数理解析研究所講究録
1026 巻 1998 年 20-27

Greenberg 予想について

早稲田大学理工学部　尾崎 学 (Manabu Ozaki)

1. 序

代数体 (以下では断らない限り有限次) k と固定された素数 p に対して, k_{∞} で k の円分的 $\mathbb{Z}_p$- 拡大体を表す. 即ち, $k \subseteq k_{\infty} \subseteq k(\mu_{p^{\infty}})$($\mu_{p^{\infty}}$ は 1 のすべての p- 冪乗根がなす群) で $\mathrm{Gal}(k_{\infty}/k) \simeq \mathbb{Z}_p$($p$- 進整数環の加法群) となる k の (唯一の) 拡大体である. k_n を k_{∞}/k の k 上 p^n 次の中間体, A_n を k_n のイデアル類群の p-Sylow 部分群とすると, A_n の位数に関して次の定理がある:

定理 (岩澤[8])　ある整数 $\lambda_p(k), \mu_p(k) \geq 0$ と $\nu_p(k)$ で, 十分大なるすべての n に対して

$$\# A_n = p^{\lambda_p(k)n+\mu_p(k)p^n+\nu_p(k)}$$

となるものが存在する.

この素数 p と代数体 k によって定まる不変量 $\lambda_p(k), \mu_p(k)$ と $\nu_p(k)$ は岩澤不変量と呼ばれ, これらは岩澤理論に於ける主要な研究対象の 1 つである.

この岩澤不変量に関して次の予想 (問題) がある ([9, p.316], [5] 参照):

Greenberg 予想　k が総実代数体ならば, すべての素数 p に対して

$$\lambda_p(k) = \mu_p(k) = 0$$

が成立する?

同値な言い替えをすれば, k が総実代数体のときには,

(i) $\# A_n$ $(n \geq 0)$ が有界,
(ii) k_{∞} のイデアル類群の p- 準素成分が自明,
(iii) $\#\mathrm{Gal}(L(k_{\infty})/k_{\infty}) < \infty$, ここに $L(k_{\infty})/k_{\infty}$ は最大不分岐 pro-p abel 拡大,

となるであろうかという問題である. 例えばすべての素数 p に対して $\lambda_p(\mathbb{Q}) = \mu_p(\mathbb{Q}) = 0$ が成立する. 有理数体 $\mathbb{Q}$ は Greenberg 予想が正しいことが知られている唯一の総実代数体の実例である.

この予想に関連して, μ_p- 不変量については次が知られている:

定理 (Ferrero-Washington[1]) k が abel 体であれば, すべての素数 p に対して $\mu_p(k) = 0$ が成立する.

代数体 k が総実でなくとも, すべての素数 p に対して $\mu_p(k) = 0$ が成り立つものと予想されており, 上の定理はそれが, k が abel 体のときには正しいということを言っている. 従って実 abel 体 k に対する Greenberg 予想においては $\lambda_p(k)$ のみが問題となる.

次に Greenberg 予想の成立から帰結される興味深い事実の一例を挙げる. p を奇素数, k を虚 abel 体とし, $\mu_p \subseteq k$, $p \nmid [k:\mathbb{Q}]$ を仮定する. $X = \mathrm{Gal}(L(k_\infty)/k_\infty)$ は自然に有限生成捻れ $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(k_\infty/\mathbb{Q})]]$- 加群となる. このとき k の最大実部分体 k^+ と p に対する Greenberg 予想が正しいと, X の Λ- 加群構造について次の興味深い事実が成り立つ:

定理 (Greenberg[5]) 上の状況で $\lambda_p(k^+) = \mu_p(k^+) = 0$ が成立しているならば, ある $0 \neq f \in \Lambda$ があって, X は有限指数で巡回 Λ- 加群 $\Lambda/f\Lambda$ を含む.

