

2次元非発散流の統計的平衡解とその計算法について

石岡 圭一 (東大院・数理科学)

1 はじめに

2次元非発散流体の特徴として、不安定等によって生じた乱流状態から孤立渦 (coherent vortex) への組織化が起こり、外部からの強制等のない場合には、最終的に領域サイズのスケールを持つ大きな孤立渦にまとまって定常的になることが知られている (McWilliams, 1984). このような性質に対して、さまざまな理論的解釈が試みられてきたが、近年になって、系のもつ保存則などを十分に考慮した統計力学的理論が提出され (Robert and Sommeria, 1991), 数値実験による理論の検証も行われている (Sommeria, Staquet and Robert, 1991). この統計理論は、最終的に出現するパターンを統計的平衡解として説明しようとするものであるが、その統計的平衡解は複雑な偏微分方程式の解として記述され、一般的な状況のもとでは計算に非常な困難を伴う. そこで、本研究では、この統計理論に則して、一般的な状況でも使える平衡解計算のためのアルゴリズムを提出するとともに、そのアルゴリズムによって統計的平衡解を実際に計算し、直接に支配方程式を時間積分した結果出現した最終状態との比較を行った.

2 統計理論の紹介

ここでは、本研究の基礎となる2次元流体の統計理論 (Robert and Sommeria, 1991) の概略を紹介する. 本来、この理論は平面ジオメトリにおいて提出されたものであるが、本研究で行った数値実験との対応のため、球面ジオメトリに拡張した形で紹介する.

2.1 基礎方程式

理論の対象としている流体は、2次元非発散非粘性流体であり、支配方程式は以下のような渦度方程式で記述される:

$$\frac{Dq}{Dt} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial q}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial q}{\partial \lambda} \right) = 0. \quad (1)$$

ここに、 $q \equiv \nabla^2 \psi$: 渦度, $\psi(\lambda, \mu, t)$: 流線関数, t : 時刻, λ : 経度, $\mu \equiv \sin \phi$: サイン緯度, a : 球半径, ∇^2 : 球面上の水平ラプラシアン, である. すなわち、渦度 q は流れに沿って保存される.

2.2 理論の概略

基礎方程式より、2次元非発散非粘性流体では流体粒子の運動に沿って渦度が保存される. さらに、非発散性から各流体粒子の面積も保存される. そこで、不安定などによって生じた乱流の状態においては、これらの流体粒子をランダムに動く質点のようにみなし、統計力学的な取り扱いをすることによって最終的に出現する平衡状態が予測できるのではないかというのがこの統計理論の着想である.

初期の渦度分布として、離散的な渦度分布を考え、渦度 Q_k の流体粒子が全表面に対して R_k の割合で存在するとする ($k = 1, 2, \dots, n$).

このような初期状態から出発して、流れの不安定などによって渦度の混合がすすんだ状態を考える. ある点 (λ, μ) の十分小さな近傍において、渦度 Q_k の流体粒子が占める割合 (または、存在確率) を $r_k(\lambda, \mu)$ と定義する. この r_k を用いて混合エントロピー S を次で定義する:

$$S \equiv - \sum_{k=1}^n \langle r_k \log r_k \rangle. \quad (2)$$

ここに、ブラケットは全球平均を表し、

$$\langle A \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} A(\lambda, \mu) d\lambda d\mu, \quad (3)$$

である. また、考えている流体は非粘性としているから、微視的には、ある点における渦度は Q_k ($k = 1, 2, \dots, n$) のうちのいずれかであるはずである. しかし、混合が十分に進行した状態では観測される巨視的渦度分布は r_k を用いて以下のように定義される平均場 \bar{q} :

$$\bar{q}(\lambda, \mu) \equiv \sum_{k=1}^n Q_k r_k(\lambda, \mu), \quad (4)$$

であると考える.

各流体粒子の運動がランダムであるとする、この混合エントロピーが最大になるような r_k 分布が最も実現されやすいと考えられる. 従って、 r_k または \bar{q} で記述される束縛条件のもとで S を最大化する r_k 分布をもって統計的平衡解とする.

2.3 束縛条件

$r_k(\lambda, \mu)$ 分布そのもの、またはそれによって定義される \bar{q} が満たすべき束縛条件は以下のようなものである:

1. r_k を各点近傍での存在割合と定義したので、

$$r_k(\lambda, \mu) \geq 0, \quad \forall k, \text{ in 全領域}, \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n r_k(\lambda, \mu) = 1, \text{ in 全領域}. \quad (6)$$

2. 各渦度の流体粒子の面積保存により、

$$\langle r_k \rangle = R_k, \quad \forall k. \quad (7)$$

3. 角運動量保存により、

$$M_l \equiv \langle Y_l \bar{q} \rangle = \text{const.}, \text{ for } l = 1, 2, 3. \quad (8)$$

ここに、

$$Y_1 \equiv \mu, \quad Y_2 \equiv \sqrt{1 - \mu^2} \cos \lambda, \quad Y_3 \equiv \sqrt{1 - \mu^2} \sin \lambda. \quad (9)$$

4. エネルギー保存により、

$$E \equiv -\frac{1}{2} \langle \bar{\psi} \bar{q} \rangle = \text{const.} \quad (10)$$

ここに、 $\bar{\psi} \equiv \nabla^{-2} \bar{q}$.

