数理解析研究所講究録
1026巻 1998年 212-213

圏の HASSELBERG ζ

黒川信重
(東京工大・理・数学)

$\mathcal{C}$を零対象0を持つ圏とする.

[1] $\mathcal{C}$の "Hasse ζ" を次のように定義する:

$$\zeta_{\mathcal{C}}^{\mathrm{Hasse}}(s) = \prod_{p \in P_0(\mathcal{C})} (1 - N(p)^{-s})^{-1}.$$

ここで, $\mathcal{C}$の対象 X のノルムを $N(X) = \#\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ ときめ

$$P_0(\mathcal{C}) = \{ X \text{は} \mathcal{C} \text{の単純対象} \mid N(X) < \infty \} / (\mathcal{C}\text{の同値})$$

とおく。

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbf{Z}$上有限生成の可換環 R と自然数 n に対して $M_n(R)$ を R 上の n次行列環とし, 左 $M_n(R)$-加群の圏を $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(M_n(R))$ とすると $\zeta_{\mathcal{C}}^{\mathrm{Hasse}}(s)$ は可換環 Rの通常のHasse ζ と一致する:

$$\zeta_{\mathcal{C}}^{\mathrm{Hasse}}(s) = \prod_{\substack{m \subset R \\ \text{極大イデアル}}} \left(1 - (\#(R/m))^{-s}\right)^{-1}.$$

($R = \mathbf{Z}$ のときはリーマン・ゼータである。圏論的構成なので n によらない。通常の多元環のζとは異なる。)

[2] $\widetilde{\mathcal{C}}$ を $\mathcal{C}$ の道(path)の圏
($\widetilde{\mathcal{C}}$ の対象は $\mathcal{C}$ の射の列 $\mathbf{f}: \cdots \to X_{-1} \xrightarrow{f_{-1}} X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots$)
とすると，$\widetilde{\mathcal{C}}$ は $\cdots \to 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \cdots$ を零対象とする圏となる。$\widetilde{\mathcal{C}}$ の対象 $\mathbf{f}$ のノルムを

$$N(\mathbf{f}) = \#\mathrm{End}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathbf{f})$$ ときめて

$$P_1(\mathcal{C}) = \{\mathbf{f} \text{ は } \widetilde{\mathcal{C}} \text{ の単純対象} \mid N(\mathbf{f}) < \infty\} / (\widetilde{\mathcal{C}} \text{ の同値}+\text{ずらし})$$

とおく。そこで，$\mathcal{C}$ の "Selberg ζ" を次のように定義する：

$$\zeta_{\mathcal{C}}^{\mathrm{Selberg}}(s) = \prod_{p \in P_1(\mathcal{C})} (1 - N(p)^{-s})^{-1}.$$

このとき $\zeta_{\mathcal{C}}^{\mathrm{Hasse}}(s) = \zeta_{\mathcal{C}}^{\mathrm{Selberg}}(s)$ となっている
("HASSELBERG ζ")。

$\boxed{\text{注意}}$ ここで $\mathcal{C}$ の "Selberg ζ" とは $\mathcal{C}$ の道から決めたという意味で使っているだけである。通常の Selberg ζ および Ihara ζ とは全く別種のものである。

文献：N. Kurokawa "Zeta functions of categories"
Proc. Japan Acad. 72A (1996) 221–222.