さらにこの定理により, $\lambda_p(k^+) = \mu_p(k^+) = 0$ から k と p に対する岩澤主予想が帰結される ([4]). 即ち, この場合で言えば, 上の $\Lambda/f\Lambda$ が久保田 -Leopoldt p- 進 L- 函数 $L_p(s,\chi)$ ($\chi \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(k^+/\mathbb{Q}), \overline{\mathbb{Q}}_p^\times)$) で完全に記述される. これは丁度, Vandiver 予想 "奇素数 p は $\mathbb{Q}(\mu_p)^+$ の類数を割らないであろう" が成立しているならば $\mathbb{Q}(\mu_{p^n})$ のイデアル類群の p-Sylow 部分群が Galois 加群として巡回的であって, $\mathbb{Q}(\mu_p)$ に対する岩澤主予想が成立するという岩澤の結果の類似になっている. abel 体に対する岩澤主予想は Mazur-Wiles[16] によって Greenberg 予想の正否とは無関係に証明されているが, 依然 Greenberg 予想や上の定理の結論が常に成立しているかどうかは未解決のままである.

Greenberg 予想については近年数値実験 (特に実二次体) を中心に盛んに研究がなされている. 従来の $\lambda_p = \mu_p = 0$ の判定では高次の代数体の基本単数を計算する必要があり, それが一つの困難になっていたが, 市村 - 隅田[6] においては 実 abel 体 k と素数 p に対して, $\lambda_p(k) = 0$ の成立に対する基本単数のデータに依存しない判定法が開発され, それによって実二次体 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})(1 < m < 10000)$ に対して $\lambda_3(k) = 0$ が計算機による数値計算で確認されている. Kraft-Schoof[14], 栗原[15] もやはり基本単数のデータに依存しない判定法を与えている. これら多くの努力にも拘らず, 現状では与えられた k と p に対して, $\lambda_p(k) = \mu_p(k) = 0$ が成立しているかどうかを有限回の手続きで決定するアルゴリズムは (k を実二次体に限っても) 知られていない.

本報告では次の問題に関するいくつかの結果について述べる:

問題 k を総実代数体, p を素数とする. このとき $\lambda_p(k) = \mu_p(k) = 0$ であれば k の総実な有限次 Galois p- 拡大体 k' に対しても $\lambda_p(k') = \mu_p(k') = 0$ が成立するか? 特に有理数体の総実な有限次 Galois p- 拡大体に対しては $\lambda_p = \mu_p = 0$ が成立しているか?

このような問題を考える Greenberg 予想研究における意義を述べると, まず第一にこの場合には (予想が正しいのであれば)$\lambda_p(k') = \mu_p(k') = 0$ が示し易いと思われる. それは一般に λ_p-, μ_p- 不変量は p- 拡大で "遺伝" し易いという事実があるからである. 例えば μ_p- 不変量については次の著しい結果がある:

定理 (岩澤[10]) k'/k を無限素点が不分岐であるような有限次代数体の Galois p- 拡大とするとき, $\mu_p(k) = 0$ であれば, $\mu_p(k') = 0$ が成立する.

λ_p- 不変量に関しても, $\mu_p(k)=0$ であるような CM- 体の Galois p- 拡大 k'/k に対して, $\lambda_p(k')^-(:=\lambda_p(k')-\lambda_p(k'^+))$ を $\lambda_p(k)^-$ と k'_∞/k_∞ での素点の分岐指数で表す木田の公式と呼ばれる公式が知られている ([12], [13]).

第二に, この場合にはイデアル類群の p- 階数が大きい実例を扱える. 現在のところ $\lambda_p=\mu_p=0$ となることが知られている実二次体のイデアル類群の p- 階数は最大でも 2 で, 階数が高いときには $\lambda_p=\mu_p=0$ は大丈夫かという不安がある (特に根拠はないのであるが, 類体塔に関する Furtwängler の予想の末路を考えると). この場合には種の理論によりイデアル類群の p- 階数をコントロールできるので, p- 階数が大きくて $\lambda_p=\mu_p=0$ となるものを見つけ易いという利点がある.