3 平衡解の計算法

統計理論の有効性を示すためには、理論に基づく平衡解と、実際に基礎方程式を時間積分した結果出現する解との比較が必要である。従って、何らかの方法で平衡解を求める必要がある。

3.1 原理的解法

混合エントロピーの定義式と束縛条件により、平衡解は未定乗数を用いて以下のように表示される：

$$r_k = \frac{\exp \left\{ -Q_k \left(\sum_{l=1}^3 \alpha_l Y_l - \beta \bar{\psi} \right) - \gamma_k \right\}}{\sum_{i=1}^n \exp \left\{ -Q_k \left(\sum_{l=1}^3 \alpha_l Y_l - \beta \bar{\psi} \right) - \gamma_k \right\}}. \quad (11)$$

ここに、 α_l ($l = 1, 2, 3$), β, γ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) は束縛条件 (7), (8) および (10) に対応する未定乗数である。原理的には、領域を適当に離散化し、 r_k および $\alpha_l, \beta, \gamma_k$ に対して上の等式および束縛条件 (7), (8) および (10) の式を連立させて解けば平衡解が求められようと考えられるが、実際にはこの解は多重性を持ち、Newton 法などでむりやり解いても、 S の極大には収束せずに鞍点に収束してしまったりなどの困難を生じる。

3.2 本研究の手法

上記の解の多重性の問題を克服するための試みとしては、束縛条件を満しつつ、平衡解に緩和していくような、 r_k に対する偏微分方程式を構成し、それを時間発展させていくという手法が既に提出されている (Sommeria and Robert, 1992)。しかし、これは緩和的手法なので、収束速度が遅く、 Q_k の種類 n がごく少数の場合はよいが、一般的な場合に使うのは困難であると考えられる。また、構成される偏微分方程式は高次の非線形偏微分方程式となり、離散化した際に保存則が完全に満たされる保証がない。そこで、本研究では以下のような戦略をとった。

1. 媒介変数 \hat{r}_k, \hat{q}_l を導入し、 r_k, \bar{q} を \hat{r}_k, \hat{q}_l で表すことによって、 r_k, \bar{q} に対する束縛条件が自動的に満されるようにする。
2. これによって r_k に対する制約条件付き最適化問題を \hat{r}_k, \hat{q}_l に対する制約なし最適化問題に帰着する。
3. この制約なし最適化問題を共役勾配法で解く。

3.2.1 媒介変数の導入

以下、具体的な式を示す。まず、 \bar{q} に対する制約条件 (8), (10) を簡単に表すための準備として、展開係数 q_l を用いて \bar{q} を以下のようにスペクトル表示する：

$$\bar{q}(\lambda, \mu) = \sum_{l=1}^L q_l \tilde{Y}_l(\lambda, \mu). \quad (12)$$

ここに、 \tilde{Y}_l は全波数が小さい方から順番に並べた球面調和関数で、

$$\langle \tilde{Y}_l \tilde{Y}_{l'} \rangle = \delta_{ll'}, \quad (13)$$

と正規化されているものとする。総和の上限 L は、後で離散化する際に決定される。また、(9) で導入された Y_l ($l = 1, 2, 3$) とは、

$$Y_l = \sqrt{3}\tilde{Y}_l, \quad (l = 1, 2, 3), \quad (14)$$

なる関係があるものとする。球面調和関数 \tilde{Y}_l に対してこのような番号づけを考えた場合、 \bar{q} の表示 (12) において総和の l が $l = 1$ から始まっていることに疑問が生じるかもしれない。なぜなら、これでは全波数 0 の球面調和関数 \tilde{Y}_0 の成分を考えていないからである。しかし、球面上における渦度の平均 $\langle \bar{q} \rangle = 0$ であるから、このような成分を考える必要はない (もし、 \tilde{Y}_0 に対応する成分があると、この渦度の平均は 0 にならなくなってしまう)。

このように球面調和関数で \bar{q} を表示しておく、制約条件 (8) は、

$$q_l = \text{const.} \equiv q_{l0}, \quad (l = 1, 2, 3), \quad (15)$$

と記述される。また、全エネルギーは、

$$\frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \frac{|q_l|^2}{n_l(n_l + 1)}, \quad (16)$$

と表される。ここに、 n_l は \tilde{Y}_l の全波数であり、 q_{l0} の添字 0 は初期値を表す。従って、媒介変数 \hat{q}_l を導入して q_l を以下のように表せば、(8)、(10) を自動的に満たすようにできる。

$$\begin{cases} q_l = q_{l0}, & (l = 1, 2, 3), \\ q_l = \sqrt{E'_0/E'} \hat{q}_l, & (l = 4, 5, \dots, L), \end{cases} \quad (17)$$

