数理解析研究所講究録
1031巻 1998年 182-186

エントロピー解析における非線形解析的方法

新潟大学理学部数学科　明石重男

1　伝送容量問題に関するゲーム理論的取り扱い

『与えられた通信路が、単位時間あたりにどれだけ多くの入力分布に関する情報量を伝送することが可能か。』という問題は伝送容量問題とよばれ、情報理論もしくはエントロピー解析における重要な研究課題であった。しかし、一般に定常伝送容量を直接求める作業は困難であり、また任意の通信路に対して、正確な容量値を計算する一般性のある方法は存在しない。また我々が用いる通信路も唯一とは限らないため、通信路族に対する伝送容量を計算しなければならないことも多々ある。このような困難さが生ずる原因としては、まず第1に、『エントロピー関数が一般に線形条件を満たさないため、従来の線形解析的手法が適用しにくいこと』、第2に『通信路族が位相構造を持たず、アフィン変換に関して閉じているという意味での代数構造しか有していないため、エントロピー関数の連続性など位相解析的議論がしにくいこと』を掲げることができる。そこで、このような問題の対処方法として、『伝送容量に対する上界もしくは下界の評価を与えること』が重要となってくる。本稿では、min-max 定理を応用することにより、伝送容量評価問題に対するゲーム理論的解法を与えることを目的とする。

2　記号力学系の位相構造

$\mathcal{A}$ を l 個の記号の集合とし、その要素を $a_1,\ldots,a_l$ で表す。$\mathcal{A}^Z$ を $\mathcal{A}$ の要素からなる両側無限記号列の集合とし、その要素を $\prod x_k$ で表す。s 及び t を $s\leq t$ を満たす任意の整数としたとき、

$$[x_s{}^0,\ldots,x_t{}^0] = \{\prod x_k\in\mathcal{A}^Z;\, x_k = x_k{}^0, s\leq k\leq t\}$$

で定義される $\mathcal{A}$ の部分集合をメッセージと呼ぶ。$\mathcal{A}$ は離散位相を導入することによりコンパクト Hausdorff 空間となる。従って、Tychonoff 積位相を導入することにより $\mathcal{A}^Z$ をコンパクト Hausdorff 空間とすることができる。この位相を τ で表す。更に、$(\mathcal{A}^Z,\tau)$ 上で定義され $(\mathcal{A}^Z,\tau)$ に値をとる変換 T が、

$$T(\prod x_k) = \prod y_k, \quad x_{k+1} = y_k$$

で定義されるとき、この変換は推移変換と呼ばれる。以下、三つ組 $(\mathcal{A}^Z,\tau,T)$ を推移変換を伴う記号力学系と呼ぶ。

3　推移変換を伴う記号力学系上の不変確率測度族

$\mathcal{F}$ を前述の位相から定義される Borel σ-集合体として、可測空間 $(\mathcal{A}^Z,\mathcal{F})$ を構成する。更に、$\mathcal{P}(\mathcal{A}^Z)$ で $(\mathcal{A}^Z,\tau)$ 上の確率測度の集合を表す。$\mathcal{P}(\mathcal{A}^Z)$ が空集合でないことは Dirac 測度の存在より明らかである。ここで Riesz-Markov の定理を用いると、$\mathcal{P}(\mathcal{A}^Z)$ は $(\mathcal{A}^Z,\tau)$ 上の連続関数空間 $\mathcal{C}(\mathcal{A}^Z,\tau)$ 上の共役空間に埋め込み可能であり、この共役空間に導入される弱*位相によりコンパクトとなることが知られている。今、μ を $\mathcal{P}(\mathcal{A}^Z)$ の要素としたとき、

$$\mu(T^{-1}(F)) = \mu(F), \quad F\in\mathcal{F}$$

が成立するならば、μ を T に関して不変な確率測度と呼ぶ。$\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z)$ を T に関して不変な確率測度の全体としたとき、この集合が空集合でないことは、$\mu(\cdot)$ から $\mu(T^{-1}(\cdot))$ への対応がアフィン変換となること及び Kakutani-Markov の不動点定理を用いることにより示される。

4 記号力学系上の定常確率測度に対する Shannon エントロピー

n を任意の自然数としたとき、$\mathcal{M}_n$を時点 0 から時点 $n-1$ までのメッセージの集合、即ち、

$$\mathcal{M}_n = \{[x_0, \ldots, x_{n-1}];\ x_k \in \mathcal{A},\ 0 \le k \le n-1\}$$

と定める。今、$\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z)$ の要素 μ を任意に選んだとき、

$$S_\mu(\mathcal{M}_n) = -\sum \mu([x_0, \ldots, x_{n-1}]) log \mu([x_0, \ldots, x_{n-1}])$$

で定義される関数を、時点 0 から $n-1$ までのメッセージに関する μ の Shannon エントロピーと呼ぶ。但し、総和は全ての $\mathcal{M}_n$ の要素に渡って計算されるものとする。更に、上式を用いて、

$$S(\mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{S_\mu(\mathcal{M}_n)}{n}$$

