

一層が非常に深い二層流体中の地形による長波の生成

九大応力研 辻 英一 (Hidekazu Tsuji)
九大応力研 及川正行 (Masayuki Oikawa)

1 はじめに

密度成層した流体の中に生成される内部波については、例えば大気や海洋中で観測される変動の解明などを目的として、今までにさまざまな研究がなされてきた¹⁾。本研究では水平方向になだらかに変化している地形を持つ二層流体系を取り扱う。そしてその二層については、一つの層が地形の水平スケールに比べ非常に深くもう一層は非常に浅いとする。この状況は、大気の地表に近い部分に密度躍層が存在し、山岳などの地形と流れの相互作用によって長波長の波動が生じるような場合に対応している。

線形解析を行うと、位相速度の長波長極限と地形の無い所での一様な流れの速度がほとんど等しい（共鳴状態にある）場合、解は発散してしまう。その場合、波の振幅、地形の高さ及び流れの速度の間に適当な関係を仮定すると、基礎方程式から forced Benjamin-Ono (fBO) 方程式が導出される²⁾。fBO 方程式は、地形が無い場合での（弱非線形）波動の伝播を表す BO 方程式^{3,4)}に、地形の効果を表す外力項が加わった形をしている。この方程式を用いて、共鳴状態に近い場合における波動の生成が調べられている⁵⁾。しかしながら導出の際の様々な仮定により、fBO 方程式の有効な領域は広いとは言えない。

最近 Choi と Camassa は、今回考えている二層流体系とスケージングが同じで地形の無い系での波動の伝播を研究し、ある非線形方程式（以降 CC 方程式）を提出した⁶⁾。この方程式の特徴として次のようなことが言える。

- 界面の形状を表す変数と、鉛直方向に積分した下層の速度の連立した微分積分方程式になっている。
- 導出の過程で、波の振幅や地形の高さについての仮定はしていない。また、CC 方程式から適切な仮定のもとに BO 方程式が導かれる。
- BO 方程式と同様、定常に進化する孤立波解が（数値的にではあるが）Choi らによって示されている。

われわれは、地形の存在する状況のもとで、基礎方程式から CC 方程式に外力項がついた方程式 (fCC 方程式) を導出し、これを数値的に調べた。fCC 方程式の中で上層の

効果は、密度比と水平／鉛直スケール比に関するパラメータを係数に持つ一つの項のみに入っている。その項を落とすと fCC 方程式は、表面波の問題で静水近似のもとに導かれる方程式¹⁾になる。この方程式は jump の伝播と定常な部分の組み合わせで解が示せるので、得られた計算結果をその解と比較、検討する。これらの結果から、ある程度大きな地形変化が作る非線形波動の性質を明らかにするのがこの研究の目的である。

2 定式化

図 1 のような二層流体を考える。上層は非常に深いので無限遠まで延びているとして良い¹⁾。

二層の境界を $z = \zeta(x, t)$ (無限遠で $\zeta = 0$)、地形の形を $B(x) (> 0)$ 、下層の境界を $z = -h(x) = -h_2 + B(x)$ で表す。流体は非粘性、非圧縮と仮定し、無限遠で一樣な速度 U を持つとする。密度、圧力をそれぞれ ρ_i, p_i とし、添字で上層 ($i = 1$)、下層 ($i = 2$) を表す。全体の速度場は一樣流からのずれとして $(U, 0) + (u_i, w_i) = U + u_i$ と表す。

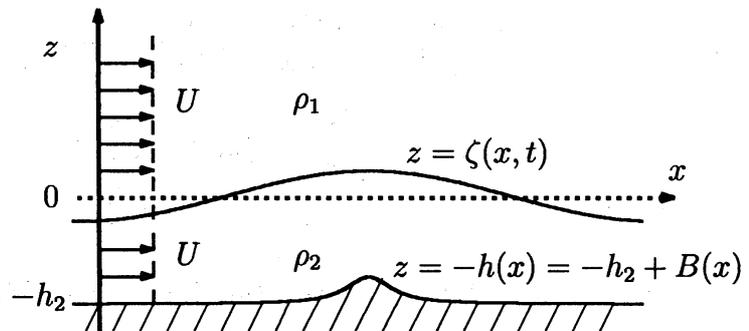


図 1: 二層流体系

基礎方程式及び境界条件は、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}_i &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + ((U + \mathbf{u}_i) \cdot \nabla) \mathbf{u}_i &= -\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i - \mathbf{g}, \quad (\mathbf{g} \equiv (0, g) : \text{重力加速度}), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u_i \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= w_i, \quad p_1 = p_2 \quad (z = \zeta \text{ で}), \\ u_1, w_1 &= 0 \quad (z \rightarrow \infty \text{ で}), \quad w_2 = -(U + u_2) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (z = -h \text{ で}). \end{aligned}$$

