Σ の部分集合で、任意の $v \in \Sigma_0$ に対して、v を起点とする 2 通りのループがあるようなものとする。

Definition 16 (CK). $\mathcal{G}$ が条件 (I) をみたすとは、任意の $i \in \Sigma$ に対して、i からある $i_0 \in \Sigma_0$ へのパスがとれることである。

Lemma 17 (CK). *$\mathcal{G}$ が条件 (I) をみたしているとき、$\mathcal{G}$ によって与えられる bi-module X は条件 (I) をみたしている。*

Proof. 概略をのべる。グラフの (I) 条件により、任意の $i \in \Sigma$ を起点とする apperiodic なパスが作れる。これをすべて寄せ集めると、自然数 m に対して X の条件 (I) を与える projection P^m が構成できる。このとき、P^m は、A と可換な projection であるから、$a \to aP^m$ は単射準同型であり completely isometric である。また、$1 \le j \le m$ に対して、$P^m \sigma^j (P^m) = 0$ ととることもできる。 □

Proposition 18. *$\mathcal{G}$ が条件 (I) をみたしているとすると、O_X は D によって定義される Cuntz-Krieger 環と一致しており、これより Cuntz-Krieger 環は表現によらない。さらに、D が irreducible であれば O_X は simple である。*

つぎに、イデアルを考える。Σ の部分集合 C が hereditary であるとは、$i \in C$ で $(i,j) \in E$ なら $j \in C$ となることであり、saturated であるとは、$i \in \Sigma$ が任意の $(i,j) \in E$ に対して $j \in C$ となっていれば $i \in C$ となることとする。A の $J_X = J$ をみたす X-invariant イデアルは、Σ の saturated hereditary subset C に対応し、X/X_J は $\mathcal{G}$ から C に属する頂点、C を range にもつような辺をすべて取り除いたグラフによって定義される。

Definition 19 (C). $\mathcal{G}$ が条件 (II) をみたすとは、$\Sigma = \Sigma_0$ となることである。

Lemma 20. *$\mathcal{G}$ が条件 (II) をみたすとき、X は条件 (II) をみたす。*

Proof. $\mathcal{G}$ から saturated hereditary subset およびそれらを range にもつような辺を除いて作ったグラフも条件 (I) をみたしている。 □

Proposition 21 (C). *$\mathcal{G}$ が条件 (II) をみたしているとき、$\mathcal{G}$ によって定義される Cuntz-Krieger 環のノルム閉両側イデアルは Σ の saturated hereditary subset とラティス対応している。*

Remark 3.1. Σ を可算無限集合にしても、類似の命題が成立する。

3.2 Real bimodule

A を単位元を持つ C*-環とし、(X,ϕ) を right Hilbert A-A bimodule とする。right Hilbert A-A bimodule (Y,ψ) が X の conjugate であるとは、$R \in {}_A\mathcal{K}_A(A_A,(Y \otimes_A X)_A)$ と $\overline{R} \in {}_A\mathcal{K}_A(A_A,(X \otimes_A Y)_A)$ が存在して

$$(\overline{R}^* \otimes I_X) \circ (I_X \otimes R) = I_X$$
$$(R^* \otimes I_Y) \circ (I_Y \otimes \overline{R}) = I_Y$$

が成り立つことである。X の dimension $d(X)$ はすべての conjugate にたいして、$\inf \|R\|\|\overline{R}\|$ で与えられる。([LR])

right Hilbert A-A bimodule (X,ϕ) が real であるとは、$Y = \overline{X}$, $\overline{R} = R$ となるような conjugate が存在することである。これは、X に左内積が存在し、しかも左右対称になることを意味する。すなわち、

$$(R^* \otimes I_X) \circ (I_X \otimes R) = I_X$$

とかくことができる。$R \in {}_A\mathcal{K}_A(A_A,(X \otimes_A X)_A)$ であることより、この式は、$R\sigma(R) = I_X$ とかくことができる。

Inclusion $A \subset B$ から得られる $X = B_A$ は real bimodule の典型的な例である。さて、real bimodule は、(II) をみたしている。

Theorem 22. (X,ϕ) は単位元をもつ C^*-環 A 上の *Hilbert A-A bimodule* で、$\|(R^*R)^{-1}\| < 1$ をみたす R によって規定される *real bimodule* であるとする。そのとき、(X,ϕ) は *(II)-free* 条件をみたす。