として定義される関数 $S(\mu)$ を μ の単位時間当たりの Shannon エントロピーと呼ぶ。上式における極限値の存在は、任意の自然数 m 及び n に対して、次の不等式：

$$S_\mu(\mathcal{M}_{m+n}) \le S_\mu(\mathcal{M}_m) + S_\mu(\mathcal{M}_n)$$

が成立することより示される。このとき $S(\cdot)$ はアフィン性を有することが知られている。

5 定常確率測度族上のアフィン変換としての通信路

$\mathcal{A}^Z \times \mathcal{F}$ 上で定義され、閉区間 $[0,1]$ に値を取る関数 ν が、任意のメッセージ $\prod x_k$ に対して$\nu(\prod x_k, \cdot)$ が確率測度となること、及び任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $\nu(\cdot, F)$ が $(\mathcal{A}^Z, \mathcal{F})$ 上の可測関数となるとき、$(\mathcal{A}^Z, \mathcal{F})$ 上の通信路と呼ばれる。更に、通信路 ν が任意のメッセージ$\prod x_k$ 及び 任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して、

$$\nu(T(\prod x_k), TF) = \nu(\prod x_k, F)$$

を満たすとき、定常通信路と呼ばれる。通信路 ν を積分核として用いることにより、$(\mathcal{A}^Z, \mathcal{F})$ 上の確率測度の変換を構成することが可能となる。即ち、μ_{input} を $\mathcal{P}(\mathcal{A}^Z)$ の任意の要素とし、G を $\mathcal{F}$ の任意の要素としたとき、

$$\mu_{output}(G) = \int_{\mathcal{A}^Z} \nu(\prod x_k, G)\, d\mu_{input}(\prod x_k)$$

として定義される確率測度 μ_{output} を、入力確率測度 μ_{input} を通信路 ν により変換して得られる出力確率測度と呼ぶ。更に、

$$\mu_{joint}(F \times G) = \int_F \nu(\prod x_k, G)\, d\mu_{input}(\prod x_k)$$

として定義される確率測度 μ_{joint} を、入力確率測度 μ_{input} と通信路 ν とから構成される同時確率測度と呼ぶ。 今ここで、μ_{input} 及び ν がそれぞれ不変確率測度及び定常通信路である場合、出力確率測度及び同時確率測度も不変となることが示されるため、単位時間当たりの Shannon エントロピーを計算することが可能となる。そこで、

$$I(\mu_{input}; \nu) = S(\mu_{input}) + S(\mu_{output}) - S(\mu_{joint})$$

として定義される関数を不変入力確率測度 μ_{input} を定常通信路 ν を用いて伝送した場合の伝送速度もしくは単位時間当たりの相互エントロピーと呼ぶ。伝送速度もアフィン性を有することが知られている。即ち、α_1 及び α_2 を $\alpha_1+\alpha_2=1$ を満たす非負実数としたとき、

$$I(\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2;\nu) = \alpha_1 I(\mu_1;\nu)+\alpha_2 I(\mu_2;\nu),$$

$$I(\mu;\alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2) = \alpha_1 I(\mu;\nu_1)+\alpha_2 I(\mu;\nu_2),$$

が、任意の定常確率測度 μ,μ_1,μ_2 及び任意の定常通信路 ν,ν_1,ν_2 に対して成立する。

6 定常通信路の伝送速度容量

$\mathcal{A}^Z$ 上の定常通信路 ν が長さ m の有限記憶を持つとは、任意の$\prod x_k,\prod y_k\in\mathcal{A}^Z$ 及び任意のメッセージ $[z_i,\ldots,z_j]$ を選んだとき、$i-m\leq k\leq j$ に対して、$x_k=y_k$ が成り立つならば、

$$\nu(\prod x_k,[z_i,\ldots,z_j]) = \nu(\prod y_k,[z_i,\ldots,z_j])$$

が成り立つ場合を言う。更にこの定常通信路が m-歩従属であるとは、$q\leq r\leq s\leq t$ を満たす整数に対して、$s-r>m$ ならば

$$\nu(\prod x_k,[y_q,\ldots,y_r]\cap[y_s,\ldots,y_t]) = \nu(\prod x_k,[y_q,\ldots,y_r])\nu(\prod x_k,[y_s,\ldots,y_t])$$

が成り立つ場合を言う。更に、

$$C_T(\nu) = sup\{I(\mu;\nu);\ \mu\in\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z)\}$$

