数理解析研究所講究録
1030 巻 1998 年 238-247

磁性流体自由表面問題における流体と磁場の相互作用

北大工学部　水　田　　洋　(Yo Mizuta)

1　はじめに

磁性流体の自由表面には，ただ棒磁石を近づけるだけで，通常流体には見られない極めて特異な静的および動的な波が現れる．このような波の振る舞いは，流体自身と共に磁場の解析も行って理解される．流体は，非圧縮性，非回転性，非粘性の仮定のもとでは，磁気応力を考慮した Bernoulli 方程式に基づいて解析できるが，これは，自由表面における対流項・重力項・表面張力・磁気応力の平衡を表している．一方磁場は，無電流領域で非回転的で，磁束が一般に保存することから，調和性を利用した解析ができる．そのような方法のひとつが複素解析である．

流体解析と磁場解析では，流体と磁場の変化が，自由表面において相互に影響しあうことを考慮する．磁場から流体への作用は，磁場 $\boldsymbol{h}$ と磁束密度 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{h}$ の比で定義される透磁率 μ が空間変化する場所に現れる．したがって，磁性流体内部で透磁率が一様なら，この作用は，真空と磁性流体の間で透磁率が不連続的に変化する自由表面だけで考慮すればよい．磁気応力テンソルより導いた，Bernoulli 方程式中の磁気応力がこれを表している．一方流体から磁場への影響は,「自由表面をはさみ，磁束密度の法線成分 $b_{\rm n}$ と 磁場の接線成分 $h_{\rm s}$ は連続だが，磁束密度の接線成分 $b_{\rm s}$ と 磁場の法線成分 $h_{\rm n}$ は不連続」という界面条件で取り込むが，今の問題では，磁場分布は任意であり，自由表面形状の変形が極めて激しく，かつ自由表面をはさむ両領域の

透磁率が有限である．したがって充分な解析のためには，以上の場合にも有効で，しかもコンパクトな解析法が要求される．

この問題に関してこれまで，線形解析 [1, 2, 3] と，複素解析に基づく非線形解析 [4] を行ってきたが，それらの関係がいまひとつ明らかではなかった．本稿では，自由表面をはさむ両領域で透磁率を有限とした解析を見直し，これらの解析の位置づけについて見通しを得たので，報告する．

2　流体解析と磁場の作用

磁性流体に対し，非圧縮性，非回転性，非粘性を仮定し，さらに磁性流体内部で透磁率は一様とする．流体密度，速度ポテンシャル，流体速度，重力加速度，鉛直座標，内部圧力をρ, ϕ, $\boldsymbol{v} = -\nabla\phi$, g, z, p_{i} で表せば，Bernoulli の法則より，

$$\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + gz\right) + p_{\mathrm{i}} = \mathrm{const.} \tag{1}$$

となる．すなわち，磁場の効果はここでは陽に現れない．しかしこれは，自由表面における運動量流束の連続性より導いた圧力の界面条件

$$[\boldsymbol{n}\cdot(-p\mathsf{I} + \mathsf{T})\cdot\boldsymbol{n}] = -p_{\mathrm{e}} + p_{\mathrm{i}} - T = p_{\mathrm{c}} \tag{2}$$

を通じて導入される．ここで T, I, $\boldsymbol{n}$, $[\cdots]$ は磁気応力テンソル，単位テンソル，自由表面の法線ベクトル，界面を横切る値の跳び（上－下）を，p_{e}, p_{c}, $T = -[\boldsymbol{n}\cdot\mathsf{T}\cdot\boldsymbol{n}]$ は外部圧力，表面張力，磁気応力を表している．自由表面上で式 (1),(2) から内部圧力を消去すれば，Bernoulli 方程式

$$\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + g\eta\right) + p_{\mathrm{e}} + p_{\mathrm{c}} + T = \mathrm{const.} \quad (y = \eta) \tag{3}$$

