

せん断流中の楕円渦と外側の流れ

京大・工 川上 晶彦 (Akihiko Kawakami)
京大・工 船越 満明 (Mitsuaki Funakoshi)

1 せん断流中の楕円渦

1.1 せん断流中の楕円渦モデル

本論文で考える『せん断流中の楕円渦』モデルは、2次元完全流体の流れに対するものである。具体的には、一定の渦度 γ と、 $y = x$ の方向には引き延ばされ $y = -x$ の方向には押しつけられるような速度場を持つ定常せん断流の中に、その中央 $(x, y) = (0, 0)$ を中心とし、一様な渦度 ω を持つような楕円形の渦を置いたものである。ここで、 (x, y) は二次元の直角座標である。この場合、せん断流の流れ関数は、

$$\psi_e = -\frac{1}{4}(\gamma + s)x^2 - \frac{1}{4}(\gamma - s)y^2, \tag{1}$$

と書くことが出来る。ここで、 s は引き延ばしの強さを表す定数である。

このせん断流および楕円渦の誘起する速度場は、渦領域を楕円形のままと保つことが分かっており^[1]、さらに渦領域の形の時間発展に関する微分方程式として、このことなどを考慮に入れると、楕円領域に関する微分方程式は、

$$\begin{cases} \dot{r} = -sr \sin 2\theta, \\ \dot{\theta} = \frac{r\omega}{(r+1)^2} + \frac{1}{2} \left(s \frac{1+r^2}{1-r^2} \cos 2\theta + \gamma \right), \end{cases} \tag{2}$$

が得られている^[1]。ここで、 r は楕円の縦横比、 θ は楕円の長軸と x 軸のなす角度である。(2) 式を積分すると、

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \frac{2\omega}{s} \left(\frac{r}{r^2-1} \log \frac{(r+1)^2}{4er} + \frac{\gamma}{2\omega} \cdot \frac{r-1}{r+1} \right) \\ &\equiv \frac{2\omega}{s} \cdot g(r, \gamma, s, \omega, e), \end{aligned} \tag{3}$$

となる。 e は積分の定数である^[1]。

ところで $-1 \leq \cos 2\theta \leq 1$ だから、 $-s/2\omega \leq g \leq s/2\omega$ の範囲内の g だけが意味をもつ。この g から $\cos 2\theta$ が決まり、それにより θ が規定される。せん断流中の楕円渦の動きは、 g の r 依存性の形によっていくつかに分類される。すなわち、図 1 のように、

- 回転
- 振動
- 無限に引き延ばされる

の3種類の運動が可能である。

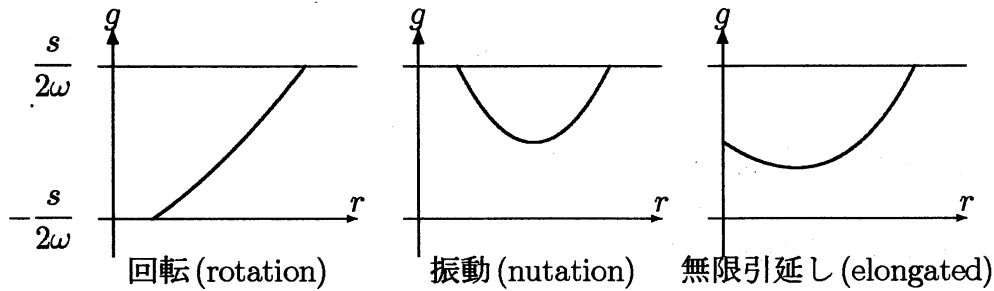


図 1: g の形と楕円渦の動き

以下では、一般性を失わず、楕円渦領域の渦度 ω および面積を、それぞれ $1, \pi$ として考える。

1.2 外側の流体粒子の動きと楕円座標

楕円渦の動きは、パラメータ γ, s を与え、 r と θ の初期条件から e を求めて、(3) 式の g の形を決定すれば、完全に規定される。そこで、次は楕円渦の外側の流体粒子がどのように動くかを考える。

流れ関数 Ψ が与えられると、流体粒子の x, y 方向の速度成分 \dot{x}, \dot{y} について、

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \end{cases} \quad (4)$$

が成り立ち、この式により流体粒子の動きが規定される。

定常せん断流に対する流れ関数は、既に (1) 式で与えられている。一方、楕円渦がその外部の領域に誘起する速度の流れ関数は、楕円の長軸と x 軸のなす角が 0 のとき、

$$\psi_v = -\frac{1}{4}e^{-2\xi} \cos 2\eta - \frac{1}{2}\xi, \quad (5)$$

となる^[2]。ここで、 (ξ, η) は楕円座標と呼ばれているもので、

$$\begin{cases} x = k \cosh \xi \cos \eta, \\ y = k \sinh \xi \sin \eta, \end{cases} \quad \left(\text{ただし } k^2 = \frac{1-r^2}{r} \right) \quad (6)$$

と書ける。ここで、 r は楕円の (短軸の長さ)/(長軸の長さ) であり、つねに 1 より小さい。

以上のことから、最終的な流れ関数 Ψ は、(1)、(5) より、

$$\Psi = \psi_e(x, y) + \psi_v(\xi, \eta; t), \quad (7)$$

となる。楕円渦周辺の流体粒子の動きは、(2)、(4) で与えられる $r, \theta, \dot{x}, \dot{y}$ に関する 4 元連立常微分方程式を数値的に積分すれば求められる。