本文の以降の内容は次の通りである: 第 2 節では, 総実代数体の有限次 Galois p- 拡大 k'/k で $\lambda_p(k)=\mu_p(k)=0$ となるものに対して, $\lambda_p(k')=\mu_p(k')=0$ となるための必要十分条件について述べる. 第 3 節では, 特に $p=2$ の場合を扱い, $\lambda_2=\mu_2=0$ となる実二次体の無限族を与える.

2. 相対 p- 拡大体の岩澤 λ_p-, μ_p- 不変量

この節では先に序で述べた問題が肯定的な答を持つための必要十分条件について解説する. 以下 "有限次 Galois p- 拡大" を単に "p- 拡大" と略す.

十分条件ついては岩澤氏の次の結果がある:

定理 (岩澤[11]) k を総実代数体で素数 p は k の類数と素で k で不分解と仮定する (例えば $k=\mathbb{Q}$). このとき k の総実な p 次巡回拡大体 k' が次の (i),(ii) を満たせば, $\lambda_p(k')=\mu_p(k')=0$ が成り立つ:
(i) p は k' の類数と素,
(ii) k'/k で分岐する k の素点は k_∞/k で不分解.

ここで一般に代数体 F と, F の類数と素で F で分解しない素数 p に対しては $\lambda_p(F)=\mu_p(F)=\nu_p(F)$ が成立するので (岩澤[7]), 上の定理の仮定から基礎体 k では $\lambda_p(k)=\mu_p(k)=0$ が自動的に成立していることを注意しておく.

[11] ではこれを用いて, 奇素数 p に対して $\lambda_p=\mu_p=0$ となる有理数体の総実 (p,p)-拡大体の無限族を構成している. Greenberg[5], 山本 (現)[17], 福田[2] も各々これとは異なる方法で無限族を構成している.

次の定理は一般の総実代数体の相対 p- 拡大で, 基礎体の $\lambda_p=\mu_p=0$ が拡大体に "遺伝" するための必要十分条件を与えるものである (相対 p 次拡大の場合は[3] 参照):

定理 1 k'/k を総実代数体の p- 拡大で $\lambda_p(k)=\mu_p(k)=0$ とする. このとき $\lambda_p(k')=\mu_p(k')=0$ と次の (a), (b) が成立することは同値:
(a) 任意の k'_∞/k_∞ で分岐している k'_∞ の素イデアル $\mathfrak{Q}$ に対して, 相異なる $\mathfrak{Q}^\sigma$ ($\sigma\in\mathrm{Gal}(k'_\infty/k_\infty)$) すべての積を含む k'_∞ のイデアル類群のイデアル類の位数が p と素,
(b) $H^2(k'_\infty/k_\infty, E_{k'_\infty})=0$.
ここに $E_{k'_\infty}$ は k'_∞ の単数群.

条件 (b) については次が成立する (相対 p 次拡大の場合は[11], [3] 参照):

定理 2 k を総実代数体で素数 p は k の類数と素で k で不分解と仮定する．このときすべての総実な p- 拡大 K/k_∞ に対して

$$\hat{H}^0(K/k_\infty, E_K) = 0$$

が成り立つ．特に巡回 p- 拡大 K/k_∞ に対しては

$$H^2(K/k_\infty, E_K) = 0$$

となる．

この節の初めの岩澤の定理は，定理 1，2 から導くことができる．

例 ([3]) $k = \mathbb{Q}, p = 3$ とする．素数 $l \equiv 1 \pmod 3$ に対して $k' = \mathbb{Q}_{(l)}$ を導手 l の 3 次実 abel 体とすると，定理 2 より $H^2(k'_\infty/k_\infty, E_{k'_\infty}) = 0$．下の素数 l に対しては $\lambda_3(\mathbb{Q}_{(l)}) = \mu_3(\mathbb{Q}_{(l)}) = 0$ となることが定理 1 の条件 (a) を計算機で確かめることによって分かる:

$$l = 523, 1531, 4951, 5059, 5851, 6067, 9109$$

尚，$\mathbb{Q}_{(l)}$ の類数は 3 と素であり，$l \not\equiv 1 \pmod 9$ のときには l が $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ で不分解なので，このときにはこの節の冒頭で述べた岩澤の結果により $\lambda_3(\mathbb{Q}_{(l)}) = \mu_3(\mathbb{Q}_{(l)}) = 0$ となる．