ここに、

$$E' \equiv \frac{1}{2} \sum_{l=4}^L \frac{|\hat{q}_l|^2}{n_l(n_l + 1)}, \quad E'_0 \equiv \frac{1}{2} \sum_{l=4}^L \frac{|q_{l0}|^2}{n_l(n_l + 1)}, \quad (18)$$

である。以上により、媒介変数 \hat{q}_l ($l = 4, 5, \dots, L$) によって \bar{q} を表示することによって、 \bar{q} に対する制約条件を自動的に満たすようにすることができるようになった。

次に、このようにして表された \bar{q} および媒介変数 \hat{r}_k を用いて、 r_k を以下のように表示する：

$$r_k = R_k + T_k \bar{q} + (\hat{r}_k - \langle \hat{r}_k \rangle) - R_k \sum_{k'=1}^n (\hat{r}_{k'} - \langle \hat{r}_{k'} \rangle) - T_k \sum_{k'=1}^n Q_{k'} (\hat{r}_{k'} - \langle \hat{r}_{k'} \rangle). \quad (19)$$

ここに、 T_k は

$$\sum_{k=1}^n T_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n Q_k T_k = 1, \quad (20)$$

を同時に満たすような定係数である。この選び方には自由度があるが、ここでは簡単に、

$$T_k \equiv \frac{Q_k R_k}{\sum_{k'=1}^n Q_{k'}^2 R_{k'}}, \quad (21)$$

と定めることにする。このように定めた T_k が上の条件を満たすことは容易に確かめられる ($\langle \bar{q} \rangle = 0$ より、 $\sum_{k=1}^n Q_k R_k = 0$ が成立していることに注意)。

式 (19) によって表示された r_k が制約条件 (6)、(7) および (4) を満たすことはやはり容易に確認できる ($\sum_{k=1}^n R_k = 1$ および $\langle \bar{q} \rangle = 0$ に注意)。

3.2.2 離散化

上で導入した $\hat{r}_k(\lambda, \mu)$ は、まだ場 (λ, μ) に依存した量であるために、このままでは数値計算できない。そこで、球面上に $I \times J$ 個の格子点 (λ_i, μ_j) , $(i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J)$ を導入する。ここに、 λ_i は経度方向を等間隔に分割したもの:

$$\lambda_i \equiv \frac{2\pi i}{I}, \quad (i = 1, 2, \dots, I), \quad (22)$$

であり、 μ_j は J 次の Legendre 多項式 $P_J(\mu)$:

$$P_J(\mu) \equiv \frac{1}{2^J J!} \frac{d^J}{d\mu^J} (\mu^2 - 1)^J, \quad (23)$$

の J 個の零点を μ の小さい方から番号づけしたもの (Gauss 格子) である。このような格子点を使うのは、場の関数の空間積分を格子点での関数値の和として近似する際の誤差を極力抑えるためである。以上のように格子点を導入した上で、場の関数の空間積分を以下のような総和で近似する:

$$\langle f(\lambda, \mu) \rangle = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j f(\lambda_i, \mu_j). \quad (24)$$

ここに、 w_j は Gauss 格子 μ_j によって決まる Gaussian ウェイトであり、以下の式で与えられる:

$$w_j \equiv \frac{1}{I} \cdot \frac{1}{(1 - \mu_j^2)(P_J'(\mu_j))^2}. \quad (25)$$

ここで、係数 $1/I$ は、

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j = 1, \quad (26)$$

が満たされるように付加されているものである。Gauss 格子および Gaussian ウェイト等に関する詳細は、数値解析の教科書、例えば一松 (1982) 等を参照されたい。

格子点上の値によって $r_k(\lambda, \mu)$, $\hat{r}_k(\lambda, \mu)$ を離散化し、

$$r_{ijk} \equiv r_k(\lambda_i, \mu_j), \quad \hat{r}_{ijk} \equiv \hat{r}_k(\lambda_i, \mu_j), \quad (i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J), \quad (27)$$

とおく。このとき、変換式 (19) は以下ようになる:

$$\begin{aligned} r_{i'j'k'} = & R_{k'} + T_{k'} \bar{q}(\lambda_i, \mu_j) + (\hat{r}_{i'j'k'} - \sum_i \sum_j w_j \hat{r}_{ijk'}) - R_{k'} \sum_k (\hat{r}_{i'j'k} - \sum_i \sum_j w_j \hat{r}_{ijk}) \\ & - T_{k'} \sum_k Q_k (\hat{r}_{i'j'k} - \sum_i \sum_j w_j \hat{r}_{ijk}). \end{aligned} \quad (28)$$

3.2.3 勾配の計算

共役勾配法等により最適化を行うためには、目的関数の勾配の情報が必要になる。ここで、本来、目的関数は r_k で (離散化されていれば r_{ijk} で) 表示されているので、それを \hat{r}_{ijk} および \hat{q}_l で表示した

場合の勾配の表式を得る必要がある。そこで、まず $r_{i'j'k'}$ を \hat{r}_{ijk} および \hat{q}_l の関数と見なした場合の偏微分を求める。(28)の両辺を \hat{r}_{ijk} で偏微分して、

$$\frac{\partial r_{i'j'k'}}{\partial \hat{r}_{ijk}} = (\delta_{ii'}\delta_{jj'}\delta_{kk'} - w_j\delta_{kk'}) - R_{k'}(\delta_{ii'}\delta_{jj'} - w_j) - T_{k'}Q_k(\delta_{ii'}\delta_{jj'} - w_j). \quad (29)$$

