

Hopf bifurcation for delayed equation of Lienard type

徳島大学 総合科 村上 公一 (Kouichi Murakami)

1 はじめに

時間遅れがある Lienard 型方程式

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = y(t - \tau) - F(x(t - \tau)) \\ \dot{y}(t) = -x(t - \tau) \end{cases}$$

について考える。ただし、 $\tau > 0$ 、 $F(0) = 0$ とする。

時間遅れが無い場合、すなわち $\tau = 0$ では、周期解の存在に関して多くの結果が知られている。しかし、(1) のように時間遅れがある場合は、分かっていないことが多い。

昨年度の短期共同研究では、 $F(x) = ax + cx^3$ と仮定して周期解の存在について調べた。この場合、 $\tau = 0$ では (1) は有名な van der Pol 方程式となり、 $a < 0$ と $c > 0$ で周期解が唯一つ存在することが良く知られている。時間遅れがある場合でも、一意性は言えないが、 a と c が適当な条件を満たせば、Hopf 分岐による周期解が存在することが分かった。

今回は、 $F(x)$ に 2 次の非線形性がある場合、例えば $F(x) = ax + bx^2$ を考える。 $\tau = 0$ のときは、一般に周期解は存在しない。ところが、 $\tau > 0$ のときは、数値計算によると周期解が存在することが確認された。図 1 に解の軌道の例を示す。図中の破線は $F(x)$ のグラフを表す。そこで、これについて Hopf 分岐による周期解を調べてみた。ここでは、その結果を報告する。尚、 $F(x)$ が多項式の場合だけでなく、もう少し適用範囲を広げられるように、以下では原点を含むある開集合で $F(x) \in C^p$ ($p > 3$) と仮定し、

$$F(x) = ax + bx^2 + cx^3 + O(x^4)$$

とする。これにより、原点近傍であれば、有理関数や超越関数なども扱うことができる。

2 Hopf 分岐について

ここでは、Hopf 分岐について、簡単な説明を行う。

2.1 Hopf 分岐の基本原則

パラメタを含む非線形微分方程式を考える。いま、方程式が次のような状況にあるとする。

- (i) 平衡点が、パラメタの変化により局所的に不安定化する。(線形不安定化)
- (ii) 平衡点から離れたところでは、解は平衡点へ近づく。(非線形安定性)

このとき、平衡点の近傍で、平衡点から分岐する周期解の発生がみられる。この現象を Hopf 分岐と言う。(線形安定化と非線形不安定性の組み合わせでもよい。) ただし、(i) の不安定

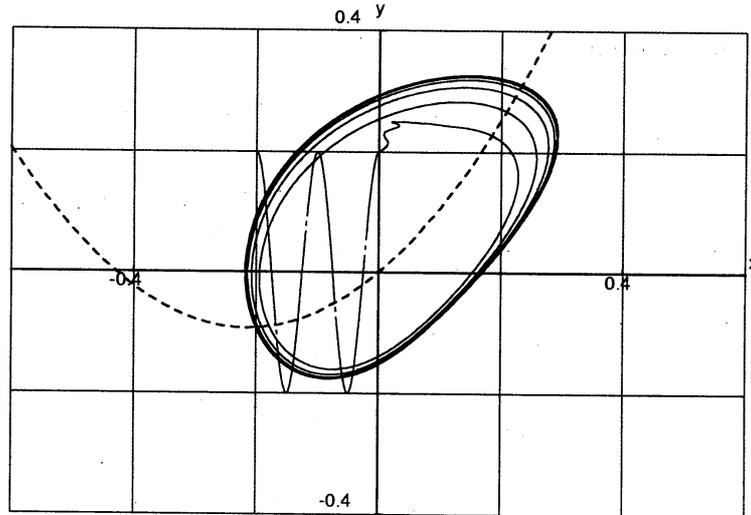


図 1: $F(x)$ が 2 次関数の場合の (1) の解 (破線は $F(x)$)

化の条件として、一対の simple な固有値が複素平面上の原点以外で虚軸を横切ることを仮定する。すなわち、パラメタを μ 、線形部の固有値を $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$ とすると、 $\alpha(0) = 0$ 、 $\omega(0) \neq 0$ かつ $\alpha'(0) \neq 0$ とする。

