数理解析研究所講究録
1032巻 1998年 62-73

確率分布のモードの推定と検定.

琉球大理学部　山里　眞 (Makoto Yamazato)

1．序．本報告の目的は確率分布が単峰かそうでないかの検定の仕方と単峰な場合のモードの位置の推定の方法についてこれまで知られている方法のいくつかを紹介することと，それらの比較検討をすることである．

分布が密度関数を持ち，それに単一の最大点がある場合，その最大点はモードといわれる．密度関数の極大点がいくつかある場合にもそれらはすべてモードと呼ばれる．

モードの推定の基本的なアイデアには大まかに分類すると2つある．1つは標本数に応じて適当な階級幅を設定してヒストグラムを作り，1番高い階級でモードを推定するものである．これによると密度関数の推定と同時にモードの位置の推定がなされる．Parzen [1] は密度関数の Kernel estimate を利用してモードの位置を推定した．その後いくつか Parzen の結果を改良した論文が現れた．これらの密度関数の推定を経由するモードの推定法は indirect estimate と呼ばれている．もう一つの方法は各標本間の間隔が最も狭い場所でモードの位置を推定するものである．このような推定方法は密度関数の推定を直接的には伴わないので direct estimate と呼ばれている．Venter [6] はこのような推定法を確立した． Grenander [5] は密度関数の推定を経由しない，別の推定法を提唱した．これには Hall [7] によって厳密な証明が与えられた．

Direct estimate では共通して次節で述べる命題2．1の事実を用い，指数分布にしたがう独立な確率変数の計算に持ち込む．一方，indirect estimate では命題2．2の事実を用いるものもある．特に後で説明する，Mammen-Marron-Fisher [14]では標本モードの個数の期待値を Brownian bridge による確率積分の zero crossing number の期待値の表現式で近似している．この期待値の表現式は K. Ito による定常過程の zero crossing number の期待値の表現式を微分可能ガウス過程へ拡張したもので，Cramer-Leadbetter の公式と呼ばれている([14])．

モードの推定に対して与えられた分布が単峰かそうでないかを検定する方法は比較的最近考察が始められた．Hartigan-Hartigan [13] にその歴史が述べられている．ここでは上記の Mammen-Marron-Fisher による結果を紹介する．

2．**順序統計量**．$X_1, \cdots, X_n$ を i.i.d. r.v.，それらの共通の分布関数を $F(x)$ とする． $F(x)$ は連続としよう．このとき $Y_1 = F(X_1), \cdots, Y_n = F(X_n)$ は区間 $[0,1]$ 上の一様分布にしたがう．これらを大きさの順に並べたものを

$Y_1^* \leqq Y_2^* \leqq \cdots \leqq Y_n^*$ とする．これらは順序統計量と呼ばれる．これらの結合分布は

$$f^*(y_1,\cdots,y_n) = n! \quad \text{for} \quad 0 \leqq y_1 \leqq \cdots \leqq y_n \leqq 1,$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}$$

である．

$U_1 = Y_1^*,\ U_2 = Y_2^* - Y_1^*,\ \cdots,\ U_n = Y_n^* - Y_{n-1}^*,\ U_{n+1} = 1 - Y_n^*$

とおくと $(U_1,\cdots,U_n)$ の密度関数は

$$g(u_1,\cdots,u_n) = n! \quad \text{for } u_i \geqq 0,\ \textstyle\sum_{i=1}^n u_i \leqq 1,$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere.}$$

命題2．1． $Z_1,\cdots,Z_{n+1}$ をパラメータ $\lambda > 0$ の指数分布（i.e.密度関数が $\lambda e^{-\lambda x},\ x \geqq 0$）にしたがう i.i.d.r.v. とすると

$$(U_1,\cdots,U_{n+1}) \text{ の分布} = (Z_1,\cdots,Z_{n+1})/S \text{ の分布.}$$

ただし $S = \sum_{j=1}^{n+1} Z_j$ ．

確率変数 $v_n(x),\ 0 < x \leqq 1$ を $Y_j \leqq x$ となる j の個数で定義する．$v_n(x)$ はパラメータ (n,x) の二項分布にしたがう．i.e.