が得られるが，これは，$p_e = 0$ とし，定常問題として $\phi = 0, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ とおけば，重力・表面張力・磁気応力の平衡を表すことになる．

表面張力は，表面張力係数 γ および曲率半径 (符号を含む) R で $p_c = \gamma/R$ と表される．また磁気応力テンソルの表式 $\mathsf{T} = -\left(\int_0^h b\mathrm{d}h\right)\mathsf{I} + \boldsymbol{hb}$ を用いれば，磁気応力は

$$T = -\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{\mu_i}\right]b_{\mathrm{n}}^2 - [\mu_i]\,h_{\mathrm{s}}^2\right) \tag{4}$$

となる．ここで，$b_{\mathrm{n}}, h_{\mathrm{s}}$ は $\boldsymbol{h}$ の法線成分および $\boldsymbol{b}$ の接線成分である．磁性流体（領域 $i = 1$ または i）の透磁率は真空（領域 $i = 2$ または e）より大きく $[\mu_i] = \mu_2 - \mu_1 < 0, T < 0$ であるため，磁気応力は，自由表面を持ち上げる方向に働く．

3　磁場解析と界面条件

$\boldsymbol{j}$ を電流密度とすれば，無電流領域で磁場は，Ampéreの法則 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h} = \boldsymbol{j} = 0$ より非回転的になり，スカラーポテンシャル ψ で $\boldsymbol{h} = -\mathrm{grad}\,\psi$ と表される．一方磁束密度については，磁束保存則 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{b} = 0$ が一般に成り立ち，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{a}$ で $\boldsymbol{b} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ と表される．以上により，ψ は Laplace 方程式 $\nabla^2\psi = 0$ にしたがう．

自由表面のような透磁率が変化する場所では，界面条件

$$\begin{aligned} [b_{\mathrm{n}}] &= -\left[\mu\frac{\partial\psi}{\partial n}\right] = 0, \quad [b_{\mathrm{s}}] = [\mu_i]h_{\mathrm{s}}, \\ [h_{\mathrm{s}}] &= -\left[\frac{\partial\psi}{\partial s}\right] = 0, \quad\ [h_{\mathrm{n}}] = [1/\mu_i]b_{\mathrm{n}} \end{aligned} \tag{5}$$

を考慮する．ただし，法線ベクトル，接線ベクトルを $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}$ として，$\dfrac{\partial}{\partial n} = \boldsymbol{n}\cdot\nabla, \dfrac{\partial}{\partial s} = \boldsymbol{s}\cdot\nabla$ は法線微分，接線微分である．

ここで，一様磁場が印加されている２次元の場合について，従来の線形な磁場解析についてまとめておく．表面変位を波数 k, 振幅 a, b の微小振幅波 $\eta = a\cos kx + b\sin kx$ として，領域 $i = 1, 2$ で，Laplace 方程式と $y \pm \infty$ における遠方条件を満たす磁気ポテンシャル

$$\begin{cases} \psi_2 &= (A_2\cos kx + B_2\sin kx)e^{-ky}, \\ \psi_1 &= (A_1\cos kx + B_1\sin kx)e^{ky} \end{cases} \tag{6}$$

を仮定する．磁束密度の法線成分，磁場の接線成分は，自由表面の勾配角を θ とすれば，磁束密度の x, y 成分で

$$\begin{cases} b_{\mathrm{n}} &= -b_x\sin\theta + b_y\cos\theta, \\ -\mu_i h_{\mathrm{s}} &= b_x\cos\theta + b_y\sin\theta \end{cases} \tag{7}$$

と表されるが，$h_x \simeq h_x^0 + h_{xi}^1$, $b_y \simeq b_y^0 + b_{yi}^1$, $\sin\theta \simeq \eta'$, $\cos\theta \simeq 1$ などにより，磁束密度の法線成分，磁場の接線成分は，１次のオーダーで

$$\begin{cases} b_{\mathrm{n}}^1 &\simeq b_{yi}^1 - b_{xi}^0\eta', \\ h_{\mathrm{s}}^1 &\simeq h_{xi}^1 + h_{yi}^0\eta' \end{cases} \tag{8}$$

