

## 乱流中の管状渦のダイナミクス

核融合研 三浦英昭 (Hideaki Miura)

核融合研 木田重雄 (Shigeo Kida)

### 概要

乱流中の旋回渦の回転中心を同定するため、圧力断面極小法を開発した。この方法は、圧力や渦度の強さ、圧力のラプラシアンなどの従来の可視化法に比べて、個々の渦の同定という点において優れている。この方法を一様等方乱流のシミュレーションに適用し、他の典型的な可視化法のいくつかと比較検討した結果を報告する。

### 1 はじめに

非常に乱雑に見える乱流の中に、管状あるいは層状の秩序構造が存在することが報告されてから久しいが、秩序構造の客観的な定義は未だなされていないように思われる。管状構造と言えは旋回流(いわゆる「渦」)を、層状構造と言えは剪断流を期待されるが、それを確かめようにも、流体物理学には流体の回転運動と剪断運動を区別する物理量が存在しない。例えば、渦度(あるいはその強さ)は時として渦と同一視され、あるいは代用として用いられることがあるが、これは流体要素の自転を表すものであり、これのみを用いて巨視的な回転と剪断を区別することはできない。このため、仮に渦度の強さや渦線で層状、管状の構造を観測したとしても、その構造を支配しているのが回転運動なのかあるいは剪断運動なのかは直ちには明らかにならない。特に渦線で渦構造を可視化した場合に、誤った構造の理解に導かれる可能性が高いことは、Robinson<sup>1)</sup>が既に指摘しているところである。このような、渦という概念に対する適切な定義のなさが、秩序構造の客観的な定義を困難なものにしている。従来から提案されている渦構造の可視化法には流線<sup>2)</sup>、渦線<sup>3)</sup>、渦度の強さ<sup>4)</sup>、圧力<sup>5)</sup>、圧力のラプラシアン<sup>6)</sup>の等値面を描くものが挙げられる。また、勾配速度テンソルを用いた $Q$ 定義法、 $\Delta$ 定義法<sup>7)</sup>、 $\lambda_2$ 定義法<sup>8)</sup>などがここ数年の間に新たに開発された。しかしながら、渦構造の客観的な抽出という観点からは、これらの方法は全て、必ずしも満足のいくものではなかった。(それぞれの方法についての概観は、Lugt<sup>9)</sup>、Jeong and Hussain<sup>8)</sup>などを参照されたい。)

このような状況を打開すべく、我々は回転渦の旋回中心を可視化する方法(圧力断面極小法)を開発した<sup>10)</sup>。この方法は、回転運動している流体では、その回転面上に圧力の極小点が現われるという性質を利用している。次節ではこの方法を紹介し、この方法が一様等方乱流に対して非常に良い結果を与えることを示す。次に、この圧力断面極小法を用いて可視化した旋回中心軸を用いて、他のいくつかの等値面による渦の可視化法の性質を検討する。第3節では、この方法を一様等方乱流のシミュレーションの時系列の解析に応用し、その有効性を検討する。

## 2 圧力断面極小法

圧力断面極小法は、流体が渦運動を行う面上では圧力が極小になる傾向にあるという素朴な事実に基礎を置いている。このような極小点を探し、それらを連結することによって回転渦の中心軸(スケルトンと呼ぶ)を構築するのが、本方法の眼目である。流体が渦運動を行う面とその旋回中心を同定するため、流体に働く慣性力をポテンシャル部分と回転部分に分解して

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla P + \nabla \times \mathbf{Q} \quad (1)$$

と表す。この時、 $P$ はポアソン方程式

$$\nabla^2 P = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u_i u_j) \quad (2)$$

を適切な境界条件のもとで解いて得られる。以下で取り扱う非圧縮流の場合は $P$ は圧力 $p$ に一致する。但し、繰り返して現われる添字( $i, j = 1, 2, 3$ )については和をとっている。