したがって $\mathcal{J} \to \phi^{-1}(\mathcal{J} \cap \phi(A))$ は O_X のイデアルと A の X*-invariant* イデアルの 1 対 1 対応をあたえる。さらに、O_X が単純であることと、A が X*-simple* であることは同値になる。また、A が *non-nuclear* なら、O_X も *non-nuclear* になる。

Proof. A の任意の X-invariant イデアル J は $J_X = J$ をみたすこと、さらに X が (II) をみたすことを示す。

$R \in {}_A\mathcal{K}_A(A_A, (X \otimes_A X)_A)$ に対して、$S = R(R^*R)^{-1/2}$ とおく。$R^*R \in {}_A\mathcal{K}_A(A_A) \simeq Z(A)$ となる。R と $R(1) \in X \otimes X = X^{\otimes 2}$ を同一視すし、さらには、R と O_X の中における像も同一視する。そうすると、$S \in X^{\otimes 2}$ で $\phi(a)S = Sa$ が任意の $a \in A$ に対してなりたつ。また、$(S|S)_A = S^*S = I$ である。なお、積は O_X の中で考えている。これより S は O_X の isometry であることもわかる。J を X-invariant イデアルとし、$a \in J$ とする。任意の $x, y \in X$ に対して $(x|\phi(a)y)_A \in J$ と仮定する。J は X-invariant であるから、$(S|\phi(a)S)_A \in J$ である。そのとき、$(S|\phi(a)S)_A = (S|Sa)_A = (S|S)a = a \in J$ であり、J は、$J_X = J$ をみたす。

$$\begin{aligned} S^*\sigma(S) &= (R^*R)^{-1/2}R^*\sigma(R(R^*R)^{-1/2}) \\ &= (R^*R)^{-1/2}R^*\sigma(R)\sigma((R^*R)^{-1/2}) \\ &= (R^*R)^{-1/2}\sigma((R^*R)^{-1/2}) \end{aligned}$$

ここで、σ が $A' \cap O_X$ の準同型になることを用いた。したがって、

$$\|S^*\sigma(S)\| \le \|(R^*R)^{-1/2}\|\|\sigma(R^*R)^{-1/2}\| \le \|(R^*R)^{-1/2}\|^2 < 1$$

となる。

この S を用いて、$S_k = \sigma^{k-1}(S)\sigma^{k-2}(S)\cdots\sigma(S)S$ とおく。このとき、$S_k \in X^{2k}$ である。また、

$$\begin{aligned} S_k^*S_k &= S^*\sigma(S^*)\cdots\sigma^{k-1}(S^*)\sigma^{k-1}(S)\cdots\sigma(S)S \\ &= S^*\sigma(S^*)\cdots\sigma^{k-1}(S^*S)\cdots\sigma(S)S \\ &= I \end{aligned}$$

ここで、$S^*S = I$ と σ が $A' \cap O_X$ の準同型であることを再度使った。

簡単な計算により、$r_k = 2k$ として、$0 \le j \le k$ に対して、$S_k^*\sigma^j(S_k) \in \mathcal{F}_{r_k,r_k}$ となる。$S_k^*S_k = I$ であることより、(2) の条件は明らかになりたつ。(3) を示すために、Lemma 7 よりつぎの事実を復習する。$l \le m$ として、

$$P = \sum_{x \in X^{\times m}} S_x^* = \sum_{x_1,\cdots,x_m} S_{x_m}^*\cdots S_{x_1}^*$$

また、$T \in \phi(A)' \cap O_X$ とするとき、

$$P\sigma^l(T) = \sigma^{l-m}(T)P$$

が成り立つ。

$1 \leq j \leq k$ とする。

$$\begin{aligned}
&S_k^* \sigma^j(S_k) \\
=&S^*\sigma(S^*)\cdots\sigma^{k-1}(S^*)\left(\sigma^{k-1+j}(S)\sigma^{k-2+j}(S)\cdots\sigma^k(S)\cdots\sigma^j(S)\right) \\
=&S^*\sigma(S^*)\cdots\sigma^{k-2}(S^*)\sigma^{k-3+j}(S^*)\sigma^{k-1}(S^*)\sigma^{k-2+j}(S)\cdots\sigma^k(S)\cdots\sigma^j(S) \\
=&S_{k-1}^*\sigma^{k-3+j}(S)\sigma^{k-4+j}(S)\cdots\sigma^{k-1}(S)\sigma^{k-1}(S^*\sigma(S))\sigma^{k-1}(S)\cdots\sigma^j(S) \\
=&S_{k-1}^*\sigma^{k-1}(S_{j-1})\sigma^{k-1}(S^*\sigma(S))\sigma^j(S_{k-j})
\end{aligned}$$