と近似されるため，界面条件 $[b_{\mathrm{n}}^1] = 0$, $[h_{\mathrm{s}}^1] = 0$ より，

$$\begin{cases} [b_{xi}^0]\eta' &= [b_{yi}^1] = \left[-\mu_i\dfrac{\partial\psi_i}{\partial y}\right], \\ -[h_{yi}^0]\eta' &= [h_{xi}^1] = \left[-\dfrac{\partial\psi_i}{\partial x}\right] \end{cases} \tag{9}$$

が導かれる．これに式 (6) および $\eta' = -a\sin kx + b\cos kx$ を代入すれば，表面変位の係数で磁気ポテンシャルの未定係数を表す

$$\begin{pmatrix} A_2 + iB_2 \\ A_1 + iB_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1[h_{yi}^0] - i[b_{xi}^0] \\ -\mu_2[h_{yi}^0] - i[b_{xi}^0] \end{pmatrix} \frac{a + ib}{\mu_1 + \mu_2} \tag{10}$$

が得られる．したがって，式 (9) の第 2,3 辺より磁場が

$$\begin{cases} b_{xi}^1 &= k\mu_i(A_i \sin kx - B_i \cos kx) \\ &= \dfrac{[\mu_i]}{\mu_1+\mu_2}(\pm b_y^0\eta' + \mu_i h_x^0 k\eta), \\ b_{yi}^1 &= \pm k\mu_i(A_i \cos kx + B_i \sin kx) \\ &= \dfrac{[\mu_i]}{\mu_1+\mu_2}(-b_y^0 k\eta \pm \mu_i h_x^0 \eta') \end{cases} \tag{11}$$

または

$$b_{xi}^1 - ib_{yi}^1 = \frac{[\mu_i]}{\mu_1+\mu_2}(\mu_i h_x^0 + ib_y^0)(k\eta \mp i\eta') \tag{12}$$

のように得られる．これから式 (8) のように求めた磁束密度の法線成分，磁場の接線成分

$$\begin{cases} b_{\mathrm{n}}^1 &= \dfrac{-[\mu_i]b_y^0 k\eta - 2\mu_1\mu_2 h_x^0 \eta'}{\mu_1+\mu_2}, \\ -h_{\mathrm{s}}^1 &= \dfrac{[\mu_i]h_x^0 k\eta + 2b_y^0\eta'}{\mu_1+\mu_2} \end{cases} \tag{13}$$

はもちろん，領域 1,2 によらず共通になる．線形な安定性解析，周波数解析では，線形化した (4) にこれらを代入した

$$T^1 = -\left(\left[\frac{1}{\mu_i}\right] b_y^0 b_{\mathrm{n}}^1 + [\mu_i] h_x^0 h_{\mathrm{s}}^1\right) = \frac{k\eta}{\mu_1+\mu_2}\left(-\mu_1\mu_2[h_{yi}^0]^2 + [b_{xi}^0]^2\right) \tag{14}$$

を Bernoulli 方程式 (3) の中で用いる．すなわち，線形な範囲では，0 次の水平磁場 b_{xi}^0 と鉛直磁場 h_{yi}^0 は，磁気応力に対して逆向きに寄与する．

4　任意自由表面形状のための磁場の複素解析

2 次元の磁場解析では，$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{h} = \boldsymbol{j} = 0$, $\mathrm{div}\, \boldsymbol{b} = 0$ の成分表示

$$\frac{\partial h_y}{\partial x} = \frac{\partial h_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial b_x}{\partial x} = -\frac{\partial b_y}{\partial y}$$

を Cauchy-Riemann の関係と見ることで，複素解析の利用に思い至る．$Y = 0$ が真っ直ぐな自由表面を表す Flat Space (X, Y) から実際の Real Space (x, y) への写像は一般に $x = x(X, Y)$, $y = y(X, Y)$ と表されるが，$z = x + iy$, $Z = X + iY$, $z = z(Z)$ のように正則関数から導いた等角写像には，性質