$$P(v_n(x) = k) = {}_nC_k x^k(1-x)^{n-k},\ k = 0,\cdots,n.$$

$x \leqq y$ とする．

$$P(v_n(x) = k,\ v_n(y) = l) = \frac{n!}{k!(l-k)!(n-l)!}x^k(y-x)^{l-k}(1-y)^{n-l}$$

だから

$$\mathrm{Cov}(v_n(x)v_n(y)) = nx(1-y).$$

命題2．2． $V_n(t) = n^{1/2}(\frac{v_n(t)}{n} - t),\ 0 < t \leqq 1,\ V_n(0) = 0$ とし，$\{V(t)\}$ を $EV(t) = 0,\ EV(s)V(t) = \min(s,t) - st$ なる正規過程(Brownian bridge) とすると

$$P_{V_n} \to P_V \quad \text{in } D \quad \text{as } n \to \infty.$$

$X_j \leqq x$ となる j の個数を $w_n(x)$ とおくと一般には $v_n(x) \geqq w_n(x)$．

$$F_n(x) = n^{-1}w_n(x)$$

を経験分布関数という．

3．モードの indirect estimate． Eddy [4] による 密度関数の

kernel estimate を用いたモードの推定法について紹介する.

第2節と同じく $X_1, \cdots, X_n$ を i.i.d. r.v., それらの共通の分布関数を $F(x)$ とする. $F(x)$ は連続な密度関数 $f(x)$ を持つとする. $f(x)$ とそのモードを推定したい. 簡単のためしばらく $-\infty < a < b < \infty$ に対し $F(a-) = 0$, $F(b) = 1$ を仮定しよう. $F_n(x)$ を経験分布関数とする. k を $0 < k < n$ なる整数,

$$h = (b-a)/k, \quad A_{n,\ell} = (a+(\ell-1)h, a+\ell h],$$

とし,

$$g_{n,h}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{j=1}^{n} 1_{A_{n,\ell}}(X_j) \quad \text{for } x \in A_{n,\ell},\ \ell = 0, \cdots, k$$

とおくこれは階級幅 h のヒストグラムの高さである. これを少し変形して

$$f_{n,h}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{j=1}^{n} 1_{B_{x,h}}(X_j) \quad \text{for } x \in B_{x,h}$$

とする. ただし, $B_{x,h} = [x - h/2, x + h/2]$. これは

$$f_{n,h}(x) = \frac{1}{h}\{F_n(x+\frac{h}{2})-F_n((x-\frac{h}{2})-)\}$$

とも書けるから,

$$(3.1) \qquad K(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } |x| \leqq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

により

$$f_{n,h}(x) = \frac{1}{h}\int K(\frac{x-y}{h})dF_n(y) = \frac{1}{nh}\sum_{j=1}^{n} K((x-X_j)/h)$$

と書ける. こう表せば $F(a-) = 0$, $F(b) = 1$ を仮定する必要はなくなる.
$K(x)$ をもっと一般に

(K1) $\sup_{-\infty<y<\infty} |K(y)| < \infty$,

(K2) $\int |K(y)|dy < \infty$,

(K3) $\int K(y)dy = 1$,

(K4) $\lim_{y\to\infty} |yK(y)| = 1$

を満たす関数とする.

$$Ef_{n,h}(x) = \frac{1}{h}E(K(\frac{x-X}{h})dF_n(y) = \frac{1}{h}\int K(\frac{x-y}{h})f(y)dy$$

$h = h_n \to 0$ as $n \to \infty$ とすると $Ef_{n,h}(x) \to f(x)$ だから推定量 $f_{n,h}(x)$ は漸近不偏推定量 ([1]). さらに

$$\lim_{n\to\infty} nh\cdot \mathrm{Var}[f_{n,h}(x)] = f(x)\int K^2(y)dy$$

がわかるから $nh \to \infty$ なら $f_{n,h}(x)$ は一致推定量になる([1]). h は bandwidth または window width とよばれる. このような密度関数の推定法を kernel estimate という. Kernel の例としては (3.1) のほかに

