

Ishimori 方程式の dromion 解と lump 解

名古屋大 VBL 今井 健二 (Kenji Imai)

§1. Introduction

(2+1) 次元 (空間 2 次元 + 時間 1 次元) の soliton 方程式は Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式, Davey-Stewartson (DS) 方程式, Ishimori 方程式等が知られている. これらはそれぞれ (1+1) 次元の soliton 方程式である K-dV 方程式, 非線形 Schrödinger 方程式, Heisenberg 強磁性体方程式が空間 2 次元化されたものである. Soliton 方程式の空間 2 次元化によって生じる興味深い現象の一つに, 局在解の多様性がある. (1+1) 次元における局在解, 即ち 1 次元 soliton の単純な空間 2 次元化はいわゆる line-soliton と呼ばれるもので, 2 次元空間中の 1 次元方向のみの局在である. 一方, (2+1) 次元における局在解, 即ち 2 次元空間の全ての方向について局在している厳密解は, 無限遠方で指数関数的に減衰する dromion やべき関数的に減衰する lump 等いろいろと見出されており, またその性質はいくつかの点で非 soliton 的であることが分かっている [2].

本研究では, 特に Ishimori 方程式の局在解について考察する.

Ishimori 方程式は 1 次元古典スピン系の連続体近似である Heisenberg 強磁性体方程式を空間 2 次元化した方程式である [1].

$$\begin{aligned} \vec{S}_t &= -\frac{a}{2}\vec{S} \times (\vec{S}_{yy} - \varepsilon^2 \vec{S}_{xx}) + \phi_x \vec{S}_y + \phi_y \vec{S}_x, \\ \phi_{yy} + \varepsilon^2 \phi_{xx} &= \varepsilon^2 a (\vec{S} \cdot (\vec{S}_x \times \vec{S}_y)). \end{aligned} \quad (1)$$

ここで $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$, $|\vec{S}|^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$ であり, $S_j = S_j(x, y, t)$ 及び $\phi = \phi(x, y, t)$ は実関数, a は実定数である. 方程式 (1) はそれぞれ $\varepsilon^2 = -1$ のとき Ishimori-I (Ish-I), $\varepsilon^2 = +1$ のとき Ishimori-II (Ish-II) と呼ばれており, 解の性質は全く異なっている. 本研究では Ish-I 方程式のみを扱う (Ish-II 方程式については [6] を参照).

Ish-I 方程式は既に以下の 3 つのタイプの局在解が見出されている (ここで局在解とは, $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ において $\vec{S} \rightarrow (0, 0, 1)$ となる解のことである) [3]. (i) 指数関数的

な局在解 (dromion), (ii) べき関数的な局在解 (lump), (iii) ある方向には指数関数的に, 他の方向にはべき関数的に局在している解 (exponentially-rationally localized solution). これら 3 つのタイプの局在解が 1 つの方程式の中に見出されているのは Ish-I 方程式のみであり, KP 方程式や DS 方程式ではその方程式の係数の違いによって見出されている局在解のタイプは (少なくとも知られている限り) 異なっている. 局在解 (i), (ii), (iii) は逆散乱法を用いて構成されている. 本研究では, binary Darboux 変換 (§2) を用いて厳密解を構成し (§3, 4), 局在解 (i), (ii), (iii) のみならず新しい局在解を含むことを示す (§5). また, この方法と逆散乱法の違いを議論する (§6).

なお, 本研究の詳細は文献 [9] に掲載予定である.

§2. Binary Darboux 変換

Ishimori 方程式は以下のような Lax pair を持っていることが知られている.

$$\begin{aligned} \Psi_y = U\Psi_x, \quad \Psi_t = V_2\Psi_{xx} + V_1\Psi_x, \quad (2) \\ \begin{cases} U = i\varepsilon \begin{pmatrix} S_3 & S_1 + iS_2 \\ S_1 - iS_2 & -S_3 \end{pmatrix}, & V_2 = \varepsilon aU, \\ V_1 = a \left(-\frac{1}{4\varepsilon^2}[U, U_y] + \frac{1}{2}U_x \right) + \phi_x U + \phi_y I. \end{cases} \end{aligned}$$

ここで $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[U, U_y] = UU_y - U_yU$ である. Ishimori 方程式は線形方程式 (2) の積分可能条件 $(\Psi_y)_t = (\Psi_t)_y$ から導かれる. 従って Ishimori 方程式の研究は, 線形方程式 (2) の研究に帰着される.