流体粒子の運動の解析には、計算の便宜上楕円座標に統一する。また、楕円の長軸は x 軸と角度 θ だけずれているので、(5) 式をそのまま用いることが出来ない。そこで、座標系を楕円に対して固定して、粒子の位置とせん断流を書き表していた座標系を $-\theta$ だけ回転させることにより、(5) を活かすことにする。この回転による影響も、(1)、(6) 式で考慮しなければいけない。結局、(2)、(4) から、

$$\begin{cases} \dot{r} = -sr \sin 2\theta, \\ \dot{\theta} = \Omega + \frac{1}{2} (s\Lambda \cos 2\theta + \gamma), \\ \dot{\xi} = \frac{h^2}{2} \left[-\Omega \sin 2\eta + 2c^{-2} \frac{\partial \psi_v}{\partial \eta} + \frac{s}{2} \cdot \mathcal{F}(\xi, \eta, \theta) \right], \\ \dot{\eta} = \frac{h^2}{2} \left[-\Omega \sinh 2\xi - 2c^{-2} \frac{\partial \psi_v}{\partial \xi} + \frac{s}{2} \cdot \mathcal{G}(\xi, \eta, \theta) \right], \end{cases} \quad (8)$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{r}{(r+1)^2}, \\ \Lambda &= \frac{1+r^2}{1-r^2}, \\ c^2 &= \frac{1-r^2}{r}, \\ h^2 &= (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)^{-1}, \\ \mathcal{F} &= (\cosh 2\xi \sin 2\eta \cos 2\theta + \sinh 2\xi \cos 2\eta \sin 2\theta) \\ &\quad - \Lambda(\sin 2\eta \cos 2\theta + \sinh 2\xi \sin 2\theta), \\ \mathcal{G} &= (\sinh 2\xi \cos 2\eta \cos 2\theta - \cosh 2\xi \sin 2\eta \sin 2\theta) \\ &\quad + \Lambda(\sin 2\eta \sin 2\theta - \sinh 2\xi \cos 2\theta), \end{aligned} \quad (9)$$

である^[3]。

(8) 式を用いて流体粒子の運動を数値的に求めた結果、楕円渦周辺に、流体粒子がカオス的に動くカオス領域が存在することが、Polvani and Wisdom により示されている^[3]。さらに、彼らは楕円渦が回転する場合に、その周辺の流体粒子がカオス的にしばらく動いた後、最終的に右上の外向きせん断流の方向に流れていってしまう例も報告している。

本論文では、 $\gamma = 0$ の場合限定して、 s が小さいときの流体粒子の挙動を解析的に調べたあと、 $\theta = 0, r = 0.5$ の初期条件に対して、楕円渦が回転するような s の範囲 ($s < 0.173\dots$) に重点を置いて、楕円渦周辺の流体粒子の挙動を数値的に調べた。

2 s が小さいときの挙動

この節では、 s が小さいときの流れ場とそれによる流体粒子の運動の解析を行う。

2.1 Kirchhoff の楕円渦モデル

せん断流が無く ($s = 0$)、楕円渦だけが存在するモデルは、Kirchhoff の楕円渦と呼ばれている。(8) 式において $s = 0$ とおけば、Kirchhoff の楕円渦に対する基礎方程式として

$$\begin{cases} \dot{r} = 0, \\ \dot{\theta} = \Omega (= \text{const.}), \\ \dot{\xi} = \frac{h^2}{2} \left[-\Omega \sin 2\eta + c^{-2} \left(e^{-2\xi} \sin 2\eta \right) \right], \\ \dot{\eta} = \frac{h^2}{2} \left[-\Omega \sinh 2\xi - c^{-2} \left(e^{-2\xi} \cos 2\eta - 1 \right) \right], \end{cases} \quad (10)$$

が得られる。ここで、 (ξ, η) は楕円とともに回る楕円座標であることに注意しておく。

この流れ場の平衡点 $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ の満たす式は、 $\dot{\xi} = 0, \dot{\eta} = 0$ とおくことにより求めることが出来て、

$$\cos 2\bar{\eta} = 1, \quad e^{2\bar{\xi}} = \frac{3r+1}{1-r}, \quad (11)$$

あるいは

$$\cos 2\bar{\eta} = -1, \quad e^{2\bar{\xi}} = \frac{3+r}{1-r}, \quad (12)$$

となる。

ここで、平衡点の安定性解析を行うために、(10) 式の後半 2 つの右辺を平衡点まわりで Taylor 展開して一次の項だけを残すと、その係数行列は

$$h^2 \begin{pmatrix} -c^{-2}e^{-2\xi} \sin 2\eta + C_1 & -\Omega \cos 2\eta + c^{-2}e^{-2\xi} \cos 2\eta + C_2 \\ -\Omega \cosh 2\xi + c^{-2}e^{-2\xi} \cos 2\eta + C_3 & c^{-2}e^{-2\xi} \sin 2\eta + C_4 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

となる。ここで $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$ は、 h^2 の ξ, η 偏微分から出てくる項で、平衡点においては全て 0 になる。また、簡単のため $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ を ξ, η と表している。

- (11) 式を満たす平衡点の場合

(13) 式は、

$$h^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{2r(1-r)}{(1+r)^2(3r+1)} \\ \frac{2r(2r^2+r+1)}{(1+r)^2(1-r)(3r+1)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

となる。この行列の固有値は

$$\pm \frac{1-r}{2r(1+r)^2} \sqrt{2r^2+r+1},$$

となり、 r の値に関わらず実数である。従ってこの点は鞍点になる。

• (12) 式を満たす平衡点の場合

(13) 式は、

$$h^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{2r}{(1+r)^2(3+r)} \\ -\frac{2r}{(1+r)^2(1-r)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

