

# 非平衡 viscous fingering の幾何学的側面

愛媛大理 松岡千博 (Chihiro Matsuoka)

## 1 基本方程式の導出

前回 [1] に引き続き、viscous fingering の分岐現象について報告する。

境界をはさんで2つの媒質が熱力学的に平衡にある条件を考える。外力 (ex. 重力) が無視できるとすると、境界面のもつ自由エネルギー  $F$  は

$$F = W + R \tag{1.1}$$

と書ける。ここに  $W$  は弾性的 (ポテンシャル) エネルギー、 $R$  は2つの異なる相をはさんで境界面が存在することからくる表面張力によるエネルギーである。今、境界面が法線方向に  $\delta\zeta$  だけ微小変位したとすると、これによる自由エネルギーの変化は

$$\delta F = \delta W + \delta R \tag{1.2}$$

となる。ここに

$$\delta W = \int \int_A (\sigma_{ij}^1 n_j - \sigma_{ij}^2 n_j) \delta\zeta dA_i \tag{1.3}$$

で  $\sigma_{ij}^k$  ( $k = 1, 2; i, j = 1, 2, 3$ ) は流体  $k$  における応力テンソル、 $dA_i$  は考えている  $i$  番目の境界面の面素、 $n_j$  は法線方向の単位ベクトルである。今、特定の境界面を考えているので、(1.3) において  $i$  は1から3まで足し合わせるのではなく、固定されたものであることを注意しておく。表面張力による項  $\delta R$  は

$$\delta R = \delta(\alpha A) = \alpha \delta A = \alpha \int \int_A 2H \delta\zeta dA \tag{1.4}$$

と書ける。ここに $\alpha$ は表面張力係数で、2つの相が共に流体であるとして定数とおいた。また $H$ は境界面の平均曲率であり、1の側から見たとき凸になるように符号を決めてある。(1-3)、(1-4)を考慮すると系が平衡である為の条件 $\frac{\delta F}{\delta \zeta} = 0$ から

$$\sigma_{i,j}^1 n_j - \sigma_{i,j}^2 n_j + 2\alpha H n_i = 0 \quad (1.5)$$

が得られる。

上下がプレートで支えられている流体の境界面を考える viscous fingering のような場合 (図1)、境界条件より系が平衡にあるならば $H = 0$ であり、これから

$$\sigma_{i,j}^1 n_j = \sigma_{i,j}^2 n_j \quad (1.6)$$

となる。(1-6)なる力学的平衡条件は、境界が Darcy 則 [2] に従う速度

$$\mathbf{V} = -k\nabla p \quad (1.7)$$

で法線方向に駆動されることを保証する。ここに $k$ は permeability と呼ばれる量で一般にテンソルであり、置換される流体がニュートン流体の場合には定数、非ニュートン流体の場合には $|\mathbf{V}|$ の関数である。また $p$ は流体の圧力である。今、我々がここで議論しようとしている、分岐を伴った viscous fingering においては境界は刻々と形

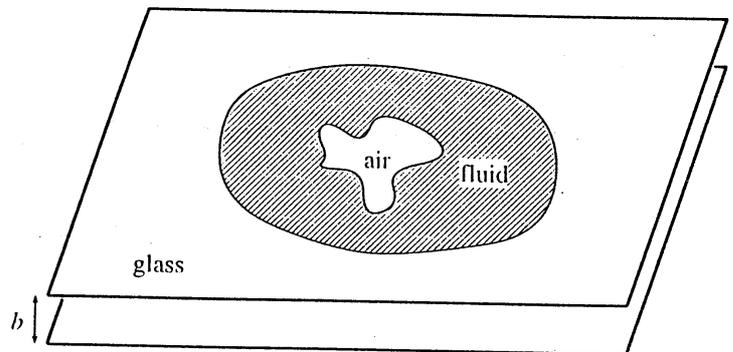


図1: 放射状 Hele-Shaw cell.  
ここで $b$ は通常 1mm 以下の order である。

を変え、一般に $H = 0$ は成り立っていない。その場合でも応力の釣り合い(1-6)式は成り立つと仮定すると、分岐を伴った viscous fingering では $\frac{\delta F}{\delta \zeta} \neq 0$ 、すなわち系の自由エネルギーは極小にないということになる。

ここで、非平衡系を記述する典型的な統計物理の手法に従って [3,4]、 $i = 3$  方向への境界の変位 $\zeta$ を系の order parameter とみて