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y}$$

が付与される．したがって，Flat Space で既知として与えた磁場 (H_X, H_Y) と磁束密度 (B_X, B_Y) が Cauchy-Riemann の関係

$$\frac{\partial H_Y}{\partial X} = \frac{\partial H_X}{\partial Y}, \quad \frac{\partial B_X}{\partial X} = -\frac{\partial B_Y}{\partial Y}$$

を満たせば，写像先の Real Space でも (h_x, h_y) と (b_x, b_y) が同様の関係を満たす．これは，理論解析を任意の磁場分布まで広げる際に好都合である．

$z(Z)$ で表される写像関係式を求めるため，Real Space の自由表面上の微小要素 $\mathrm{d}z$ と対応する Flat Space の微小要素 $\mathrm{d}Z$ の関係を表面傾斜角 θ と対数収縮率 τ $(c = e^{-\tau})$ で表すと，

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Z} = c \times e^{i\theta(Z)} = e^{i\{\theta(Z)+i\tau(Z)\}} \tag{15}$$

となる．したがって問題は，$\theta(Z) + i\tau(Z)$ を求めることに移された．

式 (15) の実部・虚部からは変換

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\partial y}{\partial Y} = e^{-\tau}\cos\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial X} = -\frac{\partial x}{\partial Y} = e^{-\tau}\sin\theta \tag{16}$$

が，式 (15) の逆変換からは

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = e^{\tau}\cos\theta, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y} = -e^{\tau}\sin\theta \tag{17}$$

が導かれるが，特に式 (16) を $Y=0$ 上で X について積分すれば，自由表面形状を

$$x(X)=\int_{X_0}^{X}\mathrm{d}X' e^{-\tau}\cos\theta,\quad y(X)=\int_{X_0}^{X}\mathrm{d}X' e^{-\tau}\sin\theta \tag{18}$$

と媒介変数表示の形に求めることができる．これにより，多価な表面形状も表現可能になる．

簡潔な解析のため，以下では複素磁気ポテンシャルと複素磁場を導入する．$\boldsymbol{h}=-\mathrm{grad}\,\psi$, $\boldsymbol{b}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ の成分表示は，

$$\begin{cases} h_x = -\dfrac{\partial\psi_i}{\partial x}, & b_x = \dfrac{\partial a_i}{\partial y}=\mu_i h_x, \\ h_y = -\dfrac{\partial\psi_i}{\partial y}, & b_y = -\dfrac{\partial a_i}{\partial x}=\mu_i h_y \end{cases} \tag{19}$$

となるが，複素磁気ポテンシャル $w_i(z)=\mu_i\psi_i-ia_i$ と複素磁場 $f_i=b_x-ib_y=\mu_i(h_x-ih_y)$ を Real Space で定義すれば，式 (19) は全て，$f_i=-\dfrac{\mathrm{d}w_i}{\mathrm{d}z}$ に集約される．同様に，Flat Space でも $W_i(Z_i)=\mu_i\Psi_i-iA_i$ と $F_i=\mu_i H_X-iB_Y$ を定義すると，$w_i(z)=W_i(Z_i)$ および $-\dfrac{\mathrm{d}w_i}{\mathrm{d}z}=-\dfrac{\mathrm{d}Z_i}{\mathrm{d}z}\dfrac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}Z_i}$ から，両 Space 間での磁場の変換式

$$f_i=b_x-ib_y=e^{\tau_i-i\theta_i}(\mu_i H_X-iB_Y)=e^{\tau_i-i\theta_i}F_i \tag{20}$$