となる。この行列の固有値は

$$\pm \frac{r\sqrt{(1-r)(3+r)}}{2(1+r)^2} i,$$

となり、 $0 < r < 1$ なのでこの点は渦心点になる。楕円 1 回転あたりの渦心点の回転量 (1 回転を 1 とする) の絶対値は、楕円の回転角速度 Ω と固有値の虚部の大きさの比で表せて、

$$\frac{\sqrt{(1-r)(3+r)}}{2}, \quad (16)$$

となる。

以上の平衡点の位置と安定性の解析をもとに、速度場の向きなども考え合わせ、 (ξ, η) 座標で見た速度場の様子を模式的に表すと、図 2 のようになる。図 2 において、(11) 式を満たす鞍点は長軸上に 2 つある A 点と B 点で、(12) 式を満たす渦心点は短軸上に 2 つある C 点と D 点である。

なお、これらの平衡点は楕円渦に固定した座標系でのものであるので、無限遠の流体に対して固定した座標系で見ると、これらの点は楕円渦と一緒に回転している。しかし、楕円渦回転の 1 周期ごとの流体粒子の位置を対応づける Poincaré 写像を考えると、これらの点から出発した粒子はもとの位置にとどまるので、これらの点は Poincaré 写像の固定点となっている。

2.2 せん断流が弱いときの遠方での挙動

せん断流の速度は遠方ほど大きい。一方、渦により誘起される速度は遠方ほど小さい。従って、 s が小さいときには、かなり遠方の領域で両者の速度が同程度になる。そのような領域での近似的な速度場を考えてみよう。

十分遠方においては、楕円渦は第一近似で点渦になる。そこで、せん断流の中央に点渦をおいたモデルを考える。楕円渦を循環 π の点渦で近似すると、場の流れ関数は、

$$\psi_1 = -\frac{1}{4}sR^2 \cos 2\Theta - \frac{1}{2} \log R, \quad (17)$$

と表せる。ただし、ここで (R, Θ) は極座標である。(17) 式から R, Θ 方向の速度成分が計算できて、

$$\begin{cases} \dot{R} = \frac{1}{2}sR \sin 2\Theta, \\ \dot{\Theta} = \frac{1}{2}s \cos 2\Theta + \frac{1}{2R^2}, \end{cases} \quad (18)$$

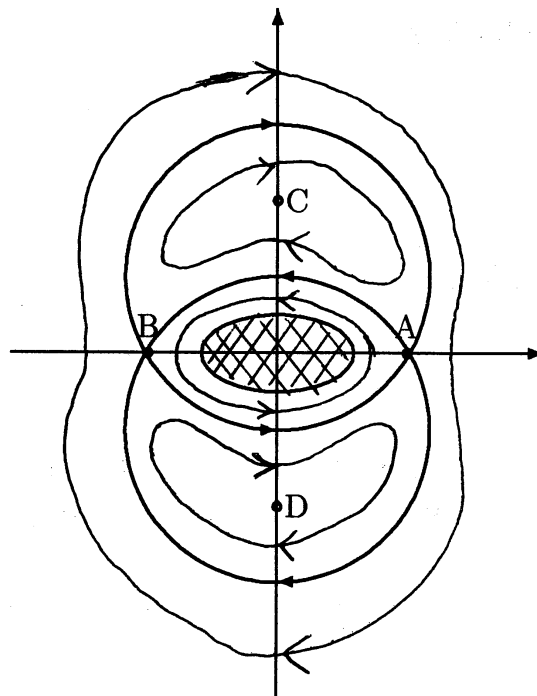


図 2: 楕円渦に固定した座標系で見た Kirchhoff 楕円渦のまわりの速度場

となる。さらに (18) 式の右辺を 0 とおくと平衡点も求めることができ、平衡点は

$$\begin{cases} R = \frac{1}{\sqrt{s}}, \\ \Theta = \pm \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (19)$$

である。平衡点を通る流線の式は、流れ関数の値が平衡点での値と同じであることから、

$$sR^2 \cos 2\Theta + \log esR^2 = 0,$$

と表せる。

以上のことを、定常せん断流に対して固定された (x, y) 座標で見た速度場として模式的に表すと、図 3 のようになる。ここで、実際には中央には楕円渦があり、それはある決まった周期で回転している。従って、この 1 周期ごとの流体粒子の位置を対応づける Poincaré 写像を考えると、上記の平衡点は、この写像の固定点であると言ってもよい。

3 流体粒子のカオス的挙動

前節で、せん断流が弱い場合の近似的な流れ場を『Kirchhoff の楕円渦』と『点渦近似』の両面から見た。摂動のない流れ場は、どちらも系が可積分となりカオス領域は表れないが、それぞれの流れ場で不安定平衡点を結ぶヘテロクリニック軌道に摂動が入ることにより、流体粒子がカオス的挙動を示すことが予想される。

そこで以下では、 s の値を 0 から増加させていったときの流体粒子の挙動の変化を、(8) 式の数値積分から求まる楕円渦回転の 1 周期ごとのデータから得られる Poincaré Plot によって見ていく。