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta \zeta} \quad (1.8)$$

なる kinematic equation を考える。(1-4)、(1-6)、(1-8) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -2\alpha H |\nabla \zeta| = \operatorname{div} \mathbf{n} |\nabla \zeta| \\ \mathbf{n} &= \frac{\nabla \zeta}{|\nabla \zeta|} \end{aligned} \quad (1.9)$$

が得られる。(1-9) はまた

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta &= 0 \\ \mathbf{u} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{x}}{\delta t} \equiv \dot{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

と eikonal 形式にも書ける。(1-9)、(1-10) より境界の法線方向速度  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  が

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial t}}{|\nabla \zeta|} = -\alpha \operatorname{div} \mathbf{n} \quad (1.11)$$

で与えられる、すなわち境界が

$$\dot{\mathbf{x}} = -(\alpha \operatorname{div} \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (1.12)$$

なる速度で動くことがわかる。

Viscous fingering のように動く境界の場合には

$$\zeta = \zeta(X_1, X_2, X_3, t)$$

を

$$X_1 = x_1, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = x_3 + Vt, \quad t = t$$

と変数変換して  $V = |\mathbf{V}|$  で動く reference frame を導入してやると便利である。ここに  $\mathbf{V}$  は (1-7) で与えられる Darcy 速度である。これにより  $\zeta = 0$ -surface は

$$\eta(x_1, x_2, x_3, t) = \zeta(x_1, x_2, x_3 + Vt, t) = 0$$

あるいは

$$\zeta(X_1, X_2, X_3, t) = \eta(X_1, X_2, X_3 - Vt, t) = 0$$

と  $\eta = 0$ -surface へ変換され、法線方向の速度は

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= -\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial t}}{|\nabla \zeta|} \\ &= -\frac{\frac{\partial \eta}{\partial t} - V \frac{\partial \eta}{\partial x_3}}{|\nabla \eta|} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} - \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{|\nabla \eta|} \end{aligned} \quad (1.13)$$

となる。以下では  $\zeta$  の代わりにこの  $\eta$  を order parameter とみなす。以上より

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{n} &= \operatorname{div} \frac{\nabla \eta}{|\nabla \eta|} \\ &= \frac{1}{|\nabla \eta|} \left( \delta_{ij} - \frac{\eta_{x_i} \eta_{x_j}}{|\nabla \eta|^2} \right) \eta_{x_i x_j} \end{aligned}$$

を考慮して境界の運動は

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \left( \delta_{ij} - \frac{\eta_{x_i} \eta_{x_j}}{|\nabla \eta|^2} \right) \eta_{x_i x_j} & \text{in } \mathbf{R}^3 \times (0, \lambda) \\ \eta = u & \text{on } \mathbf{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (1.14)$$

として

$$\Gamma_t = \{\mathbf{x} \mid \eta(\mathbf{x}, t) = 0\} \quad t \geq 0 \quad (1.15)$$

なる  $\Gamma_0$  から出発する level set  $\eta = 0$  を追いかけるという初期値問題として与えられることがわかる。尚、(1-14) において  $t \rightarrow \alpha t$  と変換した。

(1-14) の非線形放物型方程式は mean curvature flow equation と呼ばれ、1991 年の Evans と Spruck [5] の仕事を皮切りに微分幾何学の分野で盛んに研究されるようになってきた。ここでは viscous fingering における非平衡な境界に適用したが、この方程式は

$$\eta = \begin{cases} \eta_1 & d \rightarrow -\infty \\ \eta_2 & d \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (1.16)$$

と境界をはさんで 2 つの異なった相  $\eta_1$ 、 $\eta_2$  が共存しているような系に、一般的に用いることができる。ここで  $d$  は境界からの距離を表し、符号は 1 つの相の内側と外側を区別する為につけた。(1-14) は (1-10) という eikonal 形式からわかるように一般化された Hamilton-Jacobi 方程式、あるいは Hamilton-Jacobi 方程式の viscous version とでも呼ぶべきものである。通常、この解を調べる際には (1-15) のような  $\Gamma_t$  という level set を導入して、この level set (wavefront ともいう) の運動を追いかける。これにより  $\eta$  の具体的な関数形が (1-14)

という方程式の解として書き下せなくても、系の運動は逐次定まるのである。つまり、偏微分方程式の解として無限次元の力学系を考えるかわりに  $\eta = 0$  という  $\mathbf{R}^3$  上に実現される 1 つの曲面の運動を追いかけてやればよいことになる。