ここから、まず下層で元になる方程式を導出し、上層の効果の後でそこに代入することによって、fCC 方程式を導く。

2.1 下層

下のように無次元化を行う。

¹⁾実際、後で述べるスケールリングのもとでは、深さを有限として解いてもその効果は無視できる範囲にある事が判る。

$$(x, z) = (Lx', h_2z'), \quad h = h_2h' = h_2(1 - B'(x)), \quad t = \frac{L}{U_0}t', \quad \zeta = h_2\zeta', \quad p_2 = (\rho_2 U_0^2)p_2',$$

$$u_2 = U_0u_2', \quad w_2 = \beta U_0w_2',$$

ここで L は地形の水平スケールであり、これを用いて定義する $\beta = h_2/L$ は小さいと仮定する。 $U_0 = \sqrt{(1 - \rho_1/\rho_2)gh_2}$ は線形長波の位相速度であり、速度 w_2 のスケージングは連続の式を満たすように定めた。

無次元化された方程式は（'を取って），

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + F \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + w_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} = -\frac{\partial p_2}{\partial x}, \quad (1b)$$

$$\beta^2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} + F \frac{\partial w_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} + w_2 \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_2}{\partial z} - \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \quad (1c)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + F \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = w_2 \quad (z = \zeta), \quad (1d)$$

$$w_2 = -(F + u_2) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (z = -h(x)). \quad (1e)$$

ここで F は $F \equiv U/U_0$ で定義されるフルード数である。

まず (1a), (1b) を $z = -h(x)$ から $z = \zeta$ まで積分する。下層の厚さを $\eta \equiv h + \zeta$, ある量 f に関する平均を

$$\bar{f} \equiv \frac{1}{\eta} \int_{-h}^{\zeta} f dz$$

で表すと,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + F \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\eta \bar{u}_2) = 0, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\eta \bar{u}_2) + F \frac{\partial}{\partial x} (\eta \bar{u}_2) + \frac{\partial}{\partial x} (\eta \bar{u}_2 \bar{u}_2) = -\eta \frac{\partial p_2}{\partial x}. \quad (2b)$$

次に (2b) で \bar{u}_2 以外の平均量を他の量であらわすことを考える。式 (1c) で, $O(\beta^2)$ を小さいとして無視すると, z で積分でき, P を界面での圧力 $p_1(z = \zeta)$ とおくと,

$$p_2 = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} (\zeta - z) + P(x, t), \quad \frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x}.$$

つまり $\frac{\partial p_2}{\partial x}$ は z に依存しないので, 平均量はそれ自身である。また (1b) をみると, 上のことより右辺は (β の 1 次まででは) z に依存せず, 無限遠方での速度場が $(U, 0)$ である事から, u_2 もまた同じように z に依存しないである事がわかる。そして計算すると,

$$\overline{u_2 u_2} = \bar{u}_2 \bar{u}_2 + O(\beta^4).$$

が言える。

これらを代入すると、式 (2b) は、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta \bar{u}_2) + F \frac{\partial}{\partial x}(\eta \bar{u}_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\eta \bar{u}_2^2) = -\eta \left(\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} \right).$$

左辺は展開して (2a) を使って簡単にできる。式 (2a) とまとめて、下層では、 $\eta(\zeta)$ 、 \bar{u}_2 に関して次の方程式が得られた。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + F \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta \bar{u}_2) = 0, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + F \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} = -\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (3b)$$

2.2 上層

下のように無次元化を行う。

$$(x, z) = L(x', z'), \quad t = \frac{L}{U_0} t', \quad \zeta = h_2 \zeta', \quad p_1 = (\rho_2 U_0^2) p_1', \quad u_1 = \beta U_0 u_1', \quad w_1 = \beta U_0 w_1'.$$