上述の考えに基づき、まず我々は流体が回転運動を行う面を確定する作業を行わねばならない。このため、ある面の上で圧力が極小値をもつような場合を考える。圧力が極小値をもつ面が確定できる場合としては、 $P$ が2次式で局所的に

$$P = P_c + \frac{1}{2} \lambda^{(i)} (x'_i - c_i)^2 \quad (3)$$

と書ける場合が考えられる。ここで $(x'_1, x'_2, x'_3)$ は、適切に選ばれた直交座標系である。このとき、式(3)の係数 $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )のうち少なくとも2つが正(ここでは $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ とする)であるとき、 $P$ は $x'_3 = \text{const.}$ の面の上で2次元的な極小点をもつ。この形の $P$ の分布を得るため、 $P$ を数値計算の格子点 $\mathbf{X}(X_1, X_2, X_3)$ のまわりでテイラー展開し、各格子点の近傍の圧力場を

$$P(x_1, x_2, x_3) = P^{(0)} + P_i^{(1)}(x_i - X_i) + \frac{1}{2} P_{ij}^{(2)}(x_i - X_i)(x_j - X_j), \quad (4)$$

$$P^{(0)} = P(X_1, X_2, X_3), \quad (5)$$

$$P_i^{(1)} = \frac{\partial}{\partial X_i} P(X_1, X_2, X_3), \quad (6)$$

$$P_{ij}^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} P(X_1, X_2, X_3) \quad (7)$$

のように2次式で近似する。この時、適切な回転変換によって式(4)は必ず式(3)の形に変形できる。係数 $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )は圧力のヘシアン $P$ の3つの実固有値で与えられ、一般性を失うことなく $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とおくことができる。また、式(3)の座標系 $(x'_1, x'_2, x'_3)$ は、固有値 $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )に対応する固有ベクトルで与えられる(図1)。図1で、 $(x_1, x_2, x_3)$ は元の座標系の座標軸を、 $(x'_1, x'_2, x'_3)$ は回転変換によって得られた新しい座標軸を示している。点 $C(c_1, c_2, c_3)$ は新しい座標系における $P$ の2次形式の中心点の座標である。点 $C'(c'_1, c'_2, c'_3)$ は、点 $C$ を通り第3固有ベクトル $(x'_3$ 座標軸)に平行な直線へ、この解析を行っている格子点 $(X_1, X_2, X_3)$ から下ろした垂線の足である。既に述べたように $P$ は $x'_3 = \text{const.}$ 上で断面極小であるから、 $C'$ は断面極小点になっている。

上のようにして得られる点 $C'$ について、ここで以下のような条件を課す。

1.  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$ .
2. 各格子点から計算した中心軸への最近接点の座標 $C'(c'_1, c'_2, c'_3)$ において、  
 $|X_i - c'_i| < \frac{1}{2}\Delta$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ( $\Delta$ は格子サイズ).

第1の条件は圧力が、ある平面の上で極小値をもつための条件である。第2の条件は以下のように説明できる。図2の太い実線のように真の回転中心軸があるとする。実線による格子点は、数値計算で用いられる格子点を表している。図2の○の記号のついた格子点の上で、第1条件( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$ )が満たされているものとする。記号●は、○のついた格子点において計算した $C'$ の位置を表している。第2の条件の意味する所は、●は○のついた格子点を中心とする一辺 $\Delta$ の立方体(図2では、破線で描いた正方形)の中にいなければならないということである。これは、各中心軸のそばには必ず格子点があり、そのような近くの格子点から計算した候補点だけで十分に中心軸は構築できるという理由によっている。この2条件を満たす $C'$ を、スケルトンを構築するための候補点とする。

このような解析を数値計算を行った全格子点の上で行い、上記2つの条件を満たす候補点の集合 $\{C'\}$ を得る。この集合の各要素 $C'$ をお互いに連結することにより、回転渦の巡回中心軸が得られる。連結の方法は最近接点同士を連結する方法と、連結した点を結ぶベクトルが第3固有ベクトルと最も平行に近くなるように連結する方法の2通りが考えられる。一様等方乱流の場合は両者に大きな差はなく、ここでは前者の方法を採用する。

この圧力断面極小法による可視化の結果を図3に示す。数値計算のデータは一様等方減衰乱流(格子数 $N^3 = 64^3$ )の、乱流状態が十分に発達した状態のものを用いている。テイ

ラー長に基づくレイノルズ数は  $R_\lambda = 27$  である。旋回中心軸は薄い灰色で示されている。いくつかの旋回中心軸のまわりには、この中心軸に相対的な流線(黒色)を配してある。この図から、主だった旋回中心軸については確かに旋回流が周囲に存在することがわかる。この可視化法の特徴は、一本一本の渦が個別に可視化できることである。これは、様々な過程を経て生成され、あるいは相互作用を行う渦のダイナミクスの追跡を可能にする。