2.2 2次元常微分方程式の場合

2次元常微分方程式の場合の Hopf 分岐の解析には、まず線形部を Jordan 標準形に変換する。このとき、Hopf 分岐の仮定より

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\omega(\mu) \\ \omega(\mu) & \alpha(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f^1(u_1, u_2, \mu) \\ f^2(u_1, u_2, \mu) \end{pmatrix}$$

となる。これを極座標表示して、適当な変数変換をすれば、方程式は次の Poincare 標準形 (r の項が奇数次のみ)

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha(\mu)r + \beta(\mu)r^3 + \dots \\ \dot{\theta} = \omega(\mu) + \dots \end{cases}$$

にできる。ここで、もし $\beta(0) \neq 0$ ならば、係数を Taylor 展開することにより、 μ が十分小さいときに

$$(r, \theta) \approx \left(\sqrt{-\frac{\alpha'(0)\mu}{\beta(0)}}, \omega(0)t \right)$$

と近似される周期解が存在する。この周期解は

- $\alpha'(0)\mu > 0$ かつ $\beta(0) < 0$ ならば安定 (supercritical)
- $\alpha'(0)\mu < 0$ かつ $\beta(0) > 0$ ならば不安定 (subcritical)

となる。尚、 $\alpha'(0)$ と $\beta(0)$ だけを求めるのであれば、最初から $\mu = 0$ として計算してよい。

2.3 時間遅れがある場合

時間遅れがある場合は、相空間が関数空間となり無限次元系になるため、2.2節の手法を直接用いることはできない。ただし、線形部が一对の simple な純虚数固有値を持ち、残りの固有値がすべて実部負であるならば、解の挙動を調べるには中心多様体上へ制限して考えればよい。この場合、中心多様体上の flow は、常微分方程式で記述される。

いま、 $C = C([-τ, 0], R^n)$ として、 $z_t \in C$ を

$$z_t(s) = z(t+s) \quad \text{for } s \in [-τ, 0]$$

と定義する。そして、一般化された Delay 方程式

$$\dot{z}(t) = Lz_t + f(z_t)$$

を考える。もし、線形化方程式 $\dot{z}(t) = Lz_t$ が一对の simple な純虚数固有値 $\pm i\omega$ を持ち、残りの固有値がすべて実部負であるならば、 C は $\pm i\omega$ に属する一般化固有空間 P により、

$$C = P \oplus Q$$

と分解できる。ここで、一般化固有空間 P の基底を Φ とし、対応する adjoint 方程式の解の基底を Ψ とする。また、 Ψ は bilinear form により正規化されているとする。そうすると、解 z_t の分解は

$$z_t = \Phi u + w_t, \quad \Phi u \in P, \quad w_t \in Q$$

となる。このとき、中心多様体は

$$W_{loc}^c(0) = \{\phi \in C : \phi = \Phi u + h(u), |u| \leq \eta\}$$

と表される。 $h(u)$ を具体的に求めるには、

$$h(u) = \frac{1}{2}h_{20}u_1^2 + h_{11}u_1u_2 + \frac{1}{2}h_{02}u_2^2 + \dots$$

として、

$$\begin{cases} \dot{u} &= Bu + \Psi(0)f(\Phi u + h(u)) \\ \frac{d}{dt}h(u) &= \hat{A}h(u) + (X_0 - \Phi\Psi(0))f(\Phi u + h(u)) \end{cases}$$

に代入し、係数比較により各 $h_{ij} \in C$ を求めればよい。ただし、 \hat{A} は解作用素 $T(t)$ の infinitesimal generator とし、

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{cases} I & (s=0) \\ 0 & (-\tau \leq s < 0) \end{cases}$$

とする。中心多様体上の常微分方程式は、

$$\dot{u} = Bu + \Psi(0)f(\Phi u + h(u))$$

となる。

3 結果

3.1 固有値について

特性方程式

$$(2) \quad \det \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = \lambda I - Ae^{-\lambda\tau}$$