定理 1 によれば k の個々の与えられた p- 拡大体 k' に対して，条件 (a),(b) が成立していることが $\lambda_p(k') = \mu_p(k') = 0$ となるための必要十分条件であったが，k の<u>すべての</u> p- 拡大体 k' に対して $\lambda_p(k') = \mu_p(k') = 0$ となるためには，(b) の条件が<u>すべての</u> p- 拡大体 k' に対して成立していれば良いことが示される:

定理 3 p を素数，k を $\lambda_p(k) = \mu_p(k) = 0$ なる総実代数体とする．このとき次は同値:
(i) k のすべての総実な p- 拡大体 k' に対して $\lambda_p(k') = \mu_p(k') = 0$,
(ii) k のすべての総実な p- 拡大体 k' に対して $H^2(k'_\infty/k_\infty, E_{k'_\infty}) = 0$ が成立する．

従って序で述べた問題は，定理 1 の条件 (b) は常に成立しているのかという総実代数体の $\mathbb{Z}_p$- 拡大体の単数群の 2 次元コホモロジー群の問題に帰着されることが分かった．しかし，これに関してはは今のところ定理 2 以上のことは知られていない．定理 2 の k に対する条件を緩めることや，非巡回拡大に対しても 2 次元コホモロジー群が消えるような場合を見つけることなどが今後の課題として挙げられる．

3. $p = 2$ の場合

この節では $p = 2$ と実 abel 体 (特に実二次体) に対して前節とは違ったアプローチで問題に取り組む．

まず岩澤主予想について説明するため，記号を準備する．k を実 abel 体，$p \geq 2$ を素数として，k の導手は $p^2 (p \neq 2$のとき$)$, $8 (p = 2$のとき$)$ で割れないとする．代数体 F に対して F_∞ で F の円分的 $\mathbb{Z}_p$- 拡大体を表す．$\Gamma = \mathrm{Gal}(k_\infty/k) = \overline{\langle\gamma\rangle}$, $\Delta = \mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$ とお

き, $\kappa \in \mathbb{Z}_p$ を $\zeta^{\tilde{\gamma}} = \zeta^{\kappa}$ $(\forall \zeta \in \mu_{p^\infty})$, ここに $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Gal}(k(\mu_{p^\infty})/k(\mu_p)), \tilde{\gamma}|_{k_\infty} = \gamma$, で定義する. $L(k_\infty)$, $M(k_\infty)$ を各々 k_∞ の最大不分岐 pro-p abel 拡大体, 最大 p- 分岐 pro-p abel 拡大体とする. $X = \mathrm{Gal}(L(k_\infty)/k_\infty)$, $\mathfrak{I} = \mathrm{Gal}(M(k_\infty)/L(k_\infty))$, $\mathfrak{X} = \mathrm{Gal}(M(k_\infty)/k_\infty)$ とおくとこれらは有限生成捻れ $\Lambda := \mathbb{Z}_p[\Delta][[\Gamma]]$- 加群で, $\mathbb{Z}_p$ 上でも有限生成である. 次に $\mathbb{Z}_p[\Delta]$- 加群 M と $\chi \in \mathrm{Hom}(\Delta, \overline{\mathbb{Q}}_p^\times)$ に対して, M の χ- 部分 M^χ を $M^\chi = M \otimes_{\mathbb{Z}_p[\Delta]} \mathbb{Z}_p[\chi(\Delta)]$ $(\delta \in \Delta,\ r \in \mathbb{Z}_p[\chi(\Delta)]$ に対して $\delta r := \chi(\delta) r)$ で定義する. k と p に対する Greenberg 予想 $\lambda_p(k) = \mu_p(k) = 0$ は

$$\text{すべての } \chi \in \mathrm{Hom}(\Delta, \overline{\mathbb{Q}}_p^\times) \text{ に対して} \# X^\chi < \infty$$

と同値であることに注意しよう.