$$(3.2)\quad K(y) = \begin{cases} 1 - |y|, & |y| \leqq 1, \\ 0, & |y| > 1, \end{cases}$$

$$(3.3)\quad K(y) = \begin{cases} \frac{4}{3} - 8y^2 + 8|y|^3, & |y| < \frac{1}{2} \\ \frac{8}{3}(1-|y|)^3, & \frac{1}{2} \leqq |y| \leqq 1, \\ 0 & |y| > 1, \end{cases}$$

$$(3.4)\quad K(y) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-y^2/2),$$

$$(3.5)\quad K(y) = \{\pi(1+y^2)\}^{-1}$$

$$(3.6)\quad K(y) = \{(\sin y)/y\}^2/2\pi$$

$$(3.7)\quad e^{-|y|}/2$$

などがある. (3.4) ((3.5)) の関数を kernel とする $f_{n,h}(x)$ は h を時間パラメータと見ると, 密度関数 $f(x)$ からの経験分布 $\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_i}(dy)$ を初期分布とするブラウン運動（コーシー過程）の推移確率密度になっている. また, (3.4) や (3.7) のkernel は totally positive であるという性質を持つ ([15]). Silverman [12] はこの性質をモードの検定に利用した.

$$M(f) = \inf\{x: f(x) = \sup f(y)\}$$

とおく. $\theta = M(f)$ をモードといい, $\theta_n = M(f_{n,h})$ を標本モードとよぶ. $b_n = (nh^3)^{-1/2}$ とし, $f_n(x) = f_{n,h}(x)$ とおく.

$$Z_n(t) = b_n^{-2}(f_n(\theta+b_nt) - f_n(\theta)),\quad t \in [-T,T]$$

で確率過程 $\{Z_n(t)\}$ を定義する.

定理3. 1. p を $p \geqq 2$ なる整数とする. K を有界, 絶対連続な関数とし, そのラドン－ニコディム導関数 $K'(x)$ も有界だとする. $B_k = \int x^kK(x)dx$, $k = 0,1,\cdots,p+1$ とおいたとき, $B_0 = 1$, $B_1 = \cdots = B_{p-1} = 0$, B_p, $B_{p+1} < \infty$ をみたすとする. $\int\{K'(x)\}^2dx = V < \infty$, $\int x\{K'(x)\}^2dx < \infty$ も仮定する. f は有界かつ絶対連続な $(p+1)$ 階導関数を持ち,

$$\sup |f^{(k)}(t)| < \infty,\ k = 1,\cdots,p+1$$

を満たすとする.

$$\lim_{n\to\infty} nh_n^{5} = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}(nh_n^{3+2p})^{1/2} = D < \infty$$

なら $\{Z_n(t)\}$ は

$$Z(t) = f''(\theta)t^2/2 + \{(-1)^{p+1}f^{(p+1)}(\theta)B_pD/p! + Y\}t$$

に $C([-T,T])$ で弱収束する．ここで $Y \sim N(0,f(\theta)V)$.

証明の大筋は次の通り．

$$EZ_n(t) = h^{-1}b_n^{-2}\int[f(\theta+hx+b_nt) - f(\theta+hx)]K(-x)dx$$

と書ける． [ ] の中味をテーラー展開し，$K(x)$ に関する条件を使うと

$$EZ_n(t) \to f''(\theta)t^2/2 + t(-1)^{p+1}f^{(p+1)}(\theta)B_pD/p! \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

となる．$Z_n(t) - tZ_n(1)$ は n 個の i.i.d.r.v. の和であることを用いると

$$\mathrm{Var}(Z_n(t) - tZ_n(1)) \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

がわかる．また，中心極限定理より

$$Z_n(1) - EZ_n(1) \text{ の分布} \to N(0,f(\theta)V) \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