の根を考える。A を 2×2 の実行列とすると、次の Lemma が成立する。([5])

Lemma 1 行列 A の固有値を $\alpha_k e^{i\theta_k}$ ($k = 1, 2; \alpha_k \geq 0, -\pi < \theta_k \leq \pi$) とする。

(i) $\theta_k \neq \pi$ かつ $0 < \alpha_k \tau = |\theta_k| - \frac{\pi}{2}$ ならば、(2) は simple な純虚数根 $\pm i\alpha_k$ を持ち、残りの根はすべて実部負である。

(ii) $\theta_k = \pi$ かつ $0 < \alpha_k \tau = \frac{\pi}{2}$ ならば、(2) は純虚数根 $\pm i\alpha_k$ を持つ。

このとき、もう一方の固有値も $\theta_j = \pi$ かつ $0 < \alpha_j \tau = \frac{\pi}{2}$ ($j \neq k$) ならば、 $\pm i\alpha_k$ は double で、(2) の残りの根はすべて実部負である。

また、もう一方の固有値が $\theta_j = \pi$ かつ $0 < \alpha_j \tau < \frac{\pi}{2}$ ($j \neq k$) ならば、 $\pm i\alpha_k$ は simple で、(2) の残りの根はすべて実部負である。

特に、行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、(2) の根は方程式 (1) の線形部の固有値となり、次の Lemma が成立する。

Lemma 2 方程式 (1) の線形部の固有値を考える。

(i) $a = 2 \sin \tau$ かつ $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ ならば、(1) の線形部は一对の simple な純虚数固有値 $\pm i$ を持ち、残りの固有値はすべて実部負である。

(ii) $a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi}$ かつ $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ ならば、(1) の線形部は一对の simple な純虚数根 $\pm i \frac{\pi}{2\tau}$ を持ち、残りの固有値はすべて実部負である。

Proof. 行列 A の固有値は $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ となる。

(i) $a = 2 \sin \tau$ かつ $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} &= -\sin \tau \pm i \sqrt{1 - \sin^2 \tau} \\ &= -\sin \tau \pm i \cos \tau \\ &= \cos\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right) \pm i \sin\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。したがって、Lemma 1 より (1) の線形部は simple な純虚数固有値 $\pm i$ を持ち、その他の固有値はすべて実部負である。

(ii) $a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi}$ かつ $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi} \right)^2 - 4} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi} \right) \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2\tau} - \frac{2\tau}{\pi} \right) \\ &= \begin{cases} -\frac{2\tau}{\pi} \\ -\frac{\pi}{2\tau} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。したがって、Lemma 1 より (1) の線形部は simple な純虚数固有値 $\pm i\frac{\pi}{2\tau}$ を持ち、その他の固有値はすべて実部負である。□

3.2 $a = 2 \sin \tau + \mu$ の場合

Theorem 1 μ は十分小さいとし、 $a = 2 \sin \tau + \mu$ かつ $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ とする。

- (i) $c > K_1 b^2$ ならば、 $\mu < 0$ のとき安定周期解が存在する。
(ii) $c < K_1 b^2$ ならば、 $\mu > 0$ のとき不安定周期解が存在する。

ただし、

$$K_1 = -\frac{4(3\tau \cos 2\tau - 4 \sin \tau + 5 \sin 2\tau)}{3(5 - 4 \cos \tau)(5 + 4 \cos 3\tau)}$$

とする。また、周期解は

$$p(t) \approx r_0 \begin{pmatrix} \sin(t + \tau) \\ \cos t \end{pmatrix} + r_0^2 (E_1 \cos 2t - E_2 \sin 2t + E_3)$$

と近似できる。ただし、

$$r_0 = \sqrt{-\frac{4\mu}{3(c - K_1 b^2)}}$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{b}{2(5 - 4 \cos \tau)(5 + 4 \cos 3\tau)} \begin{pmatrix} -4 \sin \tau + 4 \sin 3\tau - 2 \sin 4\tau \\ 3 \cos 2\tau \end{pmatrix}, \\ E_2 &= -\frac{b}{2(5 - 4 \cos \tau)(5 + 4 \cos 3\tau)} \begin{pmatrix} 8 - 4 \cos \tau + 4 \cos 3\tau - 2 \cos 4\tau \\ -4 \sin \tau + 5 \sin 2\tau \end{pmatrix}, \\ E_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ b/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする。