線形方程式 (2) は Darboux 変換 (DT) $(\Psi, U, V_n) \mapsto (\Psi', U', V'_n)$ に対して共変であることが分かっている [6].

$$\begin{aligned} \Psi' = \Psi - \tau\Psi_x, \quad \tau = \Psi_1(\Psi_{1,x})^{-1} \quad (3) \\ U' = \tau U \tau^{-1}, \quad V'_2 = \tau V_2 \tau^{-1}, \\ V'_1 = \tau \left(V_1 + [V_2, \tau^{-1}] - 2V_2 \tau^{-1} \tau_x \right) \tau^{-1}. \end{aligned}$$

つまり, Ψ が線形方程式 (2) の解であるときには, 式 (3) で与えられる Ψ' は線形方程式 (2) において係数 U, V_2, V_1 を U', V'_2, V'_1 にとりかえた線形方程式の解である. ここで式

(3) 中の $\Psi_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix}$ は線形方程式 (2) の解である。即ち, Darboux 変換は変換する前の線形方程式の一つの解 Ψ_1 をパラメーターとして持っている。

ところが, Ish-I 方程式は DT に対して共変ではない。というのは, $\varepsilon = -i$ という制限によって線形方程式 (2) の DT に対する共変性が破られるからである。そこで, 以下のような binary Darboux 変換 (BDT) $(\Psi, U, V_n) \mapsto (\Psi^{(1)}, U^{(1)}, V_n^{(1)})$ が導入される [5].

$$\Psi^{(1)} = \Psi - \Gamma \partial^{-1}(\Psi_1^* \Psi_x), \quad \Gamma = \Psi_1 \Lambda^{-1}, \quad \Lambda = \partial^{-1}(\Psi_1^* \Psi_{1,x}), \quad (4)$$

$$U^{(1)} = \Upsilon U \Upsilon^{-1}, \quad V_2^{(1)} = \Upsilon V_2 \Upsilon^{-1}, \quad (5)$$

$$V_1^{(1)} = \Upsilon \left(V_1 - [V_2, \Upsilon^{-1} \Gamma \Psi_{1,x}] - 2V_2 \Upsilon^{-1} \Upsilon_x \right) \Upsilon^{-1}.$$

ここで $\Upsilon = I - \Gamma \Psi_1^* = I - \Psi_1 \Lambda^{-1} \Psi_1^*$ である。記号 $*$ は Hermitian conjugate を表す。積分演算子 ∂^{-1} は以下の線積分によって定義される。

$$\begin{aligned} \partial^{-1}(\Psi_1^* \Psi_x) &= \int_{(x_0, y_0, t_0)}^{(x, y, t)} L(\Psi_1, \Psi) + \frac{1}{2} \Psi_1^* \Psi_1 |_{(x_0, y_0, t_0)} + C, \quad (6) \\ L(\Psi_1, \Psi) &= \Psi_1^* \Psi_x dx + \Psi_1^* \Psi_y dy + (\Psi_1^* \Psi_t - \Psi_{1,x}^* V_2 \Psi_x) dt. \end{aligned}$$

式 (6) の第 2 式について $d(L(\Psi_1, \Psi)) = 0$ であることが示されるため, 式 (6) の第 1 式の右辺の積分は積分路に依存せず, 始点 (x_0, y_0, t_0) 及び終点 (x, y, t) のみで定まる。また C は条件 $C + C^* = 0$ を満たす任意の定数行列とする。