(1-14)、(1-15) を解くときには

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + d\mathbf{n} \quad (1.17)$$

とおいてやり、境界上の点

$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \phi(y_1, y_2))$  から

微小距離  $d = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  だけ

離れた点  $\mathbf{x}$  を逐次決めて

いくという手法を用いる

(図 2 参照)。(1-15) の  $\Gamma_i$  の

幾何学的情報はすべて、

この  $d$  の中に含まれている。

この距離関数  $d$  は

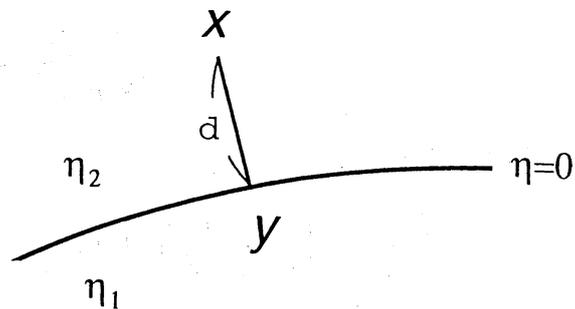


図 2: 距離関数  $d$ .  $\eta_1$  の側にあるときには  $d$  はマイナス符号となる。

$$d_i = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -2H = -2(\kappa_1 + \kappa_2) \quad (1.18)$$

なる発展方程式を満たす。ここで  $\kappa_i$  ( $i = 1, 2$ ) は  $\mathbf{y}$  における主曲率である [6]。

解法の細かい点についてはここでは詳しく触れない。次の節では、(1-14) という基本方程式から導かれる物理的な意味について考察する。

## 2 境界の面積変化

第一節で述べたように、境界面が平衡でないということは  $H \neq 0$  が保たれなくなることを意味する。第一変分  $\delta A = 0$  から導かれる  $H = 0$  なる曲面は極小曲面と呼ばれるが、これは変形前の面積の方が変形後の面積より常に小さくなっているような曲面である。以上のことから、もし曲面が平衡状態になれば、その面積は次第に(前の時刻のものより)小さくなっていくであろうと考えられる。以下では(1-14)を用いて、実際に境界の面積変化を評価してみる。

境界面の時間的变化は

$$\begin{aligned}
 \frac{dA}{dt} &= \frac{d}{dt} \iint \sqrt{g} dS = \iint \frac{d|\nabla\eta|}{dt} dS \\
 &= \iint \frac{\nabla\eta}{|\nabla\eta|} \cdot \nabla\eta_t dS = - \iint (\nabla \cdot \mathbf{n}) \eta_t dS \\
 &= -4 \iint H^2 |\nabla\eta| dS
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

で与えられる。ここに  $dS = dx_1 dx_2$  であり、 $\sqrt{g}$  は計量因子である。 $\frac{dA}{dt} \leq 0$  であるから

$$A(t_2) \leq A(t_1) \quad (t_1 < t_2) \tag{2.2}$$

が成り立つが、これより時間がたつにつれて境界の面積が減少していくことがわかる。

例えば水を空気で置換するような場合、  
 どちらの流体も理想流体と見なし得るので  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$  であり、  
 (1-5) の平衡条件が成り立つとき (プレート上下の境界条件を考慮して)  $H = 0$  でなければならないが、これは境界が完全な円 (柱) であることを意味する。  
 実験的にも、理想流体どうしの置換では、境界はプレート面内において円の形状を保ったまま一定速度で伝播することがわかっている。

置換される流体が高粘性流体の場合、応力テンソル  $\sigma_{ij}$  の中の粘性応力テンソル部分が無視できない為に、境界の接線方向に応力が働き、面の変形を引き起こす ( $H \neq 0$ )。その場合でも弾性的釣り合い条件 (1-6) は満たされるものと仮定すると、static な力学的平衡条件 (1-5) はもはや有効ではなくなる。