Proof. 分岐点 $\mu = 0$ では、固有値 $\pm i$ に属する固有空間の基底は、

$$\Phi = \left(\begin{pmatrix} \sin(s + \tau) \\ \cos s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(s + \tau) \\ -\sin s \end{pmatrix} \right) \quad \text{for } s \in [-\tau, 0]$$

となる。このとき、任意の $\phi \in C$ は

$$\phi = \Phi \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + w, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^2, \quad w \in Q$$

と表される。また、中心多様体上では、 w は u_1, u_2 の関数として、

$$w = h(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(h_{20}u_1^2 + 2h_{11}u_1u_2 + h_{02}u_2^2) + O(|u|^3)$$

と書ける。ただし、 $s \in [-\tau, 0]$ に対して

$$\begin{aligned} h_{20} &= -\frac{4b \sec \tau}{3(1 + \tau^2)} \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau \end{pmatrix} + 2E_1 \cos 2s - 2E_2 \sin 2s + 2E_3 \\ h_{11} &= -\frac{2b \sec \tau}{3(1 + \tau^2)} \Phi \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} - 2E_2 \cos 2s - 2E_1 \sin 2s \\ h_{02} &= -\frac{2b \sec \tau}{3(1 + \tau^2)} \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau \end{pmatrix} - 2E_1 \cos 2s + 2E_2 \sin 2s + 2E_3 \end{aligned}$$

となる。中心多様体上の常微分方程式を Poincare 標準形に変換すると、

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha'(0) \mu r + \beta(0) r^3 + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^5) \\ \dot{\theta} = 1 + O(\mu, r^2) \end{cases}$$

となる。ただし、

$$\alpha'(0) = -\frac{1}{2(1 + \tau^2) \cos \tau} < 0,$$

$$\begin{aligned} \beta(0) &= -\frac{1}{2(1 + \tau^2) \cos \tau} \left(\frac{b^2(3\tau \cos 2\tau - 4 \sin \tau + 5 \sin 2\tau)}{(5 - 4 \cos \tau)(5 + 4 \cos 3\tau)} + \frac{3c}{4} \right) \\ &= \alpha(0) \frac{3(c - K_1 b^2)}{4} \begin{cases} < 0 & (c > K_1 b^2) \\ > 0 & (c < K_1 b^2) \end{cases} \end{aligned}$$

である。これより、周期解の存在と安定性の結果が得られる。また、周期解の近似表現は、中心多様体の近似と Poincare 標準形への変換の際の変数変換から得られる。□

Remark 1 Theorem 1 の K_1 を時間遅れ τ の関数としてグラフにすると、図 2 のようになる。このグラフより、 τ が小さい場合は $K_1 < 0$ となるので、Theorem 1 (i) の条件は、例えば $c = 0$ のとき任意の $b \neq 0$ について成立する。すなわち、 $F(x)$ が 2 次関数 $F(x) = ax + bx^2$ のときは、 $a = 2 \sin \tau + \mu$ かつ $\mu < 0$ (十分小) であれば、時間遅れが小さいならば任意の $b \neq 0$ で安定周期解が存在する。時間遅れの無い $\tau = 0$ の場合では、一般に 3 次以上の項が無ければ周期解の存在を示すことは難しい。時間遅れにより、周期解が発生しやすくなっていると言える。