BDT (4) は DT (3) から求められる (DT から BDT を求める方法については文献 [4] を参照)。Ish-I 方程式 (即ち, $\varepsilon = -i$ が課された線形方程式 (2)) は BDT に対して共変である。Ish-I 方程式の従属変数 \vec{S}, ϕ は線形方程式 (2) の係数 U, V_1 と等価であるので, \vec{S}, ϕ の変換 $\vec{S}^{(1)} = (S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)})$, $\phi^{(1)}$ は $U^{(1)}, V_1^{(1)}$ の式 (5) から求められる。

§3. 1-soliton 解の構成

まず Ish-I 方程式の自明な解から出発する。

$$\vec{S} = (0, 0, 1), \quad \phi = \frac{1}{2} (\phi_1(\xi, t) + \phi_2(\eta, t)). \quad (7)$$

ここで $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ とし, $\phi_1(\xi, t)$, $\phi_2(\eta, t)$ は任意関数とする. このとき, Ish-I 方程式の従属変数の変換 $\vec{S}^{(1)} = (S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)})$, $\phi^{(1)}$ は式 (5) から,

$$S_1^{(1)} + iS_2^{(1)} = \frac{-2fg}{|f|^2 + |g|^2}, \quad S_3^{(1)} = \frac{|f|^2 - |g|^2}{|f|^2 + |g|^2}, \quad (8)$$

$$\phi^{(1)} = \phi + 2a \arctan \left(\frac{\Im(D)}{\Re(D)} \right)$$

である. ここで

$$f = \begin{vmatrix} \Lambda & F_1^* \\ F_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad g = \begin{vmatrix} \Lambda & F_2^* \\ F_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad D = |\Lambda| \quad (9)$$

であり, F_1, F_2 はそれぞれ Ψ_1 の第 1 行, 第 2 行である.

$$F_1 = (\psi_1, \psi_2), \quad F_2 = (\varphi_1, \varphi_2). \quad (10)$$

さらに, Λ は定義式 (6) より

$$\Lambda = (\lambda_{jk}), \quad \lambda_{jk} = \lambda_{jk}[\psi] + \lambda_{jk}[\varphi] + c_{jk}, \quad (11)$$

$$\lambda_{jk}[\psi] \equiv \int_{(\xi_0, t_0)}^{(\xi, t)} \left\{ \psi_j^* \psi_{k, \xi} d\xi + (\psi_j^* \psi_{k, t} + ia\psi_{j, \xi}^* \psi_{k, \xi}) dt \right\} + \frac{1}{2} \psi_j^* \psi_k \Big|_{(\xi_0, t_0)}, \quad (12)$$

$$\lambda_{jk}[\varphi] \equiv \int_{(\eta_0, t_0)}^{(\eta, t)} \left\{ \varphi_j^* \varphi_{k, \eta} d\eta + (\varphi_j^* \varphi_{k, t} - ia\varphi_{j, \eta}^* \varphi_{k, \eta}) dt \right\} + \frac{1}{2} \varphi_j^* \varphi_k \Big|_{(\eta_0, t_0)} \quad (13)$$

($j, k = 1, 2$) と書ける. ここで C の成分 c_{jk} は条件 $c_{jk} + c_{kj}^* = 0$ を満たす任意の複素定数である. 最後に ψ_j, φ_j ($j = 1, 2$) は, Ψ_1 が線形方程式 (2) の解であることより, 以下の線形方程式の解である.

$$\psi_{j, t} = -ia\psi_{j, \xi\xi} + \{\phi_1(\xi, t)\}_\xi \psi_{j, \xi}, \quad \psi_j = \psi_j(\xi, t), \quad (14)$$

$$\varphi_{j, t} = +ia\varphi_{j, \eta\eta} - \{\phi_2(\eta, t)\}_\eta \varphi_{j, \eta}, \quad \varphi_j = \varphi_j(\eta, t). \quad (15)$$

以上より, Ish-I 方程式の厳密解を求めることが線形方程式 (14), (15) を解くことに帰着された. つまり, 線形方程式 (14), (15) の解 ψ_j, φ_j を式 (11), (12), (13) へ代入して λ_{jk} を求め, さらにこれらを (10), (9), (8) へと順次代入していくことにより変換 $\vec{S}^{(1)}$, $\phi^{(1)}$ が得られる. これは Ish-I 方程式の厳密解であり, 1-soliton 解に相当するものである.