ここで速度については、上層での連続の式より w_1 と u_1 が、また境界条件 $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + F \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u_i \frac{\partial \zeta}{\partial x} = w_i$ で、 $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = O(h_2/L) = O(\beta)$ であることより w_1 と w_2 が、それぞれ同じオーダーであることを考慮して、 $w_1 = O(\beta)$ 、 $u_1 = O(\beta)$ と取る。無限遠での速度場は一様だから流れは渦なしであるので、速度ポテンシャルを用いて基礎方程式と境界条件を表す。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (4a)$$

$$\beta \frac{\partial \phi}{\partial t} + \beta F \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \beta^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 = -\frac{\rho_2}{\rho_1} p_1 - \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \frac{1}{\beta} z, \quad (4b)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + F \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (z = \beta \zeta'), \quad (4c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z \rightarrow \infty \text{ で}). \quad (4d)$$

(3b) の P を消すために (4b) を使うと、

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\rho_1}{\rho_2} \beta \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + F \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{z=0} + O(\beta^2).$$

第2項の $\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=0}$ ($O(1)$ の部分) を ζ で表すため、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + F \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (z = 0 \text{ で}), \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z \rightarrow \infty \text{ で}),$$

を解く。解は、

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{z=0} = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x' - x} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + F \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) dx' = -\mathcal{H} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + F \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right].$$

ここで P はコーシーの主値, \mathcal{H} はヒルベルト変換を表す。

よって

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \beta \left(\frac{\partial}{\partial t} + F \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{H} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + F \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right].$$

これを式 (3b) に入れてまとめ、 ζ で表すと

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + F \frac{\partial \zeta}{\partial x} + F \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} [(\zeta + h)\bar{u}_2] = 0, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + F \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{\rho_1}{\rho_2} \beta \mathcal{H} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + F \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \zeta \right]. \quad (5b)$$

と fCC 方程式が導出される。

3 他の方程式との関係

3.1 fBO 方程式との関係

fCC 方程式は、今までに提出された fBO 方程式と全く異なる方程式ではなく、それを含んだ形になっている。実際、fBO 方程式は、基礎方程式から直接導かれるのと同じように、fCC 方程式からも導出される。

まず、地形の高さは下層の深さに比べ $O(\epsilon^2)$ 程度に小さく $h = 1 - \epsilon^2 B'(x)$ とする。また、流れは $F = 1 + \epsilon \Gamma$ と共鳴状態に近い場合を考える。ゆっくりとした時間変化を考えると $\xi = x$, $\tau = \epsilon t$ と変換し、 ζ , \bar{u}_2 を展開する。

$$\zeta = \epsilon \zeta^{(1)} + \epsilon^2 \zeta^{(2)} + \dots, \quad \bar{u}_2 = \epsilon \bar{u}_2^{(1)} + \epsilon^2 \bar{u}_2^{(2)} + \dots.$$

これを (5a), (5b) に代入する。微小量 ϵ , β は同じオーダーとみて、最初のオーダーで

$$\bar{u}_2^{(1)} = -\zeta^{(1)},$$

が言える。次のオーダーで

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial B'}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}_2^{(2)}}{\partial \xi} + \zeta^{(1)} \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \xi} \bar{u}_2^{(1)} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}_2^{(2)}}{\partial \xi} + \bar{u}_2^{(1)} \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial \xi} &= -\frac{\rho_1}{\rho_2} \mathcal{H} \left[\frac{\partial^2 \zeta^{(1)}}{\partial \xi^2} \right]. \end{aligned}$$

$\bar{u}_2^{(2)}$ などの 2 次の項を消すと、

$$\frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{3}{2} \zeta^{(1)} \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \mathcal{H} \left[\frac{\partial^2 \zeta^{(1)}}{\partial \xi^2} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial B'}{\partial \xi}, \quad (6)$$