### 3 可視化法の比較

ここでは、いくつかの典型的な渦の可視化法の比較を、圧力断面極小法を用いて行う。数値データは前節で用いたものと同一である。以下に示す全ての等値面では、等値面の中に全体の5%の体積が含まれるように閾値を決定してある。これは、等値面を用いた可視化法の多くは閾値の決定に任意性があるため、様々な可視化法の比較には同じ体積を含むように等値面を設定するのが最も適切であると考えからである。図4には、旋回中心軸とエンストロフィー密度の等値面を示した。等値面は旋回中心軸を取り囲むように現れているが、 $R_\lambda$  が比較的小さいことも影響し、ある等値面は管状に、ある等値面は半ば層状の形をしている。旋回中心軸は渦度の等値面の外側にもあり、それらの中心軸の周囲に旋回流があることは、図3との比較から明らかである。これらの旋回中心軸を含むように等値面の閾値を下げた場合、等値面の中に含まれる体積は非常に大きくなり、渦の構造の同定という意味では適切ではなくなる。

図5には、旋回中心軸と圧力の等値面を示した。圧力の等値面も渦の旋回中心軸の一部を囲むように描かれているが、その形状は管状とは言い難い。また、一塊の等値面の中に複数の旋回中心軸が含まれており、個々の回転運動の可視化には適当ではないことがわかる。圧力の等値面による渦の可視化の問題点の一つは、流体の旋回運動によって圧力の低下が生じて、もともと圧力の高い領域に渦がある場合には等値面が表示されないことである。他方で、閾値をより圧力の高い方向へ変えると、等値面によって覆われる領域が大きくなり過ぎるため、やはり渦の可視化のためには適当ではない。

次に、 $Q$  定義と  $\Delta$  定義による渦の可視化を検討する。速度勾配テンソル  $\nabla \mathbf{u}$  の第2、第3不変量をそれぞれ

$$Q = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\}, \quad (8)$$

$$R = \text{Det} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \quad (9)$$

とする。非圧縮流体の場合には

$$Q = \frac{1}{2} \nabla^2 p \quad (10)$$

である。この  $Q$  を用いて、 $Q > 0$  の領域を渦領域と定義するのが  $Q$  定義である。他方、

$$\Delta = \left(\frac{1}{3}Q\right)^3 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 \quad (11)$$

で定義される  $\Delta$  が正の領域を渦領域とするのが  $\Delta$  定義である。この  $Q$  及び  $\Delta$  定義法の詳細は、Chong et al.<sup>7)</sup> や Jeong and Hussain<sup>8)</sup> などを参照されたい。図6には、旋回中心軸と  $Q$  の等値面を示した。上述の  $Q$  定義法では閾値が  $Q = 0$  で一意に決定されているが、この時  $Q$  の等値面は非常に大きな体積を内部に含むため、渦構造の可視化には適切ではない。他方、 $Q$  の閾値を適当に大きくすることで管状構造が明瞭になることは、いくつかの研究で示されている (例えば Tanaka and Kida<sup>11)</sup>)。閾値を体積の5%が含まれる値に設定したことにより、旋回中心軸の周囲に管状の渦構造が現われている。これは、非圧縮性流体の場合には  $Q = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$  であることを考えると、自然な結果である。なぜなら、 $Q$  の値が大きい時には  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$  の条件が満たされている可能性が大きいからである。しかしながら、 $Q$  の値が大きい場合でも、 $\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_2$  となる場合はあり得ることに注意しなければならない。この意味では、 $Q$  定義や他の  $Q$  を用いた定義法と圧力断面極小法にははっきりとした違いがあることを強調しておく。

図7には、旋回中心軸と体積を5%含むように閾値を決定した  $\Delta$  の等値面を示した。この  $\Delta$  定義も、元来は Jeong and Hussain<sup>8)</sup> に示されたように  $\Delta = 0$  の一意に決定される閾値で定義されるが、この場合には  $Q$  定義と同様に、等値面内部の体積が大きくなり、旋回渦特有の管状渦構造が同定できなくなる。図7のように閾値を体積の5%に設定した  $\Delta$  の等値面は、同じ体積5%の閾値による  $Q$  の等値面と非常に似通っており、管状渦構造をよく表している。その意味でこれら2つの手法は先に示した渦度の強さや圧力の等値面に比べて渦の可視化に適していると言えるが、閾値の設定に曖昧さを残している点是否定できない。また、図は省略したが、Jeong and Hussain の  $\lambda_2$  定義も、 $\lambda_2 = 0$  では体積が大きくなり過ぎるが、 $\lambda_2$  の値を小さくすると管状渦構造がよく見えるようになるという意味で、 $Q$  定義や  $\Delta$  定義と同様の性質をもっている。