§4. M -soliton 解の構成

次に, M -soliton に相当する厳密解を構成する. それは, §2 の BDT の操作を M 回繰り返すことにより得られる解として定義される. しかし, このような逐次的な作業を行うことはかなり面倒である. そこで, この作業と等価な変換 (M -BDT) $\Psi \mapsto \Psi^{(M)}$ を以下のように導入する.

$$\Psi^{(M)} = \Psi - \Gamma \partial^{-1}(\widetilde{\Psi}^* \Psi_x), \quad \Gamma = \widetilde{\Psi} \Lambda^{-1}, \quad \Lambda = \partial^{-1}(\widetilde{\Psi}^* \widetilde{\Psi}_x). \quad (16)$$

ここで $\widetilde{\Psi}$ は線形方程式 (2) の M 個の解 Ψ_j ($j = 1, 2, \dots, M$) を並べてできる $2 \times 2M$ 行列である.

$$\widetilde{\Psi} = \left(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_M \right) = \begin{pmatrix} \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \dots, \psi_{2M-1}, \psi_{2M} \\ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots, \varphi_{2M-1}, \varphi_{2M} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

つまり BDT (4) において Ψ_1 を $\widetilde{\Psi}$ に置き換えただけである. 式 (4) と式 (16) の類似性から分かるように, 前節での結果は M -BDT でもほとんどそのまま使える. 即ち, 変換 $\vec{S}^{(M)}$, $\phi^{(M)}$ は式 (8), (9) で与えられる. また, 式 (11), (12), (13), (14), (15) もそのままよい (ただし, $j, k = 1, 2, 3, 4, \dots, 2M-1, 2M$ とする). 式 (10) は

$$\begin{aligned} F_1 &= (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \dots, \psi_{2M-1}, \psi_{2M}), \\ F_2 &= (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots, \varphi_{2M-1}, \varphi_{2M}) \end{aligned} \quad (18)$$

であるとする. このようにして Ish-I 方程式の M -soliton 解が構成される. ここで得られた解はいわゆる Grammian 型の表現の拡張になっている.

§5. Ishimori-I 方程式の局在解

前節の M -soliton 解は必ずしも局在解であるとは限らない. そこで, 本節ではこの解から局在解を引き出すことを考える. ここからは $\phi_1(\xi, t) = \phi_2(\eta, t) = 0$ であるとする. このとき線形方程式 (14), (15) は以下のようなになる.

$$\psi_{j,t} = -ia\psi_{j,\xi\xi}, \quad \varphi_{j,t} = +ia\varphi_{j,\eta\eta}. \quad (19)$$

(1) dromion, lump, exponentially-rationally localized solution

最も単純な場合として $M = 1$ を考える. 以下のような線形方程式 (19) の指数関数解を与えれば, dromion, lump, exponentially-rationally localized solution が得られる.

$$\psi_1 = A \exp \theta, \quad \psi_2 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = B \exp \vartheta.$$

ここで $\theta = p\xi - iap^2t$, $\vartheta = q\eta + iaq^2t$ であり, A, B, p, q は任意の複素定数である. 3種類の解の違いは p, q の値の違いで分けられる. (i) $\Re(p), \Re(q)$ が両方とも 0 でないとき, dromion 解である. (ii) $\Re(p) = \Re(q) = 0$ のとき, lump 解である. (iii) $\Re(p), \Re(q)$ のうち片方だけが 0 のとき, exponentially-rationally localized solution である.