以下, 固定された Γ の位相的生成元 γ と $1+T$ を対応させる同型 $\Lambda \simeq \mathbb{Z}_p[\Delta][[T]]$ で Λ を冪級数環 $\mathbb{Z}_p[\Delta][[T]]$ と同一視する. このとき $\Lambda^\chi = \mathbb{Z}_p[\chi(\Delta)][[T]]$ となる.

$L_p(s,\chi)$ を久保田 -Leopoldt p- 進 L- 函数とすると, $1 \neq \chi \in \mathrm{Hom}(\Delta, \overline{\mathbb{Q}}_p^\times)$ に対して, ある冪級数 $f_\chi(T) \in 2\Lambda^\chi$ で

$$L_p(s,\chi) = f_\chi(\kappa^s - 1),\ s \in \mathbb{Z}_p$$

となるものが存在する. この $f_\chi(T)$ を岩澤冪級数と呼ぶ. $f_\chi^*(T) = f_\chi(\kappa(1+T)^{-1}-1) \in \Lambda^\chi$ とおく.

岩澤主予想は Λ^χ- 加群 $\mathfrak{X}^\chi$ の構造が p- 進 L- 函数 $L_p(s,\chi)$ と深い繋がりがあることを主張するものであり, Mazur-Wiles[16]($p=2$ の場合は Wiles[18]) によって証明された:

定理 (岩澤主予想 =Mazur-Wiles の定理) $1 \neq \chi \in \mathrm{Hom}(\Delta, \overline{\mathbb{Q}}_p^\times)$ に対して,

$$\mathrm{char}_{\Lambda^\chi}(\mathfrak{X}^\chi) = \frac{1}{2} f_\chi^*(T) \Lambda^\chi.$$

ここに $\mathrm{char}_{\Lambda^\chi}(\mathfrak{X}^\chi)$ は Λ^χ- 加群 $\mathfrak{X}^\chi$ の特性イデアルを表す.

注意 $\chi = 1$ のときは $\mathfrak{X}^\chi = 0$ となる.

この定理と完全系列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

より,

$$\frac{1}{2} f_\chi^*(T) \Lambda^\chi = \mathrm{char}_{\Lambda^\chi}(X^\chi) \mathrm{char}_{\Lambda^\chi}(\mathfrak{I}^\chi)$$

が得られる. ここで $\# X^\chi < \infty$ は $\mathrm{char}_{\Lambda^\chi}(X^\chi) = \Lambda^\chi$ と同値であることに注意しよう. $f_\chi^*(T)$ を任意の精度で計算するアルゴリズムがあるので, 上の式は X^χ の実効的な "上界" を与えていると見ることができる. この事実は実 abel 体の Greenberg 予想の研究において重要な役割を果たしている.

さて, $\# \mathfrak{X}^\chi < \infty$ のときは問題なく $\# X^\chi < \infty$ である. そうでないときには $\# X^\chi < \infty$ となるためにはまず $\frac{1}{2} f_\chi^*(T) \Lambda^\chi \subsetneq \mathrm{char}_{\Lambda^\chi}(X^\chi)$, 言い替えるならば $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2}(X^\chi) < \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2}(\mathfrak{X}^\chi)$ でなければならないが, $p=2$ の場合には次のことが言える:

定理 4 $p = 2$ として, 実 abel 体 k は上と同様とする. $\chi(2) = 1$ となる $1 \neq \chi \in \mathrm{Hom}(\Delta, \overline{\mathbb{Q}}_2^{\times})$ に対して,

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2}(X^{\chi}) \leq \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2}(\mathfrak{X}^{\chi}) - [\mathbb{Q}_2(\chi(\Delta)) : \mathbb{Q}_2]$$

が成り立つ.