以上より $\{Z_n(t)\}$ が $\{Z(t)\}$ に有限次元分布の収束の意味で収束する．

$$E((Z_n(s)-Z_n(t))/(s-t))^2 \le A = \text{const.}$$

が言えるので $\{Z_n(t)\}$ の tightness もわかり $Z_n(t) \to Z(t)$ in C が示せた．

系．定理の条件と $f''(\theta) \neq 0$ のもとで $(nh_n^{3})^{1/2}(\theta_n-\theta)$ の分布が $n \to \infty$ のとき

$$N((-1)^pf^{(p+1)}(\theta)DB_p/p!f''(\theta), f(\theta)V/f''(\theta)^2)$$

に近づく．

証明． C 上の収束が示されたことにより invariance principle が使える．

4．モードの direct estimate． 推定すべき分布の密度関数 f に対し次を仮定する．$-\infty < a < b < \infty$ とし，

(F1) $f(x) > 0$ on (a,b),

$f(x) = 0$ on $(a,b)^c$,

(F2) $f \in C(a,b)$,

(F3) $a < {}^{\exists}\theta < b,\ f(\theta) > f(x)$ for ${}^{\forall}x \in (a,\theta)\cup(\theta,b)$.

$X_1^*, \cdots, X_n^*$ を f からの順序統計量とする. $\{r_n\}$ を整数列とする.

$$V_j = X^*_{j+r_n} - X^*_{j-r_n}, \quad j = r_n+1, r_n+2, \cdots, n-r_n$$

K_n を

$$V_{K_n} = \min\{V_j : r_n+1 \leq j \leq n-r_n\}$$

となるようにとる. $\theta_n = X^*_{K_n}$ とおく. $\delta > 0$ とし,

$$\alpha_1(\delta) = \min\{f(x) : \theta - \delta \leq x \leq \theta + \delta\},$$

$$\alpha_2(\delta) = \max\{f(x) : a < x < \theta - 2\delta,\ \theta + 2\delta \leq x < b\},$$

$$\alpha(\delta) = \alpha_1(\delta)/\alpha_2(\delta)$$

とおく.

定理4. 1. (1) $^\exists\varepsilon > 0,\ 0 < {}^\forall\delta < \varepsilon,\ \alpha(\delta) > 1,$
(2) $r_n/n \to 0$ as $n \to \infty$,

(3) $0 < {}^\forall\lambda < 1,\ \sum n\lambda^{r_n} < \infty$
ならば確率 1 で $\theta_n \to \theta$.

証明. Z_j, $j = 1, \cdots, n+1$ を命題2. 1に現れた確率変数列とする. $S_k = \sum_{j=1}^k Z_j$ とおく. $F(x)$ の逆関数を $G(x)$ とおく. p を $(r_n+1)/n \leq p \leq 1-r_n/n$ ととる. 平均値の定理より

$$S_{[np]-r_n}/S_{n+1} \leq \phi_n(p) \leq S_{[np]+r_n}/S_{n+1}$$

を満たす $\phi_n(p)$ で

$$V_{[np]} = S(p)(S_{n+1})^{-1}G'(\phi_n(p))$$

と表せる. ただし $S(p) = S_{[np]+r_n} - S_{[np]-r_n}$. 大数の強法則と Borel-Cantelli lemma を用いて

$$S_{[np]-r_n}/S_{n+1},\ S_{[np]+r_n}/S_{n+1} \to p \quad \text{unif. in } p \text{ with prob. } 1$$

が示せるので

$$\phi_n(p) \to p \quad \text{unif. in } p \text{ with prob. } 1.$$

$q = F(\theta)$ とし, p を

$$(r_n+1)/n \leq p \leq F(\theta-3\delta) \text{ または } F(\theta-3\delta) \leq p \leq 1-r_n/n$$

ととる. p の取り方から

$$G'(\phi_n(p))/G'(\phi_n(q)) \geq \alpha(\delta)$$

である. 条件 (3) と Borel-Cantelli lemma より

$$S(p)/2r_n \to 1 \text{ unif. in } p \text{ with prob.1}$$

が示せるので十分大きなすべての n について

$$S(p)/S(q) > \alpha(\delta)^{-1/2}.$$

したがって十分大きなすべての n について

$$V_{[np]}/V_{[nq]} = S(p)G'(\phi_n(p))/S(q)G'(\phi_n(q)) > \alpha(\delta)^{1/2} > 1.$$

このことから

$$K_n/n \to q \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

がわかり, $\theta_n \to \theta$ as $n \to \infty$ が導かれる.