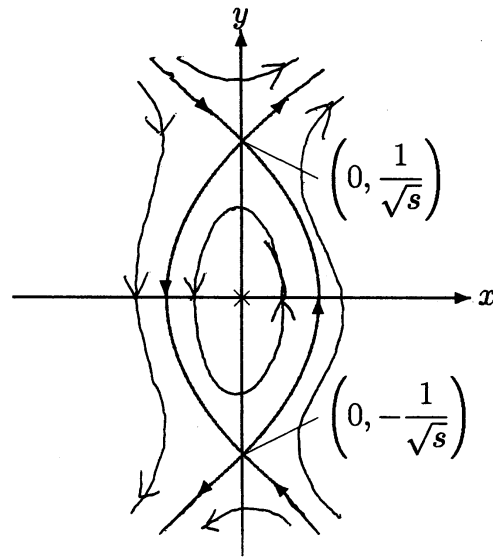


図 3: (x, y) 座標で見た点渦近似による模式的な速度場

カオス領域は前節で導入した Poincaré 写像の不安定固定点の近傍から表れる。Kirchhoff の楕円渦の場合は不安定固定点が楕円の近くにあるのに対し、点渦近似に基づく速度場では不安定固定点の座標が $(x, y) = (0, \pm 1/\sqrt{s})$ と表されるので、 s が小さいほど遠方に不安定固定点が存在する。従って s が小さいときには、楕円渦近傍では Kirchhoff 楕円渦による流体粒子の動きに摂動が入り、楕円渦から比較的遠方では点渦近似に基づく速度場の下での流体粒子の動きに摂動が入る現象が見られ、各々の摂動によって作られるカオス領域は s が大きくなると融合するであろうと予想できる。

3.1 Kirchhoff 楕円渦からの摂動

まず、Kirchhoff 楕円渦による流体粒子の動きに対する定常せん断流の摂動に注目した、 s が小さいときの楕円渦に近い領域での Poincaré Plot を図 4 に示す。 s の値は、① では 1.0×10^{-5} 、② では 0.003、③ は 0.005、④ では 0.01 である。① では $(x, y) = (1.5 \sim 2.0, 0), (0, 0.9 \sim 1.9)$ の 17 点を初期点に取って 2000 周期分、②、③ では $(1.8 \sim 2.2, 0)$ の 3 点を初期点に取って 500 周期分、④ では $(2, 0)$ の 1 点に取って 20000 周期分、それぞれプロットした。図 2 と図 4 の比較から分かるように、摂動が入ることにより、Kirchhoff 楕円渦に伴う速度場に基づく Poincaré 写像の不安定固定点の近傍からカオス領域が表れ、 s の増加とともにカオス領域が広がっていく。

3.2 点渦近似からの摂動

次に、点渦近似に s を大きくしたことによる楕円の摂動に注目した場合の Poincaré Plot を、図 5 に示す。 s の値は、① では 0.01、② は 0.02、③ は 0.03 である。また、④ は③の拡大図である。初期点は、(19) 式の平衡点 ($\Theta = \pi/2$ の方) を中心とする縦横の長さ 0.1 の矩形内に正方格子状に置いた 121 個の点に取り、最大 200 周期分プロットした。