と、fBO 方程式が出る。

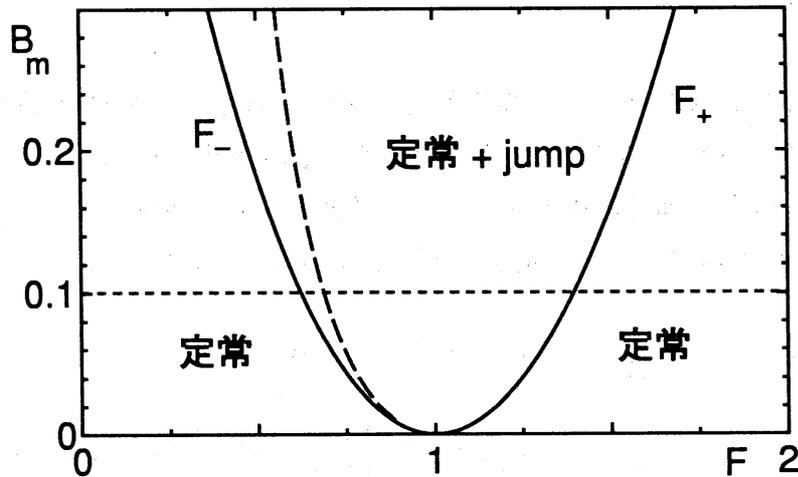


図 2: 静水方程式の解の種類とその有効な範囲.

3.2 静水方程式

fCC方程式は、 ρ_1/ρ_2 が非常に小さいかあるいは β がさらに非常に小さいとして、(5b) の右辺を 0 とおくと次のような方程式になる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + F \frac{\partial \zeta}{\partial x} + F \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} [(\zeta + h)\bar{u}_2] = 0, \quad (7a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + F \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0. \quad (7b)$$

これは、自由表面の波動を考え、静水近似が成り立つとしたときに導出される方程式である。この静水方程式はよく調べられており¹⁾、その性質を簡単に述べる。

地形が与えられた時、流れがある程度遅いか速い場合、すなわち $F \leq F_-$ か $F \geq F_+$ である時、全域で定常な流れが存在する。ここで F_{\pm} は、図 2 にあるような地形の最大の高さ B_m の関数である。そして ζ や \bar{u}_2 は $B(x)$ を通じて場所の関数として表すことが出来る。

$F_- \leq F \leq F_+$ であると、全域で定常となる流れは存在できないが、地形が存在する場所の上流側と下流側に jump を置くと、解を構成する事が出来る。地形近くの定常な部分はやはり $B(x)$ を使って表せ、jump の速さや振幅は F と B_m で決まる。下流の jump は、流れが遅いほど下流側へ向かう速度が遅くなり、図 2 で破線と F_- の間であらわされる領域では、地形の上で定在する。

4 数値計算法

数値計算の方法について述べる。空間微分の近似には多くの非線形偏微分方程式の数値計算で使われている擬スペクトル法⁸⁾を用いる。領域は十分に広く取ることによって、スペクトル法に必要な周期境界条件を与える。物理空間での離散点 (ζ_j, \bar{u}_{2j}) を取り、波数空間 (ξ_k, v_k) への離散フーリエ変換を考える。方程式 (5a), (5b) は次のようになる。

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial t} = C_1(k)\xi_k + T_1(k) + nl_1(\xi_k, v_k), \quad (8a)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} = C_1(k)v_k + nl_2(v_k) + C_2(k)\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2} + C_3(k)\frac{\partial \xi_k}{\partial t} + C_4(k)\xi_k. \quad (8b)$$

ただし係数は $C_i(k)$ としてまとめている、ヒルベルト変換の部分については、連続の場合のフーリエ変換で近似する。また nl_i は非線形項を表しており、物理空間に戻って計算する必要がある。式 (8b) 中の時間の2階微分を消すために (8a) を時間微分して (8b) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial t} = & C_1(k)v_k + nl_2(v_k) + C_5(k)\frac{\partial \xi_k}{\partial t} \\ & + C_2(k)nl_3\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial t}, v_k\right) + C_2(k)nl_4\left(\frac{\partial v_k}{\partial t}, \xi_k\right) + C_4(k)\xi_k \end{aligned} \quad (8c)$$

これから反復計算によって $\frac{\partial v_k}{\partial t}$ を求める。(8a), (8c) によって、 (ξ_k, v_k) の時間微分が解つたので、後は適当な方法で時間発展をさせる。ここでは中点台形法則⁷⁾を使った。