定理4．2． ρ, k, A > 0 を定数とする. ある $\varepsilon > 0$ があって, $0 < \delta < \varepsilon$ を満たす任意の δ に対して

$$\alpha(\delta) \geq 1 + \rho\delta^k,$$

$$r_n = \begin{cases} An^{2k/(1+2k)}, & \text{if } k \geq \frac{1}{2}, \\ An^k, & \text{if } k < \frac{1}{2} \end{cases}$$

ならば確率 1 で

$$\theta_n = \theta + o(\delta_n).$$

ただし

$$\delta_n = \begin{cases} n^{-1/(1+2k)}(\log n)^{1/k}, & \text{if } k \geq \frac{1}{2}, \\ n^{-1/2}(\log n)^{1/k}, & \text{if } k < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

この定理の証明には前定理の証明に用いた評価を少し詳しくすればよい.

注意. この推定法では bandwidth という概念がないが, r_n がそれに相当するとみることが出来る.

5．**単峰性の検定.** 単峰性あるいはもっと一般に多峰性の検定法はいくつか提案されているがいずれも満足いくものとは思われない. ここでは理論的におもしろいという理由で Mammen-Marron-Fisherの結果を紹介する. これは Silverman [12] のアイデアをより深く掘り下げ, 厳密にしたものであり, 密度関数の kernel estimate を経由する検定法である.

f を密度関数とし, $X_1, \cdots, X_n$ を f を密度関数として持つ分布からの大きさ n の標本とする. K(x) を total positivity を持つ確率密度関数とする (K(x) を convolution kernel として積分変換すると変換された関数の零点の

数はもとの関数の零点の数以下になるという性質）．そのような $K(x)$ の例としては（3.4）の正規密度，（3.7）の両側指数密度などがある．ここでは $K(x)$ として正規密度を用いる．

$$f_{n,h}(t) = (nh)^{-1}\sum_{i=1}^{n} K((t-X_i)/h)$$

とおく．$K(x)$ が total positivity を持つことから次が示せる．

定理5．1． $m \geq 0$ とする．$\frac{\partial^m}{\partial t^m} f_{n,h}$ の t に関する極大値の数は右連続で，h に関し非増加．

このことから $h_{c,k} = \inf\{h\colon f_{n,h}(t)$ は高々 k 個のモードを持つ$\}$ は定義可能で $f_{n,h}(t)$ が k より多くのモードを持つことと $h < h_{c,k}$ が同値．

$\mathcal{F}$ を以下の５つの性質を持つ確率密度関数のクラスとする．

(f1) 有界，$\mathrm{supp}\, f = [a,b] \subset \mathbf{R}$，

(f2) $f \in C^2(a,b)$，

(f3) $f'(a+) > 0$, $f'(b+) < 0$,

(f4) $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_{2j-1} < z_{2j} = b$ があって

$$f'(x) > 0 \text{ on } (z_{2k}, z_{2k+1}),\ \text{for } k = 0,\cdots,j-1$$

$$f'(x) < 0 \text{ on } (z_{2k-1}, z_{2k}),\ \text{for } k = 1,\cdots,j.$$

(f5) $f''(x) \neq 0$, $f(x) > 0$ for all x with $f'(x) = 0$.

以下 $f \in \mathcal{F}$ を仮定．

$N(h)$ を $f_{n,h}(t)$ のモードの個数とする．$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} K(x)dx$, $H(x) = K(x)/x + \Phi(x) - 1$ とおく．

定理5．2． $h = h_n$ ，$0 < \liminf_{n\to\infty} n^{1/5}h < \limsup_{n\to\infty} n^{1/5}h < \infty$ ならば

$$EN(h) = j + \sum_{p=1}^{2j-1} H\left(\frac{(nh^5)^{1/2}|f''(z_p)|}{\|K''\| f(z_p)^{1/2}}\right) + o(1)$$

ここで $\|K''(x)\| = (\int (K'')^2)^{1/2}$.

系． $n^{1/5}h \to \infty$ ならば $EN(h) \leq j + o(1)$.