(2) dromion, lump, exponentially-rationally localized solution の拡張

線形方程式 (19) の指数関数解の最も一般的な形は

$$\psi_j = \sum_{m=1}^{N_j} A_{jm} \exp(\theta_{jm}(\xi, t)), \quad \varphi_j = \sum_{m=1}^{N'_j} B_{jm} \exp(\vartheta_{jm}(\eta, t)), \quad (20)$$

($j = 1, 2, \dots, 2M - 1, 2M$) である. ここで

$$\theta_{jm}(\xi, t) = p_{jm}\xi - iap_{jm}^2t, \quad \vartheta_{jm}(\eta, t) = q_{jm}\eta + iaq_{jm}^2t,$$

N_j, N'_j は非負整数, $A_{jm}, B_{jm}, p_{jm}, q_{jm}$ は複素定数である. 一般に, 指数関数解 (20) から得られる Ish-I 方程式の解は局在解であるとは限らない. しかし, 以下の選択の下では局在解になる.

$$\begin{aligned} \varphi_j &= 0 & (1 \leq j \leq J), \\ \psi_j &= 0 & (J+1 \leq j \leq J+K = 2M). \end{aligned} \quad (21)$$

ここで J, K は正の整数である. 選択 (21) は DS-I 方程式の dromion 解の研究において J. J. C. Nimmo によって初めて導入された [7]. ここで得られた解は (1) の拡張であり, dromion, lump 等の相互作用を含んでいる.

(3) 新しい lump 解

再び $M = 1$ の場合を考える. 線形方程式 (19) の解として以下のもの考える.

$$\psi_1 = A\hat{\xi} \exp \theta, \quad \psi_2 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = B\hat{\eta} \exp \vartheta. \quad (22)$$

ここで $\theta = i(\mu\xi + a\mu^2t)$, $\vartheta = i(\nu\eta - a\nu^2t)$, $\hat{\xi} = \xi + 2a\mu t + \alpha$, $\hat{\eta} = \eta - 2a\nu t + \beta$ であり, A, B は複素定数, μ, ν, α, β は実定数である. このとき Ish-I 方程式の未知の lump 解が得られる (図 1).