このスキームはかなり不安定で、改良が望まれる。後に示す結果では、ある時間間隔で数値フィルターをかけた物を示している。それは raised cosine filter⁸⁾ を、低波数への影響が少ないように改良したもので、具体的には波数を k_m 個取ったとして、次のような関数 $f(k)$ を波数空間の各成分にかける。

$$f(k) = \begin{cases} 1 & \left(k \leq \frac{k_m}{16}\right) \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\pi \frac{k - k_m/16}{(15/16)k_m} \right] \right\} & \left(\frac{k_m}{16} \leq k \leq k_m\right) \end{cases}$$

5 数値計算の結果

以下示すのは、密度比が $\rho_1/\rho_2 = 0.9$, $\beta = 0.1$ の結果である。流体の速度は \bar{u}_2 ではなく $F_1 \equiv (F + \bar{u}_2)/\sqrt{\eta}$ で示す。初期条件として、地形は $t = 0$ で突然流れの中に生じたとする²。これから示す3例では、地形の形は $B(x) = 0.1 \operatorname{sech}^2 x$ としている。

²徐々に山を大きくしていく計算も何例かで行ったが最終的な波形の違いは見られなかった。

最初にちょうど流れが共鳴状態にある場合 ($F = 1$) を図 3 に示す. 上から順に, 界面の時間発展の様子, $t = 50$ での界面, そして $t = 50$ での F_1 を示している. まず最初に流れが地形でせき止められる形で, 地形の上流側に界面の隆起, 下流側に界面の沈み込みが見られる. その後上流側では, 隆起の先端で孤立波が形成され始め, それと同時に流れと逆の方向へ伝播していく. 孤立波が十分に発達し終えて, 隆起した部分から離れると, 今度は次の孤立波がまた同様に形成されはじめ, これが繰り返される. この一連の孤立波の形成の繰り返しは, fBO 方程式などの非線形方程式の解析でも見られる. 一方下流側では, 地形付近の界面の沈んだ定常領域が時間とともに広がっていき, その領域と無限遠をつなぐ部分は, 時間とともに波列に分かれていく.

$t = 50$ の様子を静水方程式の解 (破線) と比較する. jump の位置は今回の初期条件では合理的な推測が出来ず, 計算結果に合わせて描いた事を注意しておく. 上流と下流で, jump に対応する部分は孤立波列になっており, 特に上流では静水方程式から予測されるよりも大きな振幅で波が伝播している. 地形付近の定常な部分や, さらにそこから下流側に延びている定常部分 (わずかに変動が見られるがこれは数値的な誤差である) では二つの解は良く一致している.