が導かれる．ここで θ_i,τ_i の添え字は，等ポテンシャル線が自由表面を横切る際，連続でも折れ曲がることを考慮して，領域ごとの傾斜角と収縮率を区別したものである．一方以下では，f_i と F_i の差を明示して，$f_i=F_i+f_i^1$ を用いることもある．複素磁場を用いると，磁気応力 (4) は

$$T=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu_i}\right]\mathrm{Re}\,f_2^* f_1 \tag{21}$$

と表される．

(7) の両式は

$$\gamma_i \equiv -\mu_i h_{\mathrm{s}} - ib_{\mathrm{n}} = e^{i\theta}(b_x - ib_y) = e^{i\theta} f_i = e^{i\theta}(F_i + f_i^1) \tag{22}$$

とまとめられるため，界面条件は簡潔に

$$\begin{cases} 0 \;=\; -[h_{\mathrm{s}}] \;=\; [H_Y]\sin\theta + \mathrm{Re}\left[\dfrac{e^{i\theta} f_i^1}{\mu_i}\right], \\ 0 \;=\; -[b_{\mathrm{n}}] \;=\; [B_X]\sin\theta + \mathrm{Im}\left[e^{i\theta} f_i^1\right] \end{cases} \tag{23}$$

と表すことができる．ただし，$[B_Y] = 0, [H_X] = 0$ を用いた．ここで，$\theta(Z)$ に共役で $Y \to 0$ で $\tau \to 0$ となる $\tau(Z)$ を導入して，$g_2(Z) \equiv e^{-i\theta+\tau} f_2^1$, $g_1(Z) \equiv e^{i\theta-\tau} f_1^1$ を定義すると，上の界面条件は，

$$\begin{cases} 0 \;=\; -[h_{\mathrm{s}}] \;=\; [H_Y]\sin\theta + \mathrm{Re}\left(\dfrac{g_2^*}{\mu_2} - \dfrac{g_1}{\mu_1}\right), \\ 0 \;=\; -[b_{\mathrm{n}}] \;=\; [B_X]\sin\theta - \mathrm{Im}\left(g_2^* + g_1\right) \end{cases} \tag{24}$$

となる．一方，$g_i(Z)$ の正則性から得られる $\dfrac{\partial g_i}{\partial X} + i\dfrac{\partial g_i}{\partial Y} = 0$ の実部・虚部を利用すれば，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial X}\left(\dfrac{g_2^*}{\mu_2} - \dfrac{g_1}{\mu_1}\right) \;=\; \mathrm{Re}\,\dfrac{\partial}{\partial X}\left(\dfrac{g_2^*}{\mu_2} - \dfrac{g_1}{\mu_1}\right) + i\mathrm{Re}\,\dfrac{\partial}{\partial Y}\left(\dfrac{g_2^*}{\mu_2} + \dfrac{g_1}{\mu_1}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial X}\left(g_2^* + g_1\right) \;=\; \mathrm{Im}\,\dfrac{\partial}{\partial Y}\left(-g_2^* + g_1\right) + i\mathrm{Im}\,\dfrac{\partial}{\partial X}\left(g_2^* + g_1\right) \end{cases} \tag{25}$$

を導くことができる．

前節にまとめた線形な場合は，$g_2 \simeq f_2^1 = -ik\mu_2(A_2 - iB_2)e^{ikZ}$, $g_1 \simeq f_1^1 = ik\mu_1(A_1 + iB_1)e^{-ikZ}$ に相当するので，式 (25) の中で，Y による微分を定めることができる．これに (24) を用いると，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial X}\left(\dfrac{g_2^*}{\mu_2} - \dfrac{g_1}{\mu_1}\right) \;=\; \left(\dfrac{\partial}{\partial X} - ik\right)\mathrm{Re}\left(\dfrac{g_2^*}{\mu_2} - \dfrac{g_1}{\mu_1}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \;=\; -\left(\dfrac{\partial}{\partial X} - ik\right)[H_Y]\sin\theta, \\ \dfrac{\partial}{\partial X}\left(g_2^* + g_1\right) \;=\; \left(k + i\dfrac{\partial}{\partial X}\right)\mathrm{Im}\left(g_2^* + g_1\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \;=\; \left(k + i\dfrac{\partial}{\partial X}\right)[B_X]\sin\theta \end{cases} \tag{26}$$