証明． $nh^5 = c$ の場合を考えると，

$$EN(h) = j + u(c) + o(1),$$

ここで，$u(c)$ は減少，$\lim_{x\to 0} u(x) = \infty$，$\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$．仮定より任意の $c > 0$ に対して $nh^5 > c$ だから

$$EN(h) = j + o(1).$$

定理５．３． $h = h_n = o(n^{-1/5})$ ならば $N(h) \to \infty$ in probability.

系． $k \geq j$ ならば $\rho_n \to 0$，$\tau_n \to \infty$ に対し，

$$P(\rho_n n^{-1/5} \leq h_{c,k} \leq \tau_n n^{-1/5}) \to 1 \quad \text{as } n \to \infty.$$

証明． $N(h_{c,k}) = k$ に注意．$h_n < h_{c,k}$ ならば $N(h_n) > N(h_{c,k}) = k$．よって

$$E(N(h_n)) = E(N(h_n);h_n<h_{c,k}) + E(N(h_n);h_n\geq h_{c,k})$$
$$> kP(h_n < h_{c,k}).$$

ここで $n^{1/5}h_n \to \infty$ とすると定理５．２．系より $EN(h_n) = j + o(1)$ であるから，ある $\varepsilon > 0$ があって $n \to \infty$ のとき

$$P(h_n < h_{c,k}) < 1-\varepsilon.$$

$n^{1/5}h_n \to 0$ とする．

$$P(N(h_n) > M)$$
$$= P(N(h_n) > M,\ h_n \geq h_{c,k}) + P(N(h_n) > M,\ h_n < h_{c,k})$$

$h_n \geq h_{c,k}$ ならば $k = N(h_{c,k}) \geq N(h_n)$ だから M を $M > k$ ととると

$$P(N(h_n) > M,\ h_n \geq h_{c,k}) = 0$$

だから定理５．３より

$$P(h_n<h_{c,k}) \geq P(N(h_n)>M,\ h_n<h_{c,k}) = P(N(h_n)>M) \to 1$$

定理５．４． $k < j$ ならばある定数 $h_0(f,k)$ があって

$$P(h_{c,k} > h_0(f,k)) \to 1.$$

定理５．５． $0 < \liminf_{n\to\infty} n^{1/5}h < \limsup_{n\to\infty} n^{1/5}h < \infty$ ならば標本モード u_p，$p = 1,2,\cdots$ に対し次が成立．

$$\max_p \min_i |u_p-z_i| = O_P(n^{-1/5}).$$

定理５．６． 任意の $c > 0$ と $p = 1,\cdots,2j-1$ に対し，

$$(\log n)^{3/2} \sup\{|f''(t)-f''(z_p)| : |t-z_p| \le c(\log n)^{1/2} n^{-1/5}\} \to 0$$

が成り立つならば，

$$n^{1/5} h_{c,j} \to \sup f(z_p)^{1/5} |f''(z_p)|^{-2/5} V_p, \text{ weakly.}$$

ただし，$V_1, \cdots, V_{2j-1}$: i.i.d.

定理５．２の証明のアイデア． $X_n(t) = f_{n,h}(t) - Ef_{n,h}(t)$ とおく．これが

$$Y_n(t) = n^{-1/2} \int h^{-1} K((x-t)/h) dV(F(x))$$

（$V(x)$ は Brownian bridge）で近似できることより $Y_n(t)$ の導関数を適当な区間で考えたものにつぎの命題を適用し，定理５．２を得る．

命題（Cramer-Leadbetter）微分可能ガウス過程 $Z(t)$ の区間 $[u,v]$ における zero crossing の数を N とすると次が成立．

$$E(N) = \int_u^v \gamma(t)\sigma^{-1}(t)\rho(t)K\left(\frac{m(t)}{\sigma(t)}\right)G(\eta(t)dt.$$

ただし，

$G(x) = 2K(x) + x(2\Phi(x) - 1)$,

$m(t) = EZ(t)$, $\gamma^2(t) = \mathrm{Var}(Z'(t))$, $\sigma^2(t) = \mathrm{Var}(Z(t))$,

$\mu(t) = \mathrm{Cov}(Z(t)/\sigma(t), Z'(t)/\gamma(t))$, $\rho(t) = (1-\mu^2(t))^{1/2}$,

$\eta(t) = m'(t)/\gamma(t)\rho(t) - \mu(t)m(t)/\sigma(t)\rho(t)$.