さらに(17)より、 $l' = 4, 5, \dots, L$ に対して、

$$\frac{\partial q_{l'}}{\partial \hat{q}_l} = \sqrt{\frac{E'_0}{E'}}\delta_{ll'} - \hat{q}_{l'}\sqrt{\frac{E'_0}{E'}}\frac{1}{2E'}\frac{\partial E'}{\partial \hat{q}_l} = \sqrt{\frac{E'_0}{E'}}\left(\delta_{ll'} - \frac{\hat{q}_{l'}}{2E'}\frac{\hat{q}_l}{n_l(n_l+1)}\right), \quad (30)$$

であるから、(28)の両辺を \hat{q}_l で偏微分して、(12)を用いると、

$$\frac{\partial r_{i'j'k'}}{\partial \hat{q}_l} = T_{k'}\sum_{l'=4}^L\frac{\partial q_{l'}}{\partial \hat{q}_l}\tilde{Y}_{l'}(\lambda_{i'},\mu_{j'}) = T_{k'}\sqrt{\frac{E'_0}{E'}}\left(\tilde{Y}_l(\lambda_{i'},\mu_{j'}) - \frac{\hat{q}_l}{2E'}\sum_{l'=4}^L\frac{\hat{q}_{l'}}{n_{l'}(n_{l'}+1)}\tilde{Y}_{l'}(\lambda_{i'},\mu_{j'})\right). \quad (31)$$

ここで、式を見やすくするために、

$$\tilde{\psi}(\lambda, \mu) \equiv \sum_{l=4}^L\frac{-\sqrt{\frac{E'_0}{E'}}\hat{q}_l}{n_l(n_l+1)}\tilde{Y}_l(\lambda, \mu), \quad (32)$$

なる量を導入しておく、

$$\frac{\partial r_{i'j'k'}}{\partial \hat{q}_l} = T_{k'}\left(\sqrt{\frac{E'_0}{E'}}\tilde{Y}_l(\lambda_{i'},\mu_{j'}) + \frac{\hat{q}_l}{2E'}\tilde{\psi}(\lambda_{i'},\mu_{j'})\right). \quad (33)$$

と表せる。

以上で $r_{i'j'k'}$ を \hat{r}_{ijk} および \hat{q}_l の関数と見なした場合の偏微分が求まったので、これを用いて、 r_k で記述された関数の全球平均値の勾配を求める：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \hat{r}_{ijk}}\sum_{i'}\sum_{j'}\sum_{k'}w_{j'}f(r_{i'j'k'}) \\ &= \sum_{i'}\sum_{j'}\sum_{k'}w_{j'}\frac{\partial f(r_{i'j'k'})}{\partial r_{i'j'k'}}\frac{\partial r_{i'j'k'}}{\partial \hat{r}_{ijk}} \\ &= \sum_{i'}\sum_{j'}\sum_{k'}w_{j'}\partial f_{i'j'k'}\{(\delta_{ii'}\delta_{jj'}\delta_{kk'} - w_j\delta_{kk'}) - R_{k'}(\delta_{ii'}\delta_{jj'} - w_j) - T_{k'}Q_k(\delta_{ii'}\delta_{jj'} - w_j)\} \\ &= (w_j\partial f_{ijk} - w_j\sum_{i'}\sum_{j'}w_{j'}\partial f_{i'j'k'}) - (w_j\sum_{k'}R_{k'}\partial f_{ijk'} - w_j\sum_{i'}\sum_{j'}\sum_{k'}w_{j'}R_{k'}\partial f_{i'j'k'}) \\ &\quad - Q_k(w_j\sum_{k'}T_{k'}\partial f_{ijk'} - w_j\sum_{i'}\sum_{j'}\sum_{k'}w_{j'}T_{k'}\partial f_{i'j'k'}) \\ &= w_j\left\{(\partial f_{ijk} - \langle\partial f_k\rangle) - \sum_{k'}R_{k'}(\partial f_{ijk'} - \langle\partial f_{k'}\rangle) - Q_k\sum_{k'}T_{k'}(\partial f_{ijk'} - \langle\partial f_{k'}\rangle)\right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

ここに、表式の簡略化のために、

$$\partial f_{ijk} \equiv \frac{\partial f(r_{ijk})}{\partial r_{ijk}}, \quad \langle\partial f_k\rangle \equiv \sum_i\sum_j w_j\partial f_{ijk}, \quad (35)$$