特に $\frac{1}{2}f_{\chi}(T)$ が既約元のときには $\frac{1}{2}f_{\chi}^{*}(T)$ も既約元で, $\frac{1}{2}f_{\chi}^{*}(T)\Lambda^{\chi} \subsetneq \mathrm{char}_{\Lambda^{\chi}}(X^{\chi})$ ならば $\mathrm{char}_{\Lambda^{\chi}}(X^{\chi}) = \Lambda^{\chi}$ となるので次の系を得る:

系 k, χ は定理 4 と同様とする. もしも $\frac{1}{2}f_{\chi}(T) \in \Lambda^{\chi}$ が既約元であれば, $\#X^{\chi} < \infty$.

例 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $m = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, 113, $273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$, 337 に対しては 2 は k で分解しており, χ を k に対応する非自明な指標とすれば $\chi(2) = 1$. $f_{\chi}(T) = (T^3 + aT^2 + bT + c)U(T)$, $U(T) \in \mathbb{Z}_2[[T]]^{\times}$, $a, b, c \in 2\mathbb{Z}_2$, $T^3 + aT^2 + bT + c$ は $\mathbb{Z}_2[T]$ の既約多項式, となるので, $f_{\chi}(T) \in \Lambda^{\chi} = \mathbb{Z}_2[[T]]$ は既約元. 従って上の系により $X^{\chi} < \infty$ となるが, $\chi = 1$ ならば $X^{\chi} = 0$ なので, $\lambda_2(k) = \mu_2(k) = 0$ となる.

これは素数 2 の著しい特性である. 以下では実二次体に対してこの系を適用して, $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ となる実二次体の無限族を与える.([19] 参照. [19] ではここととは違った手法を使っている.)

定理 5 m が次のいずれかを満たすとする (p, q は相異なる素数):
(i) $m = p \equiv 1 \pmod{16}$, $2^{\frac{p-1}{4}} \equiv -1 \pmod{p}$
(ii) $m = p \equiv 9 \pmod{16}$
(iii) $m = pq$, $p \equiv q \equiv 3 \pmod{8}$
(iv) $m = pq$, $p \equiv q \equiv 5 \pmod{8}$
このとき $\lambda_2(\mathbb{Q}(\sqrt{m})) = \mu_2(\mathbb{Q}(\sqrt{m})) = 0$.

注意 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ とすると, (i) では $A_n = 0$ $(\forall n \geq 0)$, (ii) では A_n は巡回群 (自明なこともある)$(\forall n \geq 0)$, (iii),(iv) では A_n は非自明な巡回群 $(\forall n \geq 0)$.

定理 5 の証明の概略を述べる. $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$, χ を k に対応する非自明な指標とすれば $\chi(2) = 1$. (i) の場合には $\frac{1}{2}f_{\chi}(T)$ が "Eisenstein 型"(即ち定数項がきっかり 2 で割り切れる), (ii) ～ (iv) の場合には $\frac{1}{2}f_{\chi}(T) = (T - \alpha)U(T)$, $\alpha \in 2\mathbb{Z}_2$, $U(T) \in \mathbb{Z}_2[[T]]^{\times}$ となり, いずれの場合にも $\frac{1}{2}f_{\chi}(T)$ は既約になるので, 定理 4 の系より $\lambda_2(k) = 0$ が分かる.

最後にもう一つ別の種類のの無限族を与えよう. 上の定理 5 ではイデアル類群の 2-階数が高々 1 となる実二次体の族を構成したが, ここでは 2- 階数が 2 で $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ となる実二次体の無限族を構成する.

定理 6 p, q, r を次の条件 (a),(b),(c) を満たす相異なる素数とする:

(a) $p \equiv q \equiv 5 \pmod 8$, $r \equiv 1 \pmod 8$

(b) $\left(\frac{pq}{r}\right) = -1$ ($\left(\frac{*}{*}\right)$ は Legendre 記号)

(c) 適当な埋め込み $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \hookrightarrow \mathbb{Q}_r$ で $1+\sqrt{2} \notin (\mathbb{Q}_r^\times)^2$.