他の定理も同じような考え方で得られる．

定理５．２を用いた検定法． 十分小なる α に対し

$$\alpha = P(h_{c,j} > c_\alpha) = P(N(c_\alpha) > j)$$

となる c_α を見つける．それより $h_{c,j}$ が大きくなることは帰無仮説「モードの個数は j」のもとでは起こりにくい．

$$E(N(c_\alpha)-j) = T_1 + T_2,$$

$$T_1 = E(N(c_\alpha)-j)I(N(c_\alpha)<j),$$

$$T_2 = E(N(c_\alpha)-j)I(N(c_\alpha)>j),$$

である．ところで

$$T_2 = P(N(c_\alpha) > j) + T_3,$$

$$T_3 = \sum_{m=1}^{\infty} P(N(c_\alpha)-j>m)$$

である．$\alpha \to 0$ とすると定理５．２．系より $n^{1/5}c_\alpha \to \infty$ となるだろう．また，

$$T_3 = O(P(N(c_\alpha) > j)^2) = O(\alpha^2),$$

$$|T_1| \leq jP(N(c_\alpha)<j) = o(\alpha)$$

が成り立つと予想されるから,

$$E(N(c_\alpha)-j) = o(\alpha) + O(\alpha^2) + P(N(c_\alpha)>j)$$

より $\alpha \sim E(N(c_\alpha)-j)$. だから

$$\alpha = \sum H\left(\frac{(n(c_\alpha)^5)^{1/2}|f''(z_p)|}{\|\varphi''\| f(z_p)^{1/2}}\right)$$

の解を c_α とすれば良いが, それには $\{z_p\}$ と $\{f(z_p)\}$, $\{f''(z_p)\}$ を推定する必要がある.

[14] では bootstrap method を用いた検定法も論じられているがここでは省略する.

6. 多変量分布のモード. 多変量の分布のモードの推定と検定については紹介しなかったが, 文献表にいくつかの文献名を載せておいた.

References

Indirect estimates

[1] Parzen, E (1962). On estimation of a probability density function and mode. Ann. Math. Statist. 33, 1065-1076.

[2] Chernoff, H. (1964). Estimation of the mode. Ann. Inst. Statist. Math. 16, 31-41.

[3] Sager, T.W. (1975). Consistency in nonparametric estimation of the mode. Ann. Statist. 3, 698-706.

[4]] Eddy, W.F. (1980). Optimum kernel estimators of the mode.
Ann. Statist. 8, 870-882.

Direct estimates

[5] Grenander, U. (1965). Some direct estimates of the mode. Ann. Math. Statist. 36, 131-138.

[6] Venter, J. H. (1967). On estimation of the mode. Ann. Math. Statist. 38, 1446-1455.

[7] Hall, P. (1982). Asymptotic theory of Grenander's mode estimator. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. 60, 315-334.

Multivariate densities

[8] Samanta, M. (1973). Nonparametric estimation of the

mode of a multivariate density. South African Statist. J. 7, 109-117.

[9] Konakov, V.D. (1973). On asymptotic normality of the sample mode of multivariate distributions. Theory Probab. Appl. 18, 836-842.

[10] Ruschendorff, L. (1977). Consistency of estimators for multivariate density functions and for the mode. Sankhya Ser. A 286A, 941-944.

[11] Sager, T.W. (1978). Estimation of a multivariate mode. Ann. Statist. 6, 802-812

Modality test

[12] Silverman, B.W. (1981). Using kernel density estimates to investigate multimodality. J. R. Statist. B 43, 97-99.

[13] Hartigan, J.A., Hartigan, P.M. (1985). The dip test of unimodality. Ann. Statist. 13, 70-84.

[14] Mammen, E., Marron, J.S., Fisher, N.I. (1992). Some asymptotics for multimodality tests based on kernel density estimates. Probab. Theory Relat. Fields 91, 115-132.

Total positivity

[15] Karlin, S. (1968). Total Positivity. Stanford, Stanford University Press.