#### 4 まとめ

一様等方乱流中の旋回中心を、圧力断面極小法を用いて可視化した。この方法は、圧力がある断面で極小となる管状渦構造の特徴を利用しようという所期の目標をよく達成しており、渦構造の可視化を行う上で重要な前進である。次に、この圧力断面極小法を利用して他の従来の可視化法との比較を行った。渦度の強さ、圧力、 $Q$  及び  $\Delta$  の等値面は、閾値の問題はあるにせよ、それぞれ中心部に旋回中心を据える形で描かれていた。この比較の中では、 $Q$  及び  $\Delta$  定義法による渦領域の可視化が最も優れた結果を与えた。

我々は最近、圧力断面極小条件に渦の旋回条件を加えた圧力断面極小旋回法を開発した。

これは、圧力が断面極小であっても旋回流が存在するとは限らないという事実を踏まえ、圧力が極小でなおかつ旋回流が存在するものをスケルトンの形で同定、可視化する方法である。また、そのスケルトンの周囲の渦領域の定義も合わせて提唱している。我々は、渦構造の断面の特徴や渦同士の相互作用などの様々な性質を調べる予定であり、そのための道具として圧力断面極小旋回法は非常に有効であると期待している。

## 参考文献

- [1] Robinson, S. K., Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 23:601–639, 1991.
- [2] Bernard, P. S., Thomas, J. M., and Handler, R. A., Vortex dynamics and the productions of reynolds stress. *J. Fluid Mech.*, 253:385–419, 1993.
- [3] She, Z. S., Jackson, E., and Orszag, S. A., Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence. *Nature*, 344:226, 1990.
- [4] Porter, D. H., Pouquet, A., and Woodward, P. R., Kolmogorov-like spectra in decaying three-dimensional supersonic flows. *Phys. Fluids*, 6:2133–2142, 1994.
- [5] Métais, O. and Lesieur, M., Spectral large-eddy simulation of isotropic and stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, 239:157, 1992.
- [6] Kida, S. and Tanaka, M., Dynamics of vortical structures in a homogeneous shear flow. *J. Fluid Mech.*, 274:43–68, 1994.
- [7] Chong, M. S., Perry, A. E., and Cantwell, B. J., A general classification of three-dimensional flow fields. *Phys. Fluids A*, 2:765–777, 1990.
- [8] Jeong, J. and Hussain, F., On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.*, 285:69–94, 1995.
- [9] Lugt, H. J., The dilemma of defining a vortex. In *Recent Developments in Theoretical and Experimental Fluid Mechanics*, Springer, pages 309–321, 1979.
- [10] Miura, H. and Kida, S., Identification of tubular vortices in turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 66:1331–1334, 1997.
- [11] Kida, S. and Tanaka, M., Characterization of vortex tubes and sheets. *Phys. Fluids A*, 5:2079–2082, 1993.