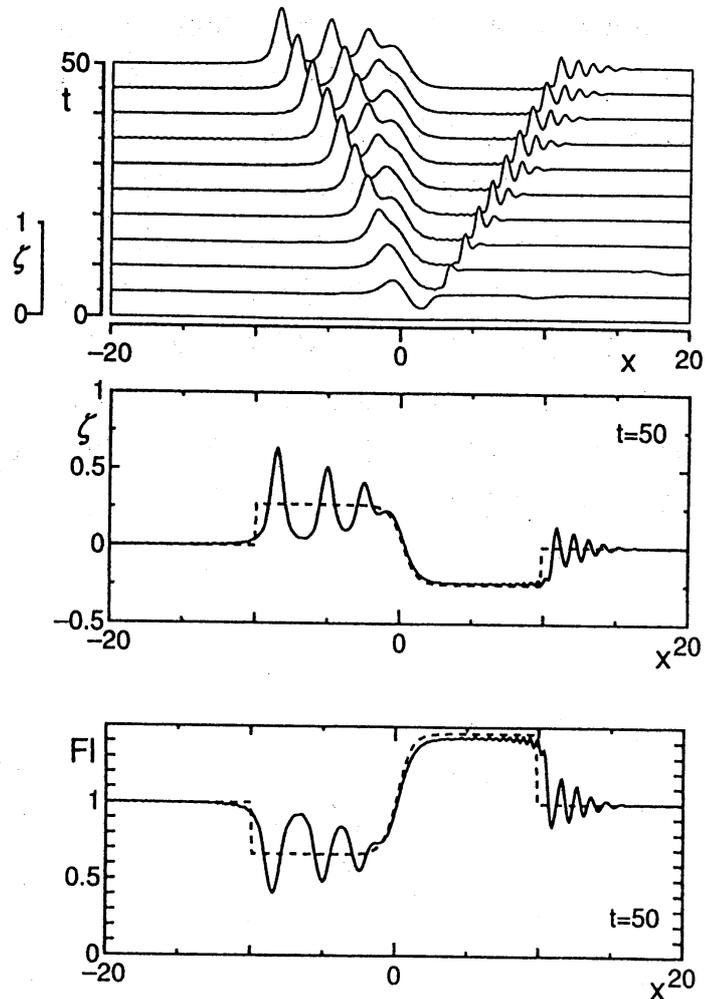


図 3: $F = 1$ での波動の生成と伝播. 実線: fCC 方程式の計算結果, 破線: 静水方程式の解.

上流に伝播する孤立波について、Choiらが提出した孤立波との比較を行った。孤立波を数値的に求める方法は、Choiらと同様の手法である。上流に向かう波列の1番大きな波の振幅に合わせて、CC方程式の解としての孤立波を計算したものが図4中に破線で示されている。十分に確立した上流へ伝わる孤立波が、CC方程式の解に落ち着いているのは自然であり、また、この事は数値計算で使ったフィルターが少なくともこのような波についてはきちんと計算している（実際不適切なフィルターをかけると、波の振幅に影響が出てしまう）、ということを示している。