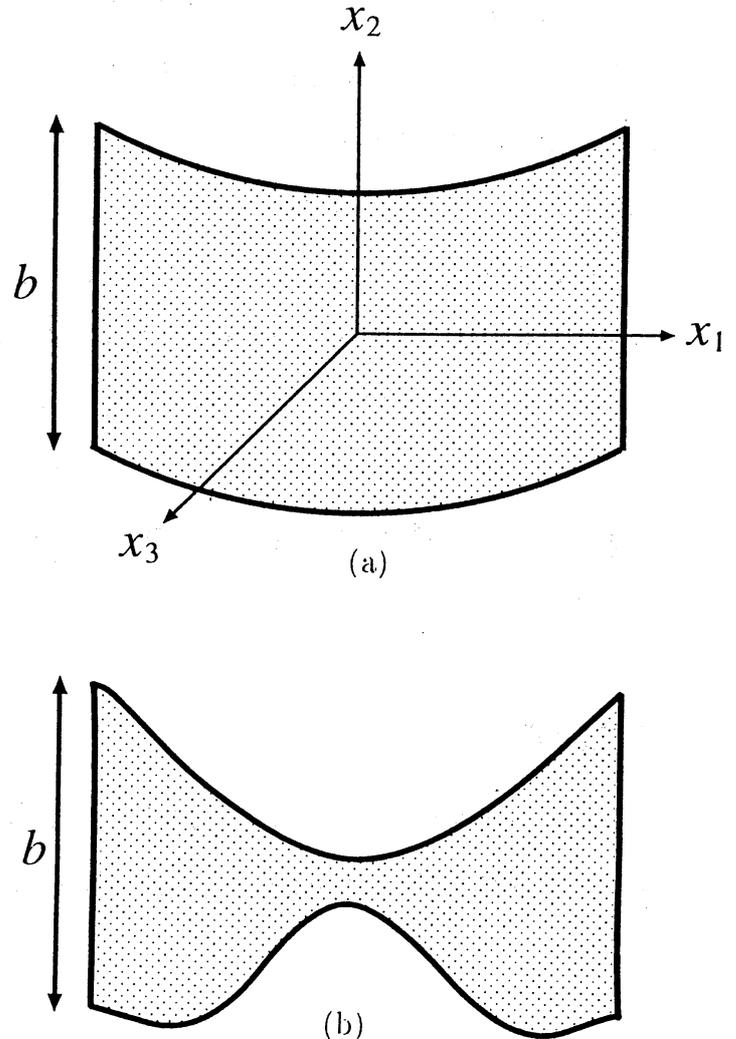


図3: プレート垂直方向 ( $b$  方向) の断面図 (部分);  
 (a) 平衡 ( $H=0$ ) な曲面 (理想流体の場合),  
 (b) 非平衡な曲面 (くびれた部分はやがて collapse する).

例えば局所的に図 3(b) のように変形した境界面は、(2-1) により  $H^2$  程度のスピードでその面積を減ずるが、曲率の最も大きい部分、すなわちくびれが最大のところが最も早くつぶれていく。空気を通さないまでにつぶれた点はよどみ点(分岐点)となり、 $|\nabla\eta| \simeq 0$  となっている。この特異点が増加することにより、考えている曲面の topology(種数) が刻々と変化していく。すなわち、境界面は幾何学的に不安定となっているのである。

### 3 結論と考察

以上、非平衡 viscous fingering の機構について述べてきた。ここで述べた理論は結晶成長の分岐現象などにもそのまま適用できる。(その場合は Darcy 速度 (1-7) に相当するものは存在しない。) ここで強調しておきたいのは、finger の分岐はプレートに垂直方向の断面内の力学で決まっており、プレート面内で Navier-Stokes 方程式を解いても分岐点の情報は得られないということである。

粘弾性の効果が大きく効いていると思われる高分子の結晶成長においても、ニュートン流体の分岐現象とよく似たものが観測されているが、電子顕微鏡による境界断面構造の測定結果から、分岐点近傍では面がつぶれて高さがほぼ 0 となっていることが確認されている [7]。

極小曲面の不安定化による分岐現象の数学的詳細(種数の変化等)については別の論文にゆずる。

### 謝辞

著者は、豊富な実験データを提供し、有益な議論をして下さった三重大工学部の川口正美氏と東大物性研究所の今井正幸氏に感謝の意を表する。

## 参考文献

- [1] 松岡千博、数理解析研究所講究録 993 「波動の非線形現象とその応用」(1997) 74.
- [2] P. G. Saffman, *J. Fluid Mech.* 173 (1986) 173 [references therein].
- [3] S. M. Allen and J. W. Cahn, *Acta Metall.* 27 (1978) 1085.
- [4] K. Kawasaki, *Prog. Theor. Phys. Soc. Jpn.* 79 (1984) 161.
- [5] L. C. Evans and J. Spruck, *J. Diff. Geom.* 33 (1991) 635.
- [6] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd ed. (Springer, 1983).
- [7] M. Imai, private communication.