とおいた。

次に、 \hat{q}_l での偏微分の式を示しておく：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \hat{q}_l} \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} w_{j'} f(r_{i'j'k'}) &= \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} w_{j'} \frac{\partial f(r_{i'j'k'})}{\partial r_{i'j'k'}} \frac{\partial r_{i'j'k'}}{\partial \hat{q}_l} \\
 &= \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} w_{j'} \partial f_{i'j'k'} T_{k'} \left(\sqrt{\frac{E'_0}{E'}} \tilde{Y}_l(\lambda_{i'}, \mu_{j'}) + \frac{\hat{q}_l}{2E'} \tilde{\psi}(\lambda_{i'}, \mu_{j'}) \right) \\
 &= \sqrt{\frac{E'_0}{E'}} g_l + \frac{\hat{q}_l}{2E'} \langle g \tilde{\psi} \rangle.
 \end{aligned} \tag{36}$$

ここに、

$$g_{ij} \equiv \sum_k T_k \partial f_{ijk}, \quad g_l \equiv \sum_i \sum_j w_j g_{ij} \tilde{Y}_l(\lambda_i, \mu_j), \quad \langle g \tilde{\psi} \rangle \equiv \sum_i \sum_j w_j g_{ij} \tilde{\psi}(\lambda_i, \mu_j). \tag{37}$$

以上によって、目的関数の勾配を求めるための式も得られた。これらの式において、目的関数 $f(r_{ijk})$ として、 $f(r_{ijk}) = -r_{ijk} \log r_{ijk}$ ととれば、エントロピー S の最大化問題に対応した表式が得られる。ちなみに、この場合、上で導入された ∂f_{ijk} は $\partial f_{ijk} = -(\log r_{ijk} + 1)$ となる。また、制約条件 (5) が考慮されていないという心配があるかもしれないが、この制約条件が満たされている r_k を最適化の初期値として、共役勾配法などの降下法系アルゴリズムによって S の最適化を行う限り、この制約条件が破綻することはない。これは、 r_k が 0 に近づくと S の勾配が大きくなって、 r_k が正の方向に引き戻されるような傾向になるためである。

4 平衡解と時間積分結果の比較

自発的な渦度の混合を引き起こすために、不安定な帯状初期状態：

$$q(\lambda, \mu) = q_0(\mu) + (\text{微小擾乱}), \tag{38}$$

$$q_0(\mu) \equiv \Omega [2\mu - 12c_3 \tilde{P}_3(\mu)]. \tag{39}$$

からの時間発展を考える。ここに、 $\Omega = 2\pi$, $c_3 = -0.07$ (展開係数), $\tilde{P}_3(\mu) \equiv \sqrt{7}/2(5\mu^3 - 3\mu)$ (2 に正規化された 3 次の Legendre 多項式), である。このような渦度分布は、角速度 Ω で回転している球上で中緯度で東向き、赤道域で西向きとなっているような流れ場に対応している。図 1 は、このようにして定めた初期渦度分布を図示したものである。(a) では $q(\lambda, \mu)$ を (λ, μ) の 2 次元座標において、等高線表示しており、(b) ではこの初期 $q(\lambda, \mu)$ 分布が λ 依存していないことを考慮して、 λ -平均した 1 次元プロットを示している。(b) を見て分かるように、 q の分布が μ に対して単調でないために、この平行流は Rayleigh の不安定の必要条件を満たしており不安定である可能性がある (実際、線形固有値解析をすれば不安定になっていることが確認できる)。

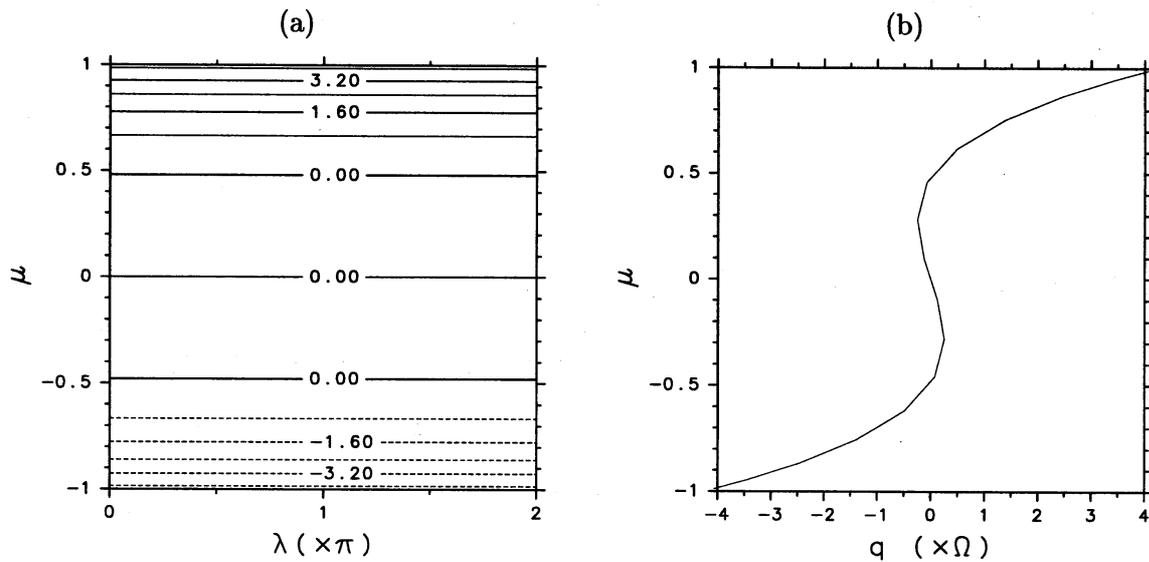


図1: 初期渦度分布. (a): 2次元分布, (b): λ -平均.