図 5 から分かるように、 s が十分小さい間は、これらの初期点から出発した粒子は点渦

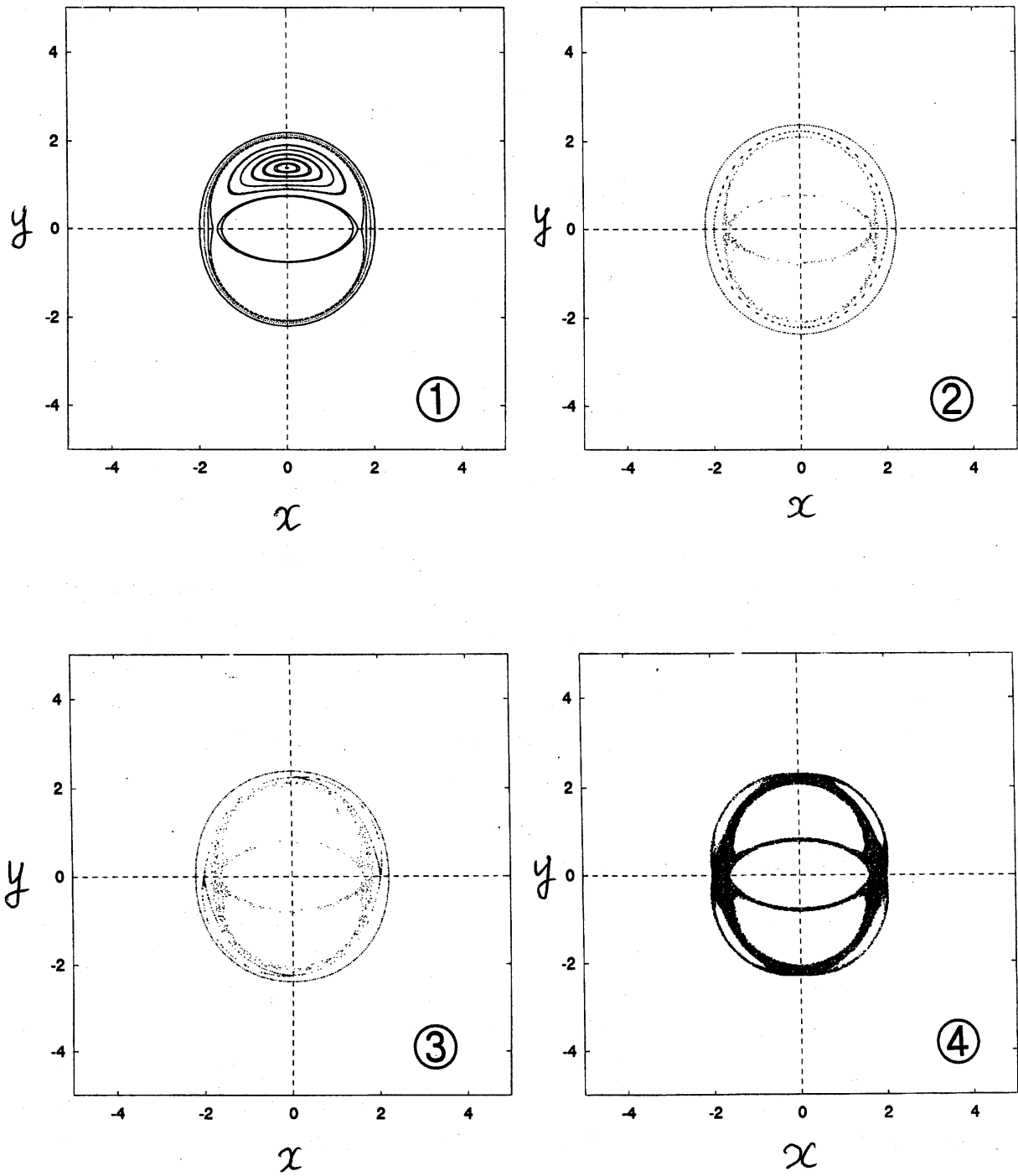


図 4: s が小さいときの楕円渦に近い領域での Poincaré Plot。この Poincaré Plot を取った時刻では、楕円渦は長軸が x 軸、短軸が y 軸に一致し、その外縁は $(x, y) = (\pm\sqrt{2}, 0), (0, \pm 1/\sqrt{2})$ を通る。

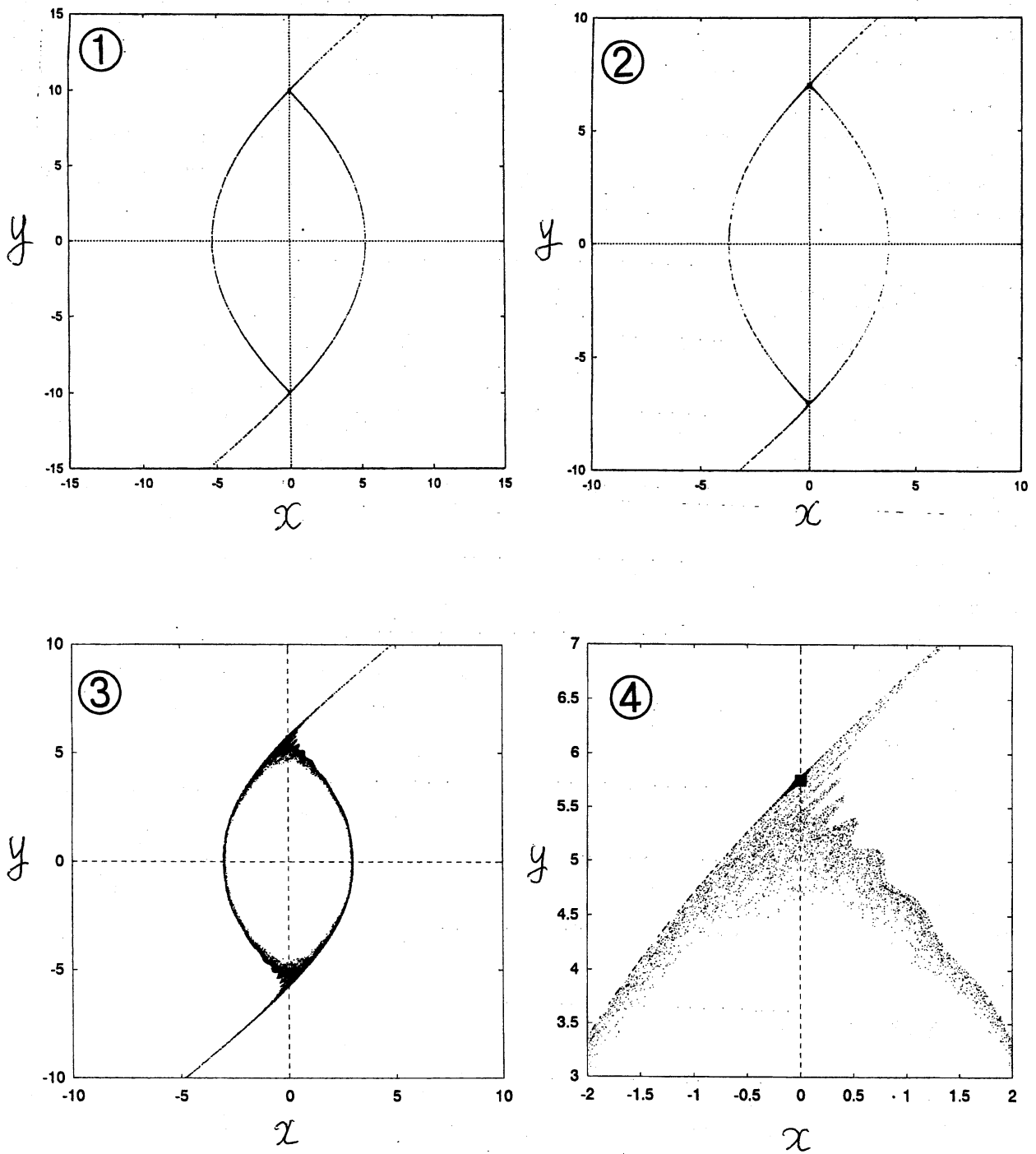


図 5: s が小さいときの楕円渦から遠い領域での Poincaré Plot。楕円渦の位置は図 4 と同じ。

近似におけるヘテロクリニック軌道のごく近傍を動き回ったあと、その一部は遠方に流れ去る。この場合は Polvani の報告^[3]のように楕円渦の近くから出発した粒子が遠方へ流れ去るような現象は起こらない。 s が大きくなると摂動の効果が大きく効いてきて、 $s = 0.03$ の場合には、図 5 ③, ④のように流体粒子の動く範囲はかなり広がっている。さらに図 5 ④は、ヘテロクリニック軌道の両端の固定点の安定多様体と不安定多様体の交差を示唆しており、ヘテロクリニック軌道付近に、流体粒子が(少なくともある時間の間は)カオスの挙動をする領域があることを予想させる。