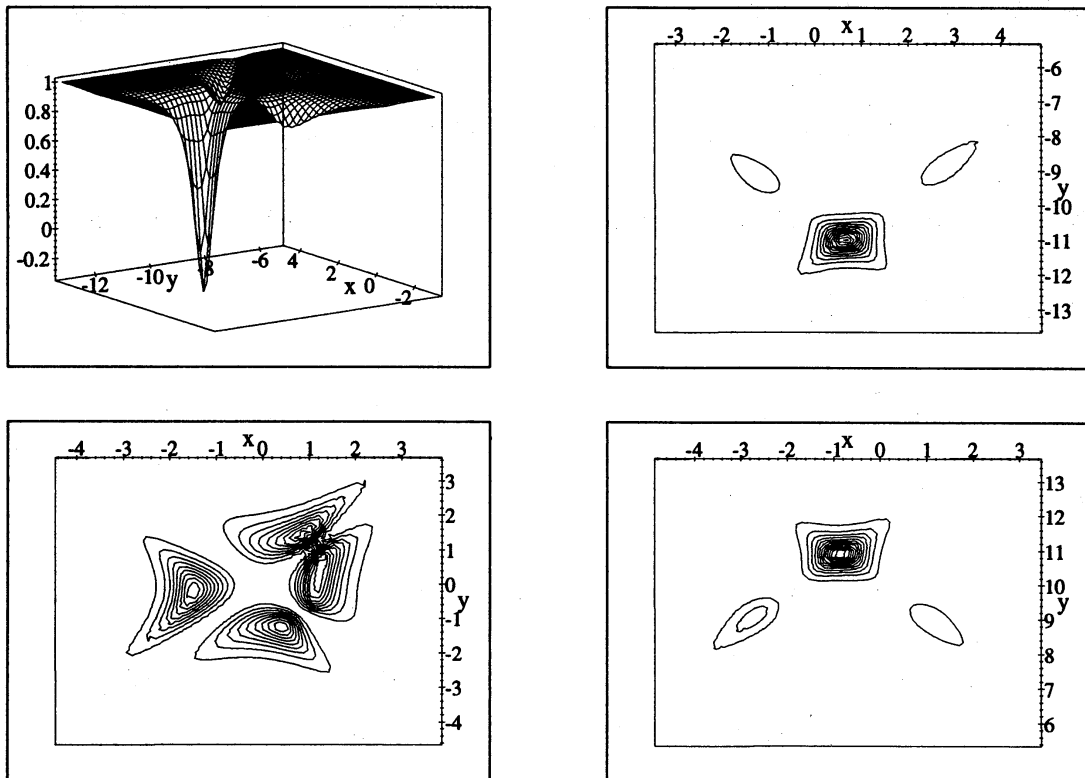


図 1: Lump changing the minimal values; (a) 3D-plot of $S_3^{(1)}$ at $t = -2$, (b) Contour lines of $S_3^{(1)}$ at $t = -2$, (c) Contour lines of $S_3^{(1)}$ at $t = 0$, (d) Contour lines of $S_3^{(1)}$ at $t = +2$; $\mu = 1, \nu = 1.2, A = 1 + i, B = 1.2 + 0.3i, c_{11} = 1.5i, c_{12} = 0.5 + 2.2i, c_{22} = 0.5i, \alpha = \beta = 0, a = -2$. (文献 [9] からの転載)

§6. Conclusions

Binary Darboux 変換を用いて Ish-I 方程式の M -soliton 解を Grammian 型の表現で構成することに成功し, その中に, 既に知られている局在解 (dromion, lump, exponentially-localized solution) ばかりでなく未知の局在解も含まれていることを示した.

ここで, 逆散乱法と本方法との違いについて述べる.

逆散乱法では, 線形方程式の逆散乱問題に結びつけて, ある境界条件の下での初期値問題を解くことを考える. 一方, 本方法においては, 線形方程式のある種の対称性 (Darboux 共変性) を用いて直接的な解の構成を考える. 結局, どちらの方法においても線形方程式

$$\psi_t = -ia\psi_{zz} + u(z, t)\psi_z,$$

を解くことに帰着するが (ここで $z = \xi$ (or η) である), 係数 $u(z, t)$ の意味に違いが生じる. 逆散乱法の場合, $u(z, t)$ は補助場 ϕ の ξ (or η) $\rightarrow -\infty$ での境界条件に対応する. 実際, §1 で述べた 3 つの局在解は補助場 ϕ の非自明な境界条件によって特徴づけられており, 非自明で異なった $u(z, t)$ をもつ線形方程式を各々解くことにより得られる. 一方, 本方法の場合, $u(z, t)$ は境界条件とは直接には結びつかず, むしろ解の background 状態に対応するものと思われる. 実際, $u(z, t) = 0$ とおいた線形方程式 (19) の指数関数解から上述の 3 つの局在解が得られ, それらは波数 $\Re(p)$, $\Re(q)$ によって特徴づけられていた. また同じ線形方程式の別の解から新しい局在解が得られた.

変換 (8) の第 1 式, 第 2 式は, (1+1) 次元の Heisenberg 強磁性体方程式の bilinear form を構成するために論文 [8] において初めて導入され, Ish-II 方程式の bilinear form を構成するために論文 [1] で適用されたものである. 本研究では変換 (8) を Ish-I 方程式への拡張として系統的に導いた.

[謝辞]

本研究を通じて貴重な御助言を頂いた名古屋大学理学部の野崎一洋教授に深く感謝いたします.

参考文献

- [1] Y. Ishimori: Prog. Theor. Phys. **72** (1984) 33.

- [2] B. G. Konopelchenko: *Solitons in Multidimensions* (World Scientific, 1993).
- [3] V. G. Dubrovsky and B. G. Konopelchenko: *Physica D* **55** (1992) 1.
- [4] V. B. Matveev and M. A. Salle: *Darboux Transformations and Solitons*: (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991).
- [5] K. Imai and K. Nozaki: *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** (1996) 53.
- [6] K. Imai and K. Nozaki: *Prog. Theor. Phys.* **96** (1996) 521.
- [7] J. J. C. Nimmo: *Inverse Problems* **8** (1992) 291.
- [8] R. Hirota: *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** (1982) 323.
- [9] K. Imai: *Prog. Theor. Phys.* **98** (1997) 1013. (to be published)