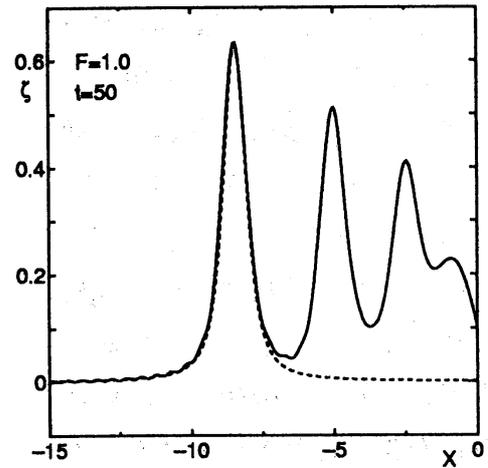


図4: 上流に進む孤立波の、CC方程式の孤立波解との比較。 実線: fCC方程式の計算結果, 破線: CC方程式の孤立波解。

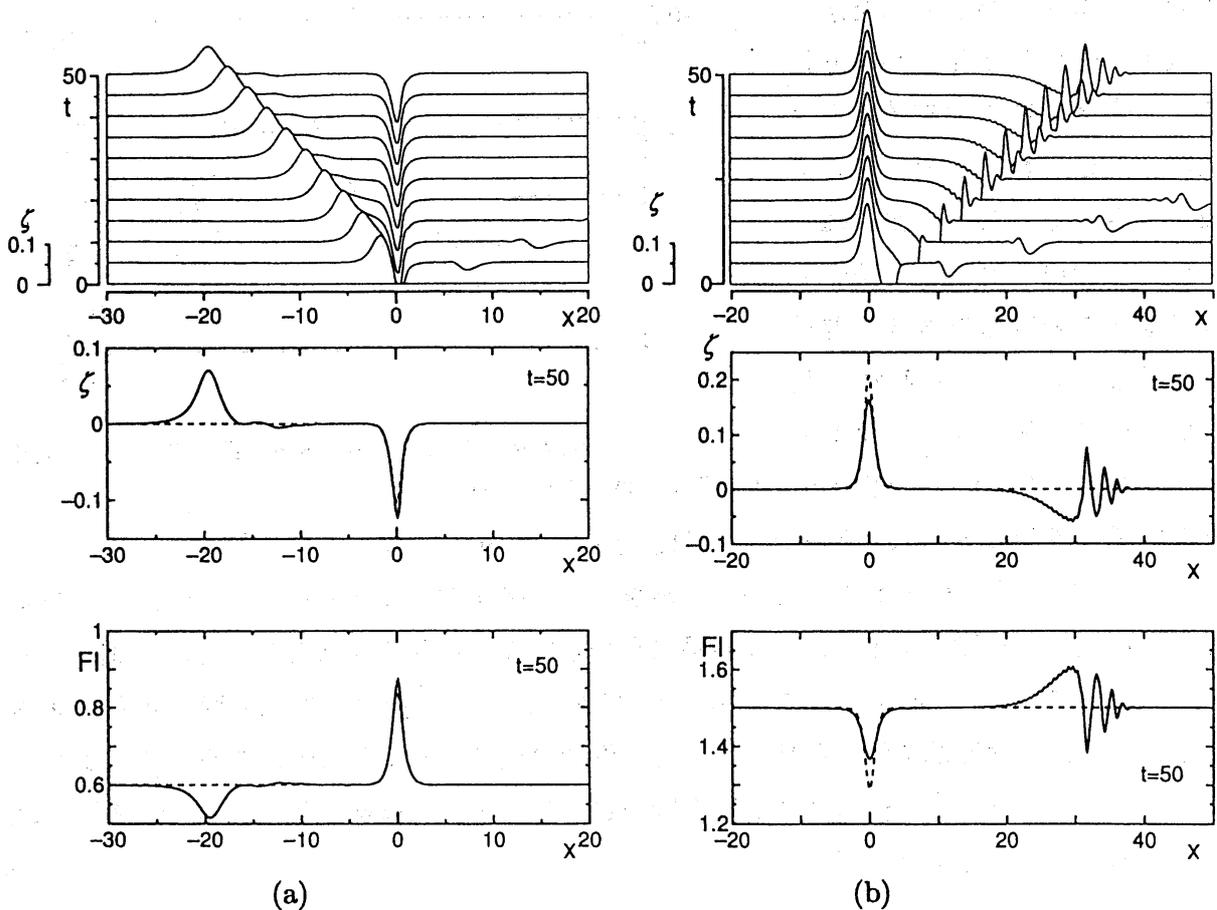


図5: (a) $F = 0.6$, (b) $F = 1.5$ での波動の生成と伝播。 実線: fCC方程式の計算結果, 破線: 静水方程式の定常解。

次に F が小さい場合を示す (図5(a))。ここに上げる例 ($F = 0.6$) は、図2で今の地形に対しての F_{-} の値よりも小さくなるように取った。この時には初期に波が上流の方

に伝わるが、 $F = 1$ の時のように次々に孤立波が生まれるという状況にはならず、それが通り過ぎてしまうと、地形の上流側は初期状態と同じ状態になる。また下流には波動は伝わらず、地形近くには定常な波形が確立される。 $t = 50$ の波形を見ると、静水方程式の解と比較して地形付近の定常状態は、 ζ , F_l 両方で変化が大きく出ている。

図 5(b)に流れの速い場合として $F = 1.5 (> F_+)$ を示す。この時には、波動は一様流に抗して上流へ進む事が出来ない。下流には、 $F = 0.6$ と同じように部分的な変動が伝播していき、それが通り過ぎると初期状態に落ち着く。地形付近に現れる定在した変化は、 $F = 0.6$ の時とは逆に、静水方程式に比べて小さい。

図 5 の両方の場合で、 F_l は全域にわたって 1 より小さいか、または大きい。静水方程式の解では、全域で定常でしかも $F_l = 1$ を取る場所がある解は許されず、その場合には jump のある解に移行する。fCC 方程式で、どの程度同じ事が言えるかどうかは、 F_{\pm} 付近の計算を行うことによって今後調べられる。

最後に地形の変化が非常に小さい場合として、 $B(x) = 0.01 \operatorname{sech}^2 x$ と取った結果を fBO 方程式の計算結果⁵⁾と比較する。 $F = 0.85$ では、上流への波はほとんど同じとみなせるが、下流の変調された孤立波群の振幅とその延びかたに、ある程度の違いがある。 $F = 1$ では、地形の振幅 (0.01) よりも大きなオーダー (0.1) の波動ができる一方、 $F = 1.2$ では地形と同程度で、fBO 方程式の仮定を満たしているとはいいいくいが、ある程度の一致が見られる。 $F = 1$ の場合、この後上流に孤立波が生成、伝播するということが fBO 方程式の結果からわかる。しかし地形の効果が小さいために、その過程はかなり時間がかかるので、長い時間スケールを基準にした fBO 方程式と違って、fCC 方程式では非常に長い時間にわたって計算をしないと現象が捕らえられない。この場合、fBO 方程式のスケールは解析に非常に有効である。