3.3 内側と外側のカオス領域の融合

s の小さい間は、3.1 節と 3.2 節で紹介した 2 つのカオス領域はともに幅が狭く、またその位置は互いに離れている。しかし s が大きくなってくると、両者の位置が近くなり、またその幅が広がってくることにより、これらのカオス領域の融合が起こる。その様子を図 6 に示す。 s の値は、①は 0.02、②は 0.022、③は 0.028、④は 0.029、⑤は 0.03、⑥は 0.032 である。初期点は、いずれも y 軸上に等間隔に 21 個の点を置き、5000 周期分プロットした。

s が十分小さいと、内側と外側のカオス領域の間に無数のトーラスが存在するため、楕円渦の近くから出発した粒子が遠方へ流れ去ることはあり得ない。

s が 0.028 になると、図 6 ③から分かるように、内側と外側のカオス領域がかなり近づいてきている。また、これらのカオス領域の間では大部分のトーラスが崩壊しており、ごく一部のトーラスが残るのみとなっている。しかし、1 つでもトーラスが残っている限り、トーラス内部の粒子はトーラス外部には流れていかないことに注意しておく。

s がもう少し増加して 0.029 になると、図 6 ④に示すように、今回用いた初期点に対してはトーラスが見られなくなる。全てのトーラスが崩壊した瞬間、内側と外側のカオス領域が融合し、それにより楕円渦近くの粒子が遠方に流れ去る可能性が出現する。Polvani^[3]は、 $s = 0.03$ の場合について楕円渦付近から出発した粒子が遠方へ流れ去ると述べているが、我々の計算でも、 $s = 0.03$ は楕円渦近くの粒子が遠方へ流れ去るための最小値に近い。

4 島領域と回転量

図 6 から分かるように、Poincaré Plot には多くの島領域が見られる。島領域の中心部には、Poincaré 写像の安定周期点が存在する。この節では、これらの島領域の発生メカニズムの説明を試みる。以下では、図 7 のように、点渦近似の流れ場に基づくヘテロクリニック軌道の内側の領域を、Kirchhoff 楕円渦まわりの流れ場に基づくヘテロクリニック軌道によって 2 つの領域に分けて、それぞれの領域で表れる島領域について考える。

4.1 図 7 の 1 の領域

図 6 から分かるように、1 の領域の中央部には安定固定点が見られる。 $s = 0$ の場合には、(16) 式から分かるように、この固定点のすぐ近くの流体粒子は、Poincaré 写像の 1 回