4.1 平衡解の計算

空間方向の離散化の解像度は, λ 方向の分割数 $I = 32$, および μ 方向の分割数 $J = 16$ とした. また, μ 方向の分割に対応して, Q_k のレベル数 $n = 16$ とした. すなわち, 初期の $q_0(\mu)$ と, μ の格子点座標 μ_j を用いて,

$$Q_k = q_0(\mu_k), \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (40)$$

とした. また, 渦度 Q_k の流体が全球面に対して占める割合 R_k は, Gaussian ウェイトに対応して,

$$R_k = I w_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (41)$$

とした.

以上で平衡解の計算に必要な情報は全て揃ったので, 3節で提示したアルゴリズムで最適化を進行させ, 平衡解に到達できそうに思われるが, 実際には以下に挙げるような問題点があり, 3節で提示したアルゴリズムそのままではうまく平衡解に到達できない:

1. 離散化のため, 初期の r_k 分布と平衡解を与える r_k 分布が, 保存則の作る超曲面上で連結でなくなってしまう. すなわち, 保存則を完全に満たしたままでは保存則が障害となって初期値から平衡解に到達できない.
2. 最適化する目的関数を最初からエントロピー S のままにすると, ある r_k が容易にごく小さいところになってしまい, 最適化のための歩幅が大きくとれなくなって最適化の進行が極めて遅くなってしまう. これは, S を構成している関数が $-r \log r$ 型の関数であるために, $r \rightarrow 0$ では関数の勾配 $\rightarrow \infty$ となって制約条件 (5) を侵害しないための障壁にはなっているが, この効果が働くのが r がごく小さいところに局限されているためである.
3. 最適化のアルゴリズムとして共役勾配法を用いても, 独立変数の数が非常に多いことと, もととの束縛条件の複雑さのために, 最終的な超一次収束が保証されず, 最適化の最終段階での収束は以外と遅い.

以上のような問題点を克服するために、実際の平衡解の計算においては、アルゴリズムを以下のように変更した。

- まず、最初の段階ではエントロピー S ではなく、以下のように定義されるバリアー関数 B :

$$B \equiv \sum_k \langle \log r_k \rangle, \quad (42)$$

の最適化を行う。これは、上に挙げた問題点 2 を回避するための方策である。このようなバリア関数の導入は、(5) のような不等式制約条件がある場合の最適化手法に良く用いられる手段で、このような手段は「中心化」と呼ばれる (cf. 藤田・今野・田邊, 1994)。

- 上記の問題点 1 を克服するために、 B の最適化は以下のようなステップで行う。
 1. 最初はエネルギー保存を課さずに共役勾配法で最適化を行う。この場合、 \bar{q} にエネルギー保存が課されないため、 \hat{q}_l から q_l への変換式は (17) の代わりに、

$$\begin{cases} q_l = q_{l0}, & (l = 1, 2, 3), \\ q_l = \hat{q}_l, & (l = 4, 5, \dots, L), \end{cases} \quad (43)$$

を用いれば良い。また、この場合の勾配は (36) の代わりに、

$$\frac{\partial}{\partial \hat{q}_l} \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} w_{j'} f(r_{i'j'k'}) = g_l, \quad (44)$$

となる。

2. その結果得られた平衡解に対応する \hat{r}_k , \hat{q}_l に対して、制約条件 (5) を侵犯しない範囲で、エネルギーができるだけ保存すべき初期エネルギーに近くなるように (実際にはエネルギー保存を課さずに最適化を行うと、エネルギーが小さい状態になってしまうので、エネルギーがより大きくなるように) \hat{q}_l すべてを定数倍する。
 3. 今度は、このとき得られた E' を、保存すべき E'_0 と見なして、エネルギー保存の束縛のもとで B の最適化を行う。
 4. E' が保存すべき初期の E'_0 に一致するまで、2-3 を繰り返す。
- 以上ですべての保存則の束縛のもとでの B の最適化が完成する。これで得られた r_k 分布を初期推定値として、 S の最適化を行えばよいのだが、上で提示した問題点 3 を克服するために、この最後のステップでは Newton 法を用いる。ただし、ここまでのステップ得られている r_k および q_l を Newton 法の初期推定値として用いる。

以上のようにエネルギーレベルを一旦上げてから徐々に下げていって最適化を繰り返す過程は、固体を一旦加熱して溶かしてそれを徐々に冷却して結晶化する過程に類似している。実際、エネルギーレベルが高い間は \bar{q} の分布は帯状の一次的なものであるが、エネルギーレベルを徐々に下げていくと、あるレベルで突如構造が変化して、波状構造が現れてくる (4.3 節の結果参照)。ただし、通常の物性におけるエントロピーはエネルギーと正相関であるのに対し、この流体系に導入された混合エントロピーは、負相関であることに注意が必要である。これは、この系においてエネルギーが高い状態は \bar{q} が正の部分と負の部分ができるだけ分離しているような分布であるが、このような組織だった分布になるほど、混合エントロピーは小さくなるからである。