これより、$\|S_k^*\sigma^j(S_k)\| \leq \|S^*\sigma(S)\| < 1$ となる。$j = k$ のときは、左端の項はなくなる。よって、X は (I)-free 条件をみたしている。

J は A の X-invariant イデアルとする。$J_X = J$ はみたされている。π は X から X/X_J への商写像とし、さらに、π_k は $X^{\otimes k} \to (X/X_J)^{\otimes k}$ であるとする。そのとき、$\pi_{2k}(S_k) \in (X/X_J)^{\otimes 2k}$ は、$\tilde{\phi}(A/J)' \cap {}^0O_{X/X_J}$ の isometry で、(I)-free 条件の (1),(2),(3) をみたしている。したがって (II)-free 条件がみたされ、イデアルの対応が成立する。

Lemma 5 により条件つき期待値 $E_A^{O_X} : O_X \to A$ が存在していた。A が non-nuclear なら、O_X も non-nuclear になる。 □

$d(X)^{-1} \leq \|(R^*R)^{-1}\|$ であり、A が単純環など、自明な中心をもつ場合をのぞけば、必ずしも $d(X) > 1$ は $\|(R^*R)^{-1}\|$ の十分条件ではない。Real bimodule の特殊な形である包含関係においては、もう少し弱い仮定から単純性定理がなりたつ。

Theorem 23. $A \subset B$ は単位元をもつ C^*-環の包含関係で、$E : B \to A$ は *finite index* の条件つき期待値で、$X = B_A$ は、$(x|y)_A = E(x^*y)$, $\phi(a)x = ax$ で (X, ϕ) は与えられているものとする。そのとき、$\mathrm{Ind}[X] \neq I$ かつ A が X-*simple* なら、O_X は単純になる。

Proof. $\mathrm{Ind}[X] \neq I$ と仮定する。Jones projection を e_A とすると、$e_A \neq I$ である。$e_A(x_0) \neq x_0$ となるような x_0 がある。また、$e_A \in \phi(A)' \cap {}_A\mathcal{K}_A(X_A)$ である。そこで、$q_k = e_A \otimes \cdots \otimes e_A \otimes (1 - e_A) \in {}_A\mathcal{K}_A(X_A^{\otimes k+1})$ を定義することができる。このとき、$q_k \in \phi(A)' \cap {}^0O_X$ である。さらに、$1 \leq m \leq k$ のとき、$q_k\sigma^m(q_k) = 0$ となる。さらに、

$$(q_k(1 \otimes \cdots 1 \otimes x_0)|(1 \otimes \cdots 1 \otimes (x_0 - e_A(x_0)))_A = (x_0 - e_A(x_0)|x_0 - e_A(x_0))_A \neq 0$$

であることから $q_k \neq 0$ であり、q_k は projection であるから、$\|q_k\| = 1$ である。

最後に (2) の性質を検証する。$\phi(a)$ は q_k と可換であるから、$a \to \phi(a)q_k$ は *-準同型である。この写像の核が $\{0\}$ であることを言えばよい。$a \to ae_A$ は同型であるから、

$$J = \{a \in A | ab = aE(b) \qquad \forall b \in B\}$$

とおくと、J は上の写像の核になっている。$a \in J,\ x, y, b \in B$ とすると、

$$\begin{aligned}(x|\phi(a)y)_A b &= E(x^*ay)b = E(x^*aE(y))b \\ &= E(x^*)aE(y)b = E(x^*)aE(y)E(b) \\ &= E(x^*aE(y)E(b) = (x|\phi(a)y)_A E(b)\end{aligned}$$

したがって J は X-invariant イデアルである。X が X-simple という仮定と、$\mathrm{Ind}[X] \neq I$ という仮定より、$J = \{0\}$ である。 □

4 純無限環

O_X が純無限になるための条件をあたえる。

Theorem 24. A は 単位元をもつ 純無限 C^*-環とし、(X, ϕ) は、*right Hilbert A-A bimodule* とする。もし、X が *(I)-free* なら、O_X は 純無限である。

Proof. $\mathcal{K}_A(X^{\otimes r})$ は A を成分にもつような行列環の full corner なので、純無限である。さらにその帰納極限 $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ も純無限である。