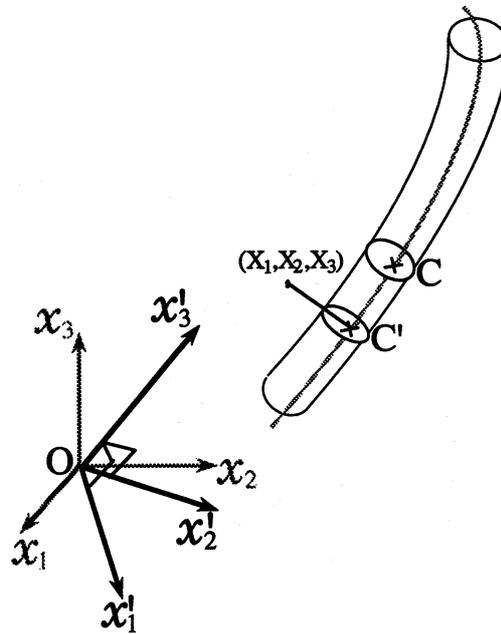


図 1: 圧力のヘシアン固有値による回転面の同定



図 2: 回転渦の旋回中心軸候補点の取捨選択

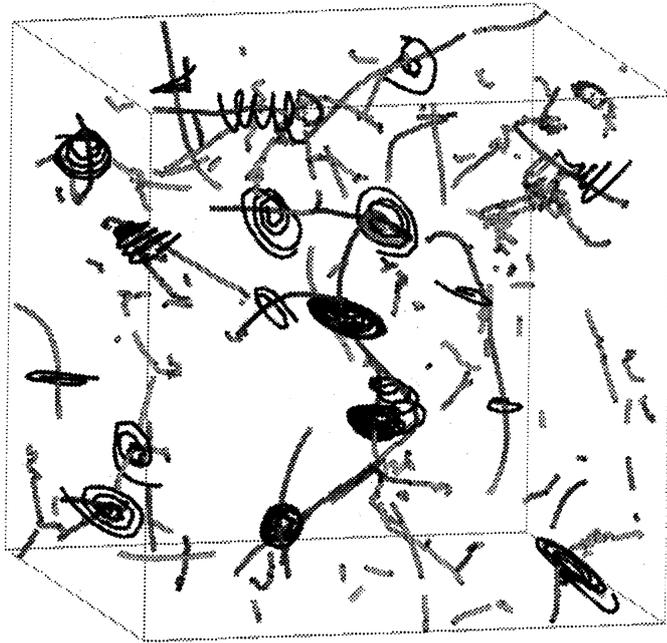


図 3: 圧力断面極小法による渦の回転中心軸の同定

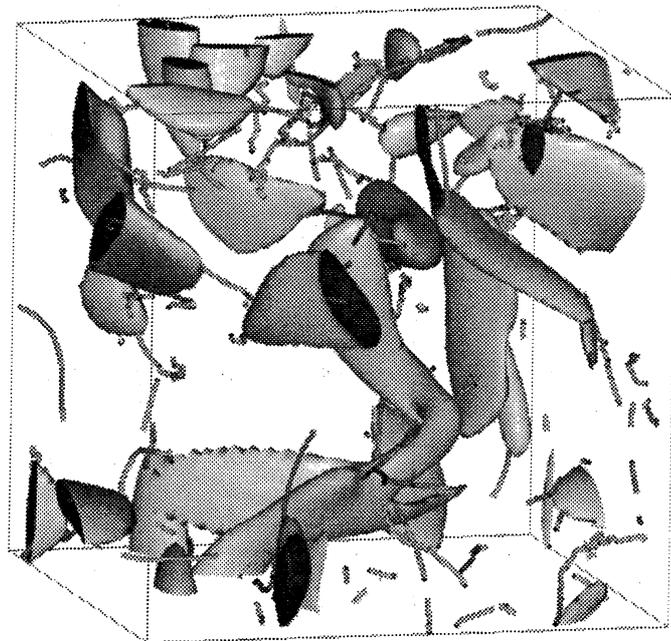


図 4: エンストロフィー密度の等値面

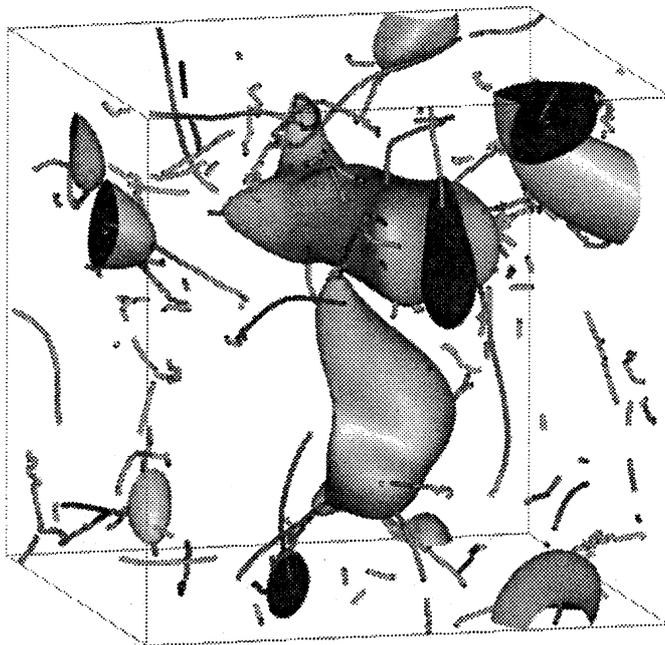


図 5: 圧力の等値面



図 6:  $Q$ (圧力のラプラシアン) の等値面



図 7:  $\Delta$  の等値面