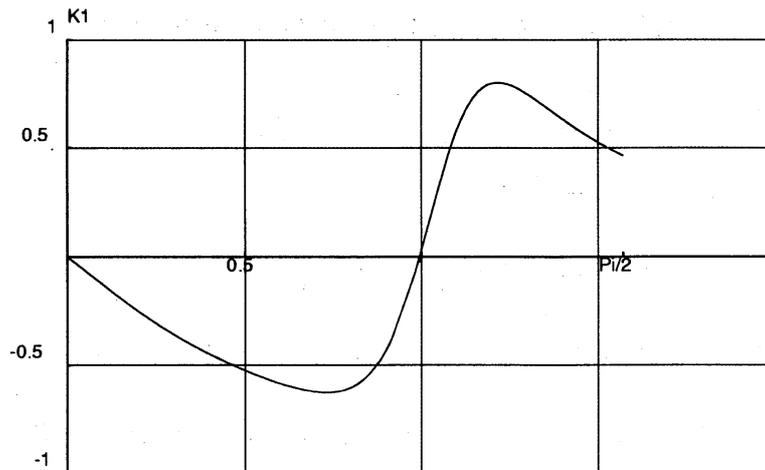


図 2: Theorem 1 の K_1 のグラフ

例 1 方程式 (1) で $F(x) = axe^{bx}$ とする。 $F(x)$ を $x = 0$ の近傍で Taylor 展開すると

$$F(x) = ax + abx^2 + \frac{ab^2}{2}x^3 + O(x^4)$$

となる。ここで、パラメタ値を

$$\tau = 0.5, \quad a = 2 \sin \tau - 0.1, \quad b = -1.5$$

とすると、Theorem 1 から 図 3 で近似される安定周期解が存在する。また、初期関数を

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 0.4t \\ 0.2 \cos 8\pi t \end{pmatrix} \quad \text{on } [-\tau, 0]$$

として数値解を求めると、図 4 のようになる。これらの図より、解が Theorem 1 の周期解に近づいていることが分かる。

3.3 $a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi} + \mu$ の場合

Theorem 2 μ は十分小さいとし、 $a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi} + \mu$ かつ $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ とする。

- (i) $c < K_2 b^2$ ならば、 $\mu > 0$ のとき安定周期解が存在する。
- (ii) $c > K_2 b^2$ ならば、 $\mu < 0$ のとき不安定周期解が存在する。

ただし、

$$K_2 = -\frac{4\tau(4\pi^2 - \pi^3 - 4\tau^2 - 4\pi\tau^2)}{15(\pi^4 + 4\tau^4)}$$