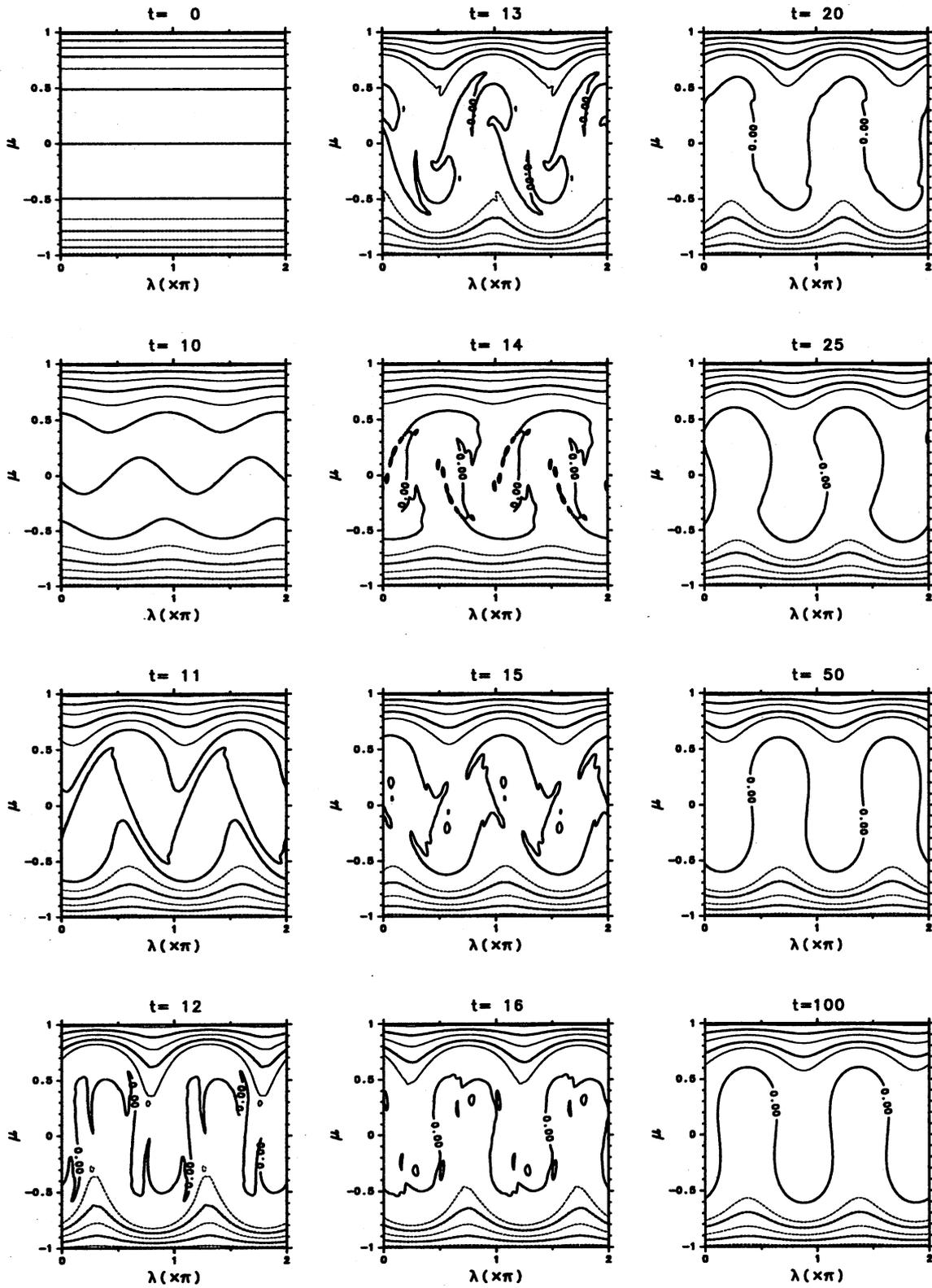


図 2: 渦度場の時間発展

4.2 時間積分

本稿で扱っている統計理論は、あくまでも非粘性流体に対するものであり、基礎方程式は (1) である。しかし、このような非粘性流体の時間発展方程式を数値的に完全に解くことは困難であるため、数値粘性などを導入せざるを得ない。本研究では、以下のようにラプラシアン¹⁰の高階粘性項を付加した方程式をスペクトル法 (T42: 128×64 grid) を用いて時間発展した:

$$\frac{Dq}{Dt} = -\nu_h(\nabla^2)^{10}q. \quad (45)$$

ここに、 ν_h は高階粘性係数で、全波数の最も大きなモードが $1/e$ になる時定数が 0.1 になるような値に設定してある。

このように、本来、非粘性流体に対して提出された統計理論をこのような (高階) 粘性流体の時間発展によって検証することについては、理論的に正当化することはできないが、この統計理論で導入された「粗視化」(観測される巨視的渦度場を \bar{q} としたこと) が、(高階) 粘性によってサブグリッドスケールの微細構造を平滑化することと同じような効果を持っていると考えられるので、十分解像度の良い離散化を行って時間積分すれば理論の検証ができるはずである (Sommeria, Staquet and Robert, 1991) というような理屈づけはできる。