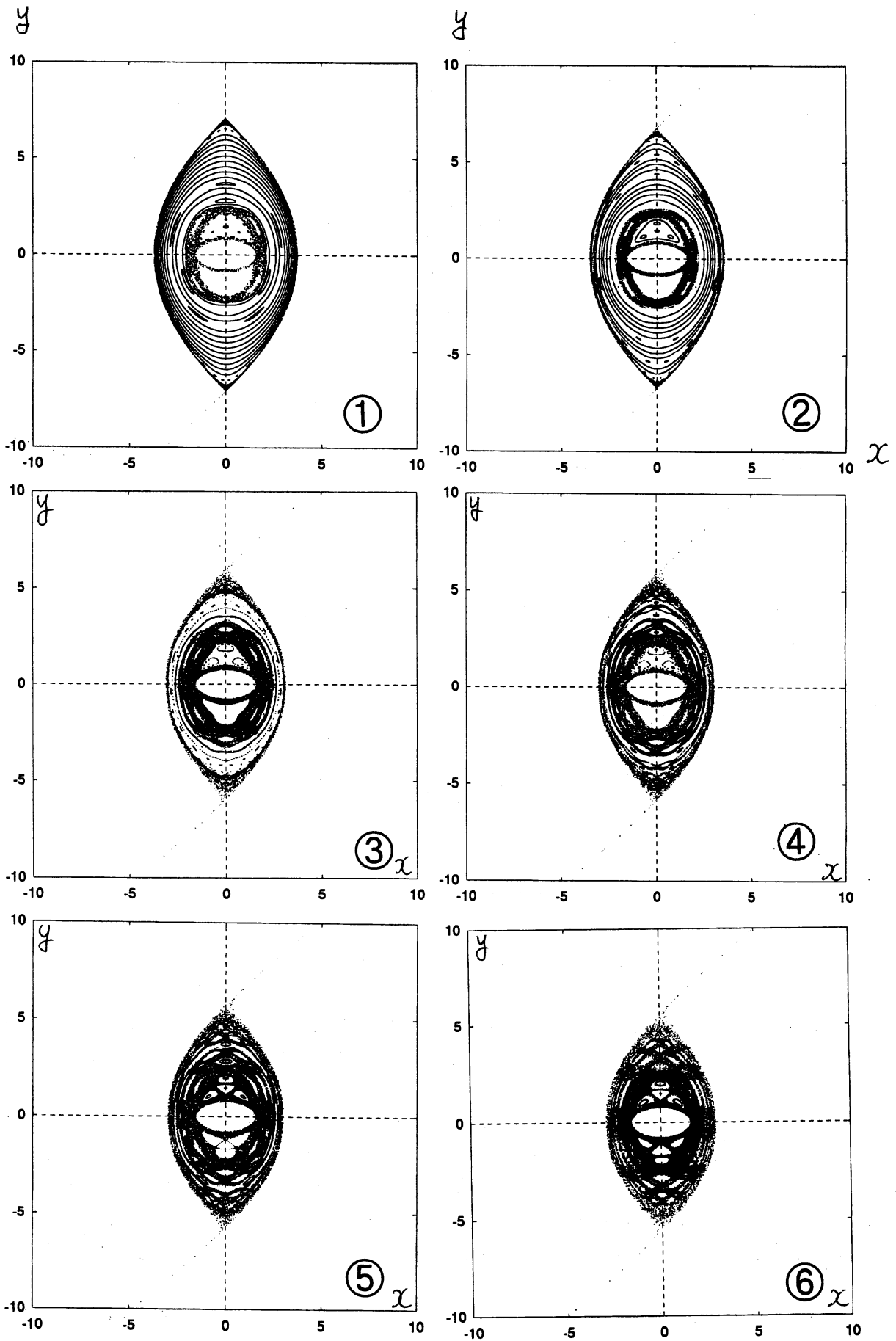


図 6: 内側と外側のカオス領域の融合を表す Poincaré Plot。楕円渦の位置は、図 4 と同じ。

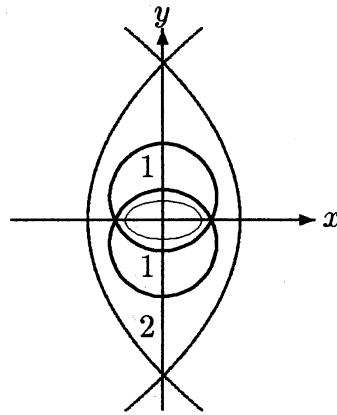


図 7: ヘテロクリニック軌道による領域の分割

の写像ごとにこの固定点のまわりを

$$\frac{\sqrt{(1-r)(3+r)}}{2},$$

だけ回転する。この回転量を r の関数として表すと、図 8 のようになる。

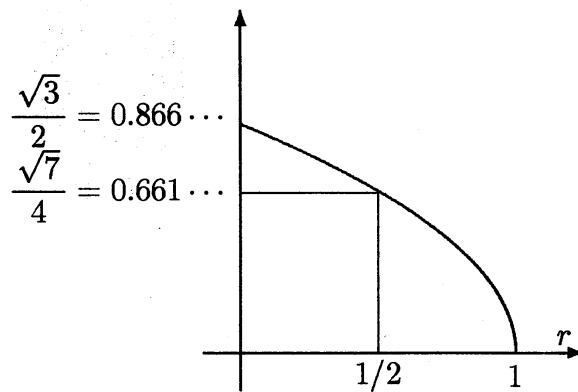


図 8: 縦横比 r と回転量

今回調べた $r = 0.5$ に対する図 6 においては、1 の領域の中央部の安定固定点(島領域)のまわりに 3 個の島領域が見られる。そこで、この 3 個の島領域の発生原因を調べるために、比較的小さいいくつかの s に対して、1 の領域内での Poincaré Plot を示したのが図 9 である。 s の値は、①は 0.007、②は 0.008、③は 0.009 である。初期点は、 y 軸上に $y = 0.8 \sim 1.8$ の間に等間隔に並べた 21 点に取り、500 周期分プロットした。安定固定点から 3 周期点が発生する様子がよく分かる。このような安定固定点からの 3 周期点の発生は、安定固定点付近での回転量が $1/3$ か $2/3$ に近いときに起こることが知られているが、今の場合、 $r = 0.5$ での回転量が $2/3$ に近いので、このような説明が妥当であると思われる。