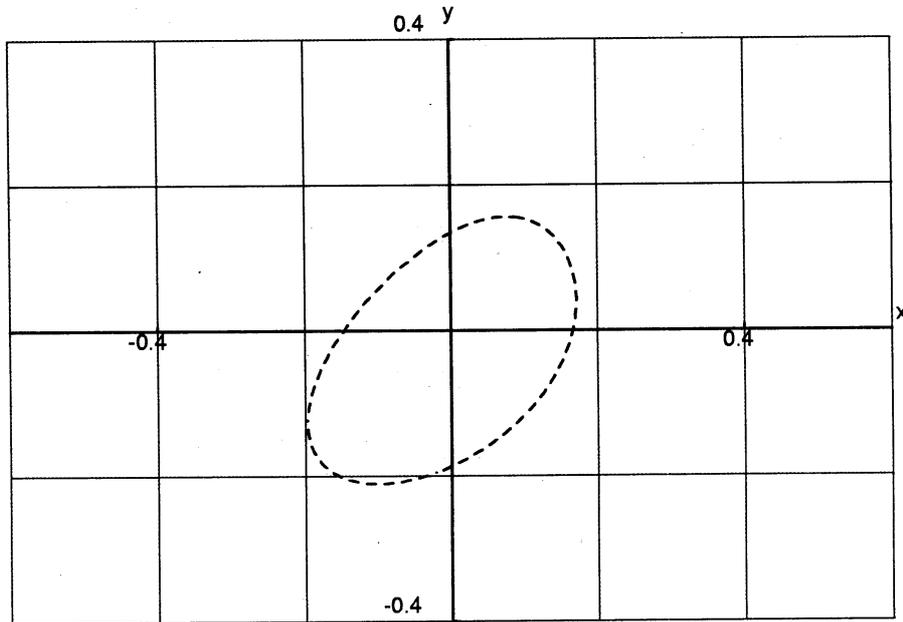


図 3: 例 1 の定理による近似周期解

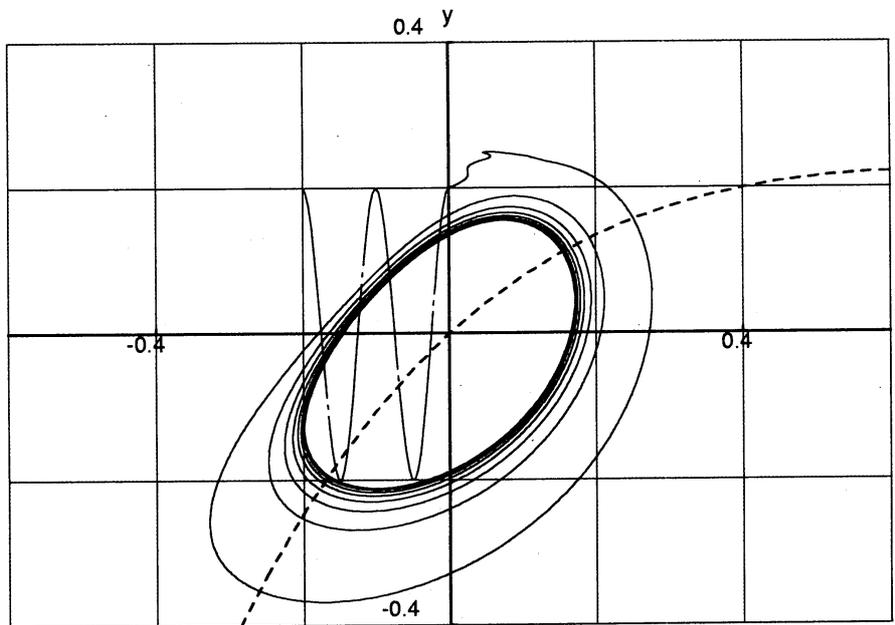


図 4: 例 1 の方程式(1)の数値解 (破線は $F(x)$)

とする。また、周期解は

$$p(t) \approx r_0 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2\tau} t \\ \frac{2\tau}{\pi} \cos \frac{\pi}{2\tau} t \end{pmatrix} + r_0^2 \left(E_1 \cos \frac{\pi}{\tau} t - E_2 \sin \frac{\pi}{\tau} t + E_3 \right)$$

と近似できる。ただし、

$$r_0 = \sqrt{-\frac{4\mu}{3(c - K_2 b^2)}},$$

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{b\tau}{5(\pi^4 + 4\tau^4)} \begin{pmatrix} \pi(\pi^2 + 4\tau^2) \\ 2\tau(\pi^2 - \tau^2) \end{pmatrix}, \\ E_2 &= -\frac{b\tau}{5(\pi^4 + 4\tau^4)} \begin{pmatrix} 2\pi(\pi^2 - \tau^2) \\ -\tau(\pi^2 + 4\tau^2) \end{pmatrix}, \\ E_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ b/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする。

Proof. 分岐点 $\mu = 0$ では、固有値 $\pm i\omega$ (ただし、 $\omega = \frac{\pi}{2\tau}$) に属する固有空間の基底は、

$$\Phi = \left(\begin{pmatrix} \cos \omega s \\ \frac{1}{\omega} \cos \omega s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \omega s \\ -\frac{1}{\omega} \sin \omega s \end{pmatrix} \right) \quad \text{for } s \in [-\tau, 0]$$

となる。このとき、任意の $\phi \in C$ は

$$\phi = \Phi \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + w, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad w \in Q$$

と表される。また、中心多様体上では、 w は u_1, u_2 の関数として、

$$w = h(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(h_{20}u_1^2 + 2h_{11}u_1u_2 + h_{02}u_2^2) + O(|u|^3)$$