が得られる．$\sin\theta \simeq \partial\eta/\partial X$ とみなして両辺を X で積分し，g_2^*, g_1 についての連立方程式と見てこれを解けば，式 (12) が導かれる．

次に，$\mu_2 \to \infty$ の場合には，界面条件より，自由表面自身が等ポテンシャル線となり，磁力線，磁束線は自由表面と直交する．式 (22) と (20) を用いて，磁場の自由表面に関する成分は，Flat Space の磁場で直接

$$\gamma_i = e^{i\theta} f_i = e^{i\theta} e^{\tau_i - i\theta_i} F_i \tag{27}$$

と表され，$\theta_i \to \theta, \tau_i \to \tau$（この τ は g_i の定義に現れたものと区別する）の極限では，$\gamma_i \to e^\tau F_i$ となることがわかる．その実部・虚部は，以前の非線形解析 [4] で用いた

$$\left\{\begin{array}{rcccccl} b_\mathrm{n} & = & -\mu_i \dfrac{\partial\psi_i}{\partial n} & = & -\mu_i \left(\dfrac{\partial X_i}{\partial n}\dfrac{\partial\Psi_i}{\partial X_i} + \dfrac{\partial Y_i}{\partial n}\dfrac{\partial\Psi_i}{\partial Y_i}\right) & = & e^\tau B_Y, \\ -h_\mathrm{s} & = & \dfrac{\partial\psi_i}{\partial s} & = & \left(\dfrac{\partial X_i}{\partial s}\dfrac{\partial\Psi_i}{\partial X_i} + \dfrac{\partial Y_i}{\partial s}\dfrac{\partial\Psi_i}{\partial Y_i}\right) & = & e^\tau H_X, \end{array}\right. \tag{28}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial s} = -e^\tau, \quad \frac{\partial X_i}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial n} = e^\tau$$

と一致する．以前の解析では，(28) を磁気応力 (4) に用いて Bernoulli 方程式 (3) を θ および τ に関する方程式に書き換え，θ と τ を関係づける Hilbert 変換と連立させ，これらを解いて θ と τ を求めた．この際，表面張力には，表面変位の 2 階微分近似でなく，厳密な曲率の定義から導いた $p_\mathrm{c} = -\gamma e^\tau \partial\theta/\partial X$ を用いた．

5　まとめ

磁性流体自由表面の解析では，流体と磁場の相互作用を考慮しつつ，流体解析と磁場解析を同時に行う必要があるが，本稿では後者を強調した．複素解析おける等角写像法を用いれば，1) 変化が激しい自由表面形状，2) 任意

の磁場分布，3) 有限な自由表面上下の透磁率，の場合にも有効な解析法を構築できるが，ここでは，これまでの線形解析，非線形解析との関係を調べ，これらによる結果を再導出できることを示した．新たな解析法を展開して自由表面形状を求め，前回の非線形解析の結果と比較することが，次の課題である．

参考文献

[1] 水田　洋: 表面と界面のある磁性流体の理論解析; 京都大学数理解析研究所講究録「流体における波動現象の数理とその応用」, **830**, pp.226–235 (1993).

[2] 水田　洋: 二層磁性流体における表面波と界面波の相互作用; 京都大学数理解析研究所講究録「流体における波動現象の数理とその応用」, **866**, pp.263–276 (1994).

[3] 水田　洋: 不均一磁場における磁性流体界面波動の解析; 京都大学数理解析研究所講究録「流体の非線形波動現象の数理とその応用」, **908**, pp.225–236 (1995).

[4] 水田　洋: 強磁場における磁性流体表面波の解析; 京都大学数理解析研究所講究録「波の非線形現象の数理とその応用」, **949**, pp.40–50 (1996).