$T \in O_X$ を 0 でない正の元とする。$E_X(T)$ は 純無限環 $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ の 0 でない元なので、$W \in \mathcal{F}_\infty^{(0)}$ が存在して、$W^*E_X(T)W = I$ とできる。$S = W^*TW$ とおく。$E_X(S) = I$ である。S を代数的な元で近似する。$0 < \varepsilon < 1/5$ を任意にとって固定する。$B \in {}^0O_X$ の元 $\|S - B\| < \varepsilon$ となるものをとる。$B_0 = E_X(B) \in {}^0O_X \cap \mathcal{F}_\infty^{(0)}$ である。そのとき、$\|I - B_0\| = \|E_X(S - B)\| < \varepsilon$ である。$C = B - B_0 + I \in {}^0O_X$ とおく。$\|C - B\| < \varepsilon$ であり、さらに、$\|S - C\| < 2\varepsilon$ である。C は代数的な元なので、$C = \sum_{j=-k}^{k} C_j$ とかける。さらに p を十分大きくとっておいて、$C_j \in \mathcal{K}(X^{\otimes p}{}_A, X^{\otimes p+j}{}_A)$ としておくことが可能である。$C_0 = E_X(C) = I$ である。

前の (I)-free を用いた単純性の証明、ε に対して取り直した T_k^ε を用いて、

$$\|T_k^{\varepsilon *}ST_k^\varepsilon - T_k^{\varepsilon *}T_k^\varepsilon\| \leq \|T_k^{\varepsilon *}(S - C)T_k^\varepsilon\| + \|T_k^{\varepsilon *}(C - C_0)T_k^\varepsilon\| < 3\varepsilon$$

$\|T_k^{\varepsilon *}T_k^\varepsilon\| = 1$ であるから、$\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ の純無限性により、$V \in \mathcal{F}_\infty^{(0)}$ が存在して、$V^*T_k^{\varepsilon *}T_k^\varepsilon V = I,\ \|V\| < 1 + \varepsilon$ とできる。従って、

$$\|V^*T_k^{\varepsilon *}ST_k^\varepsilon V - I\| = \|V^*T_k^{\varepsilon *}ST_k^\varepsilon V - V^*T_k^{\varepsilon *}T_k^\varepsilon V\| < 3\varepsilon(1 + \varepsilon)^2 < 108/125 < 1$$

とできる。$V^*T_k^{\varepsilon *}ST_k^{\varepsilon}V$ は正値可逆元である。両側に Z^*, Z をかけて I にできる。すべて組み合わせると、$Y^*TY = I$ となる Y をみつけたことになり、O_X は purely infinite になる。 □

Remark 4.1. この定理は、もう少し弱いテクニカルな条件のもとでも成立する。また、単純性があらかじめわかっていれば、条件 (I) は不要である。

References

[CK] J.Cuntz and W.Krieger, *A class of C^*-algebras and topological Markov chains,* Invent.Math. 56(1980), 251-268

[C] J. Cuntz *A class of C^*-algebras and topological Markov chains II: Reducible chains and the Ext-functor for C^*-algebras,* Invent. Math. 63(1981), 23-40

[KPW] T.Kajiwra, C.Pinzari and Y.Watatani, *Ideal structure and simplicity of the C^*-algebras generated by Hilbert bimodues,* preprint

[KW1] T.Kajiwara and Y.Watatani, *Jones index theory by Hilbert C^*-bimodules and K-theory,* preprint

[KW2] T.Kajiwara and Y.Watatani, *Crossed products of Hilbert C^*-bimodules by countable discrete groups,* to appear in Proc. Amer.Math. Soc.

[Kat] Y.Katayama, *Generalized Cuntz algebras $\mathcal{O}_N^M$,* RIMS Kokyuroku 858 (1994),131-151.

[KMW] Y. Katayama, K. Matsumoto and Y. Watatani, *Simple C^* algebras arising from β-expansion of real numbers,* Preprint.

[Ki] A.Kishimoto, *Outer automorphisms and reduced crossed products of simple C^*-algebras,* Comm. Math. Phys. 81 (1981), 429-435.

[LR] R. Longo, J.E. Roberts, *A theory of dimension,* Preprint.

[Pi] M.Pimsner, *A class of C^*-algebras generalizing both Cuntz-Krieger Algebras and Crossed products by $\mathbf{Z}$ in 'Free Probability theory',* Fieldes Institute Communications 12(1997)

[W] Y. Watatani, *Index for C^*-subalgebras,* Memoir Amer. Math. Soc. 424(1990).