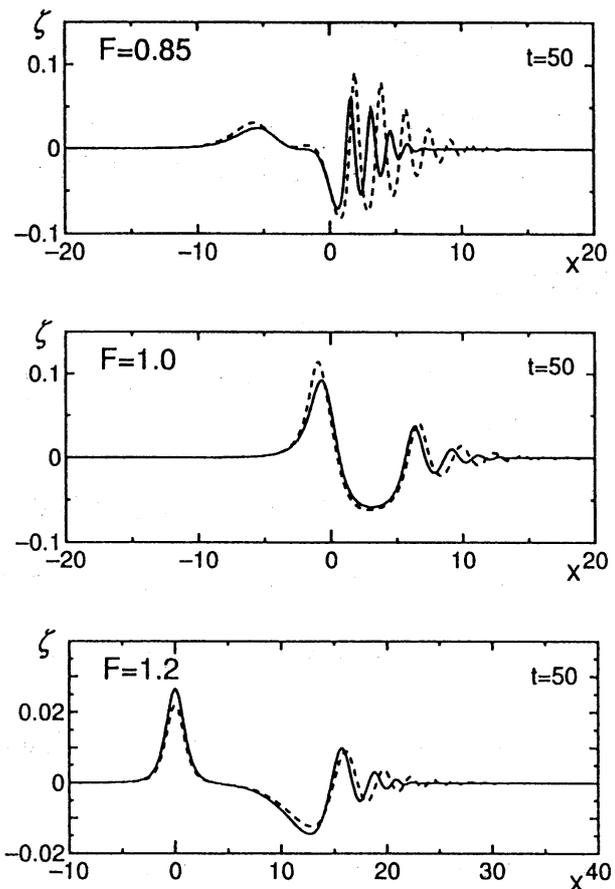


図 6: 地形の変化が非常に小さい ($B_m = 0.01$) 場合での波動の生成と伝播。実線: fCC 方程式の計算結果, 破線: fBO 方程式の計算結果。

6 まとめ・今後の課題

fCC方程式の結果を3通りのフルード数について示し、静水方程式との比較を行った。それにより、jumpに対応する孤立波列のような定性的な違いや、 F が1よりかなり大きいか小さい時に見られる地形付近の定常な流れの定量的な違いなどを明らかにした。

現在、より細かい解析を目指して数値スキームを改良している。以下のような点を今後調べていく。

- 静水方程式で流れの定性的変化がおきる F_{\pm} の値が、fCC方程式でどの程度変化しているかを調べる。図5の計算結果で地形の最大部での F_l を見ると、fCC方程式の値は $F < F_-$ では静水方程式の値よりも大きく、 $F > F_+$ では小さくなっている。このため F_{\pm} に対応する値は共に小さくなると思われるが、これを確認する。
- $F_- < F$ のある領域で、静水方程式は下流側に定常に存在するjumpを持つ解がある。これに対応する解が無いかを F_- を少し越えた辺りの F を中心に調べる。今のところ、精度の荒い計算では、このような領域が見つかっていない。

また、fBO方程式との比較では地形の下流側に存在する孤立波列に違いが現れているが、これについても理論あるいは数値的にさらに詳しく調べていく。

参考文献

- 1) Peter G. Baines: *Topographic Effects in Stratified Flows* (Cambridge University Press, 1995).
- 2) Y. Matsuno: Phys. Rev. E52 (1995) 6333.
- 3) T. Benjmain: J. Fluid Mech. 29 (1967) 559.
- 4) H. Ono: J. Phys. Soc. Japan 39 (1975) 1082.
- 5) H. Tsuji, M. Inada and M. Oikawa: Engineering Science Reports, Kyushu-University(印刷中).
- 6) W. Choi and R. Camassa: Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 1759.
- 7) 一松信: 数値解析 (朝倉書店, 1982).
- 8) C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni and T.A. Zang: *Spectral Methods in Fluid Dynamics* (Springer-Verlag, 1988).