このとき $\mathbb{Q}(\sqrt{pqr})$ のイデアル類群の 2- 階数は 2 で, $\lambda_2(\mathbb{Q}(\sqrt{pqr})) = \mu_2(\mathbb{Q}(\sqrt{pqr})) = 0$.

上の条件 (a) ～ (c) を満たす素数 p, q, r の組は無数に存在することが分かるので, イデアル類群の 2- 階数が 2 で $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ となる実二次体が無数に存在することになる.

この定理は序でも述べた, イデアル類群の p- 階数が大きくて $\lambda_p = \mu_p = 0$ となっている実二次体を見つけるという問題への第一歩であるが, 今のところイデアル類群の 2- 階数が 3 以上となる $p = 2$ に対する実二次体の無限族は見つかっていない. しかし直接計算機で岩澤冪級数 $\frac{1}{2}f_\chi(T)$ の既約性を確かめれば, 定理 4 の系によってイデアル類群の 2- 階数が大きくて $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ となる実二次体の実例は見つかる可能性がある.

REFERENCES

1. B. Ferrero and L. C. Washington, The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, *Ann. of Math.* **109** (1979), 377–395.
2. T. Fukuda, On the vanishing of Iwasawa invariants of certain cyclic extensions of $\mathbb{Q}$ with prime degree, *Proc.Japan Acad. Ser.A* **73** (1997), 108–110.
3. T. Fukuda, K. Komatsu, M. Ozaki and H. Taya, On Iwasawa λ_p-invariants of relative real cyclic extensions of degree p, to appear in *Tokyo J. of Math.*
4. R. Greenberg, On p-adic L-functions and cyclotomic fields, *Nagoya Math.J.* **56** (1975), 61–77.
5. R. Greenberg, On the Iwasawa invariants of totally real number fields, *Amer. J. Math.* **98** (1976), 263–284.
6. H. Ichimura and H. Sumida, On the Iwasawa λ-invariants of certain real abelian fields II, *International J. Math.* **7** (1996), 721–744.
7. K. Iwasawa, A note on class numbers of algebraic number fields, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **20** (1956), 257–258.
8. K. Iwasawa, On Γ-extensions of algebraic number fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* **65** (1959), 183–226.
9. K. Iwasawa, On $\mathbb{Z}_l$-extensions of algebraic number fields, *Ann. of Math.* **98** (1973), 246–326.
10. K. Iwasawa, On the μ-invariants of $\mathbb{Z}_l$-extensions, *Number theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Yasuo Akizuki, Kinokuniya, Tokyo*, 1973, 1–11.
11. K. Iwasawa, A note on capitulation problem for number fields II, *Proc. Japan Acad. Ser. A* **65** (1989), 183–186.
12. Y. Kida, l-extensions of CM-fields and cyclotomic invariants, *J. of Number Theory* **12** (1980), 519–528.
13. Y. Kida, Cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extensions of J-fields, *J. of Number Theory* **14** (1982), 340–352.
14. J. S. Kraft and R. Schoof, Computing Iwasawa modules of real quadratic number fields, *Compositio Math.* **97** (1995), 135–155.
15. M. Kurihara, The Iwasawa λ-invariants of real abelian fields and the cyclotomic elements, preprint 1995.
16. B. Mazur and A. Wiles, Class fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$, *Invent. Math.* **76** (1984), 179–330.

17. G. Yamamoto, On the vanishing of Iwasawa invariants of certain (p,p)-extensions of $\mathbb{Q}$, *Proc. Japan Acad. Ser. A* **73**(1997), 45–47.
18. A. Wiles, The Iwasawa conjecture for totally real fields, *Ann. of Math.* **131** (1990), 493–540.
19. M. Ozaki and H. Taya, On the Iwasawa λ_2-invariants of certain families of real quadratic fields, *Manuscripta Math.* **94** (1997), 437–444.

尾崎 学 (Manabu Ozaki)
早稲田大学 理工学部
〒169 東京都新宿区大久保 3-4-1
e-mail: ozkm@mn.waseda.ac.jp