図 2 は、実際に時間積分を行った結果得られた渦度場の時間発展を図示したものである。初期には帯状の平行流であったものが、不安定によって波が発達して碎波して微細構造を生み、その微細構造が粘性によって平滑化されて、最終的には波数 2 型のパターンがその形を保ったまま西側 (グラフの左側) に Rossby 波として移動していつているのが分かる。

5 結果 (渦度場の比較)

図 3 は統計理論と時間積分の結果それぞれ得られる渦度分布を比較したものである。(a) は統計的平衡解に対応する渦度分布 ($\bar{q}(\lambda, \mu)$) で、(b) は時間積分の結果得られた最終状態の渦度分布である。

両者を比較すると、 $-0.5 < \mu < 0.5$ 付近で波数 2 型のパターンが出現している点については、統計的平衡解が時間積分の結果出現したパターンをよく予測していることが分かる。ここで、この最終状態は定常状態ではなく、この波数 2 型のパターンがその構造を保ったまま Rossby 波として西向きに移動していくので、東西の位相の違いは問題ではない。ただし、 $|\mu| > 0.5$ の領域では、(b) では等高線が波数 2 型に歪んでいるのに対し、(a) ではこの領域の等高線は直線的になっており、対応が良くない。ただし、これは統計的平衡解の計算に用いた離散化の解像度がまだ低いためである可能性もある。

6 まとめと今後の課題

統計理論にもとづき、平衡解を求めるための計算法を提出し、実際に平衡解を求め、時間積分の結果を比較した。その結果、全体としてのパターンは類似しているものの、細かい点での不一致が見られた。これは理論の不備なのか、平衡解の解像度の低さのためなのかを見極める必要がある。そのためには、平衡解の解像度を向上するための、より効率的な解法を構築する必要がある。

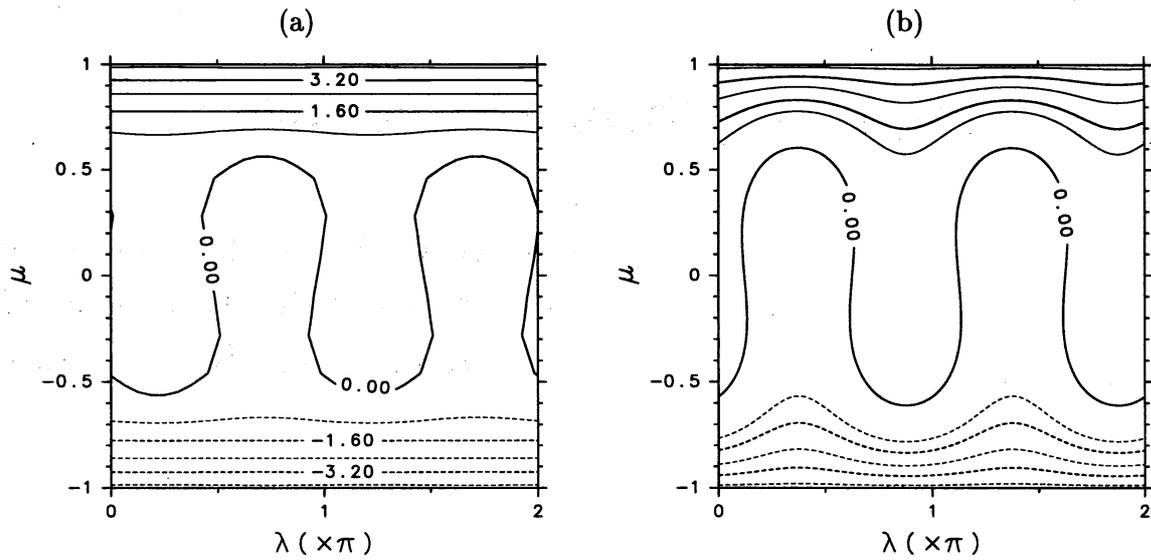


図 3: 渦度場の比較. (a): 統計的平衡解, (b): 時間積分の結果 ($t = 100$).

参考文献

藤田宏, 今野浩, 田邊國士, 1984: 最適化法, 岩波書店, pp.146.

一松信, 1982: 数値解析, 朝倉書店, pp.163.

McWilliams, J. C., 1984: The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, **146**, 21–43.

Robert, R. and J. Sommeria, 1991: Statistical equilibrium states for two-dimensional flows. *J. Fluid Mech.*, **229**, 291–310.

Sommeria, J. and R. Robert, 1992: Relaxation towards a statistical equilibrium state in two-dimensional perfect fluid dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 2776–2779.

Sommeria, J., C. Staquet and R. Robert, 1991: Final equilibrium state of a two-dimensional shear layer. *J. Fluid Mech.*, **233**, 661–689.