で定義される量を ν の定常伝送容量という。また、$\mathcal{N}$ を定常通信路の集合としたとき、

$$A_T(\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z),\mathcal{N}) = sup\left\{inf\{I(\mu;\nu);\mu\in\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z)\};\ \nu\in\mathcal{N}\right\}$$

$$B_T(\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z),\mathcal{N}) = inf\left\{sup\{I(\mu;\nu);\nu\in\mathcal{N}\};\ \mu\in\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z)\right\}$$

$$C_T(\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z),\mathcal{N}) = sup\left\{inf\{I(\mu;\nu);\nu\in\mathcal{N}\};\ \mu\in\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z)\right\}$$

$$D_T(\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z),\mathcal{N}) = inf\left\{sup\{I(\mu;\nu);\nu\in\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z)\};\ \mu\in\mathcal{N}\right\}$$

で定義される 4 つの量を考えることができる。このうち、特に通信理論において研究対象となっているのは、$C_T(\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z),\mathcal{N})$ であり、一般には、この量を定常通信路族 $\mathcal{N}$ の定常伝送容量と呼ぶ。

7 定常通信路族の伝送容量に対する min-max 定理に基づく評価

伝送速度は不変確率測度と定常通信路族の直積集合上で定義された非負実数に値をとる関数であるが、通信路 ν を固定したとき、$\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z)$ を定義域とする関数とみなすことができる。このとき Breiman より、定常通信路 ν が有限記憶を持ち、有限歩従属であれば、$I(\cdot;\nu)$ は $\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z)$ 上の上半連続関数となることが知られている。この Breimann の定理に min-max 定理を適用することにより、上からもしくは下からの伝送容量評価法を得ることができる：

命題 (伝送容量に対する下界及び上界の min-max 定理に基づく評価法)

$\mathcal{N}$ を有限記憶を持つ有限歩従属な通信路の族とする。今、ある正数 c が存在して、任意の $\mathcal{N}$ の要素 ν に対して、ある適当な $\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z)$ の要素 μ を選んで、

$$I(\mu,\nu)\geq c$$

を成立させることが可能ならば、

$$C_T(\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z),\mathcal{N}) \geq c$$

が成立する。また、ある正数 d が存在して、任意の $\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z)$ の要素 μ に対して、ある適当な $\mathcal{N}$ の要素 ν を選んで、

$$I(\mu,\nu) \leq d$$

を成立させることが可能ならば、

$$D_T(\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z),\mathcal{N}) \leq d$$

が成立する。

証明. Breiman の定理により、任意の定常通信路 ν に対して、 $I(\cdot,\nu)$ は上半連続関数となる。更に、確率測度及び通信路の双方に対して、アフィン性が成立していることから、min-max 定理を用いることにより、

$$C_T(\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z),\mathcal{N}) = D_T(\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z),\mathcal{N})$$

の成立が示せる。また、仮定により、

$$c \leq D_T(\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z),\mathcal{N})$$

$$d \geq C_T(\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z),\mathcal{N})$$

が成り立つことより証明終了。

註 1. 不変確率測度族のコンパクト性及び、定常伝送容量 C_T 及び D_T の確率測度項に関する上半連続性より、上記評価法を述べるに際して用いられている sup は max に置き換えることが可能である。

註 2. $C_T(\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z),\mathcal{N})$ 及び $D_T(\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z),\mathcal{N})$ についての簡単な評価法は、前述の通りであるが、$A_T(\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z),\mathcal{N})$ 及び $B_T(\mathcal{P}_T(\mathcal{A}^Z),\mathcal{N})$ についての上からもしくは下からの評価は簡単には与えられていない。これは、定常通信路族が、代数構造のみを有して、位相構造を有さないことに依存する。従って、考察対象である通信路族に何らかの位相を与えることによって、コンパクト凸集合とすることが可能であるならば、更に、この位相に関して、定常伝送容量を与える関数の通信路項に関する上半もしくは下半連続性を成立させることが可能となるならば、先程と同様の評価法を与えることが可能となると思われる。

参考文献

[1] P. Billingsley,
Ergodic theory and information, John Wiley and Sons Inc., New York, 1960.

[2] D. Blackwell, L. Breiman and A. J. Thomasian,
The capacity of a class of channels, Ann. Math. Statist., 30(1959), 1229-1241.

[3] D. Blackwell, L. Breiman and A. J. Thomasian,
The capacities of certain channel classes under random coding, Ann. Math. Statist., 31(1960), 558-567.

[4] L. Breiman,
On achieving channel capacity in finite-memory channels, Ill. J. Math., 4(1960), 246-252.

[5] S. Kullback,
Information theory and statistics, John Wiley and Sons Inc., New York, 1959.

[6] D. H. Kelly,
Informathion capacity of a single retinal channel, IRE. Trans. Inform. Theory, IT-8(1962), no.3, 221-226.

[7] C. E. Shannon,
The zero error capacity of a noisy channel, IRE. Trans. Inform. Theory, IT-2(1956), no.3, 8-16.

[8] S. Muroga,
On the capacity of a discrete channel II, J. Phys. Soc. Japan, 11(1956), 1109-1120.

[9] 高橋 渉,
非線形関数解析学ー不動点定理とその周辺ー, 近代科学社, 1988.

[10] 田中 謙輔,
凸解析と最適化理論, 牧野書店, 1994.