0.5 以外の r の場合は今回は調べていない。いろいろな r の値に対する周期点の分岐パターンについての考察は今後の課題としたい。

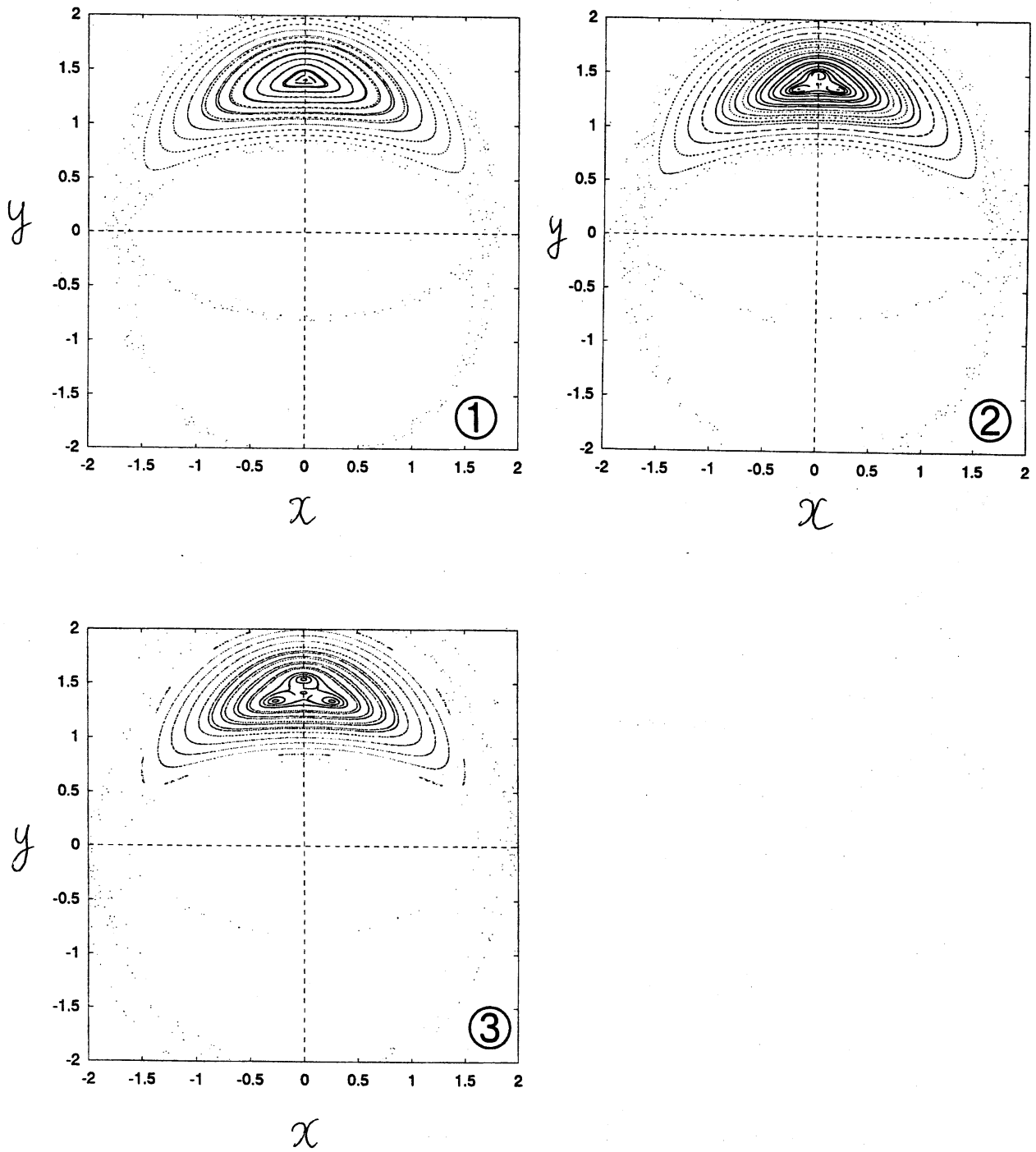


図 9: s の増加に伴う安定固定点からの 3 周期点発生の様子

4.2 図 7 の 2 の領域

2 の領域の内側境界は Kirchhoff 楕円渦に伴う流れ場に基づくヘテロクリニック軌道だから、楕円渦に固定した座標系から見るとヘテロクリニック軌道上の粒子の楕円渦まわりの平均回転量は 0 となる。即ち、定常せん断流に対して固定した座標系では、2 の内側境界にいる流体粒子は、楕円渦の 1 回転ごとに平均して 1 回転する。

一方、2 の外側境界は、定常せん断流に固定した座標系でのヘテロクリニック軌道だから、軌道上の粒子の楕円渦まわりの平均回転量は 0 になる。以上のことから、2 の領域内の粒子の楕円渦まわり平均回転量は、平均半径の増加とともに 1 から 0 まで減少していくと予想される。

図 6 の 2 の領域に相当する部分を見ると、内側から外側に向けて、3 周期、5 周期、7 周期など、徐々に細かな島領域が表れている。これは、島領域の中心にある粒子の平均回転量が $1/3$, $1/5$, $1/7$ になっていることを示している。

5 まとめ

本論文の内容をまとめると以下のようになる。

- (1) 式で表される定常せん断流の中の楕円渦が回転する場合について、楕円渦周辺の流体粒子のカオス的挙動について調べた。
- せん断流の強さ s が小さいときには、楕円渦近傍の流体粒子の運動は、Kirchhoff の楕円渦による運動にせん断流の摂動が加わったものでモデル化でき、Kirchhoff の楕円渦に伴う速度場の不安定平衡点の近傍からカオス領域が表れる。
- S が小さいときには、楕円渦から $1/\sqrt{s}$ 程度離れた遠方における流体粒子の運動は、楕円渦を点渦近似したときの運動に摂動が加わったものでモデル化でき、ヘテロクリニック軌道の交差によるものと思われるカオス領域の発生が見られる。
- s が小さい間は、これらの 2 つのカオス領域は分離しており、その間に KAM トーラスが存在する。しかし、 s が大きくなるとこれらの KAM トーラスが全て崩壊し、楕円渦の近くから出発した粒子でも遠方へ流れ去るようになる。
- 楕円渦回転の 1 周期ごとの流体粒子の Poincaré Plot で見られる島領域は、Poincaré 写像の安定固定点やヘテロクリニック軌道上の点の回転量によりある程度説明できる。

今後は、流体粒子の運動の依存性調査や、高次の摂動まで取り込んだ近似モデルによる解析などを行っていきたい。
楕円渦の乗換比の初期値に対する

参考文献

- [1] S.Kida: *Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow*, J. Phys. Soc. Jpn., 50, 3517 (1981)

- [2] H.Lamb: *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press (1932)
- [3] L.M.Polvani and J.Wisdom: *Chaotic Lagrangian trajectories around an elliptical vortex patch embedded in a constant and uniform background shear flow*, Phys. Fluids, A **2**, 123 (1990)