と書ける。ただし、 $s \in [-\tau, 0]$ に対して

$$\begin{aligned} h_{20} &= \frac{32b\pi\tau}{3(\pi^2 + 4)(\pi^2 - 4\tau^2)} \Phi \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix} + 2E_1 \cos 2\omega s - 2E_2 \sin 2\omega s + 2E_3 \\ h_{11} &= -\frac{16b\pi\tau}{3(\pi^2 + 4)(\pi^2 - 4\tau^2)} \Phi \begin{pmatrix} 2 \\ -\pi \end{pmatrix} - 2E_2 \cos 2\omega s - 2E_1 \sin 2\omega s \\ h_{02} &= \frac{16b\pi\tau}{3(\pi^2 + 4)(\pi^2 - 4\tau^2)} \Phi \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix} - 2E_1 \cos 2\omega s + 2E_2 \sin 2\omega s + 2E_3 \end{aligned}$$

となる。中心多様体上の常微分方程式を Poincare 標準形に変換すると、

$$\begin{cases} \dot{r} &= \alpha'(0)\mu r + \beta(0)r^3 + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^5) \\ \dot{\theta} &= \omega + O(\mu, r^2) \end{cases}$$

となる。ただし、

$$\alpha'(0) = \frac{2\pi^3}{(\pi^2 + 4)(\pi^2 - 4\tau^2)} > 0,$$

$$\beta(0) = \frac{2\pi^3}{(\pi^2 + 4)(\pi^2 - 4\tau^2)} \left(\frac{b^2\tau(4\pi^2 - \pi^3 - 4\tau^2 - 4\pi\tau^2)}{5(\pi^4 + 4\tau^4)} + \frac{3c}{4} \right)$$

$$= \alpha'(0) \frac{3(c - K_2 b^2)}{4} \begin{cases} < 0 & (c < K_2 b^2) \\ > 0 & (c > K_2 b^2) \end{cases}$$

である。これより、周期解の存在と安定性の結果が得られる。また、周期解の近似表現は、中心多様体の近似と Poincaré 標準形への変換の際の変数変換から得られる。□

Remark 2 Theorem 2 の K_2 を時間遅れ τ の関数としてグラフにすると、図 5 のようになる。このグラフより、 τ が $\pi/2$ に近づけば $K_2 > 0$ となるので、Theorem 2 (i) の条件は、例えば $c = 0$ のとき任意の $b \neq 0$ について成立する。すなわち、 $F(x)$ が 2 次関数 $F(x) = ax + bx^2$ のときは、 $a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi} + \mu$ かつ $\mu > 0$ (十分小) であれば、時間遅れが $\pi/2$ に近いならば任意の $b \neq 0$ で安定周期解が存在する。

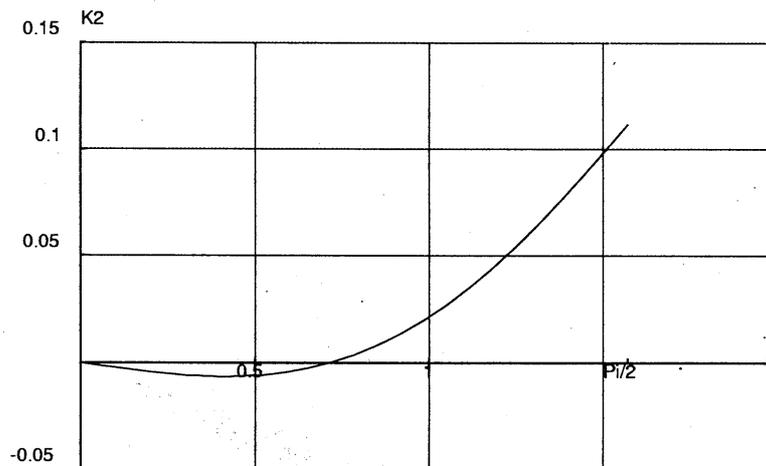


図 5: Theorem 2 の K_2 のグラフ

例 2 方程式 (1) で $F(x) = ax + bx^2 + cx^3$ とする。ここで、パラメタを

$$\tau = 0.5, \quad a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi} + 0.1, \quad b = 1, \quad c = -1$$

とすると、Theorem 2 から図 6 で近似される安定周期解が存在する。ここで、初期関数を

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 0.4t \\ 0.2 \cos 8\pi t \end{pmatrix} \quad \text{on } [-\tau, 0]$$

として数値解を求めると、図 7 のようになる。これらの図より、解が Theorem 2 の周期解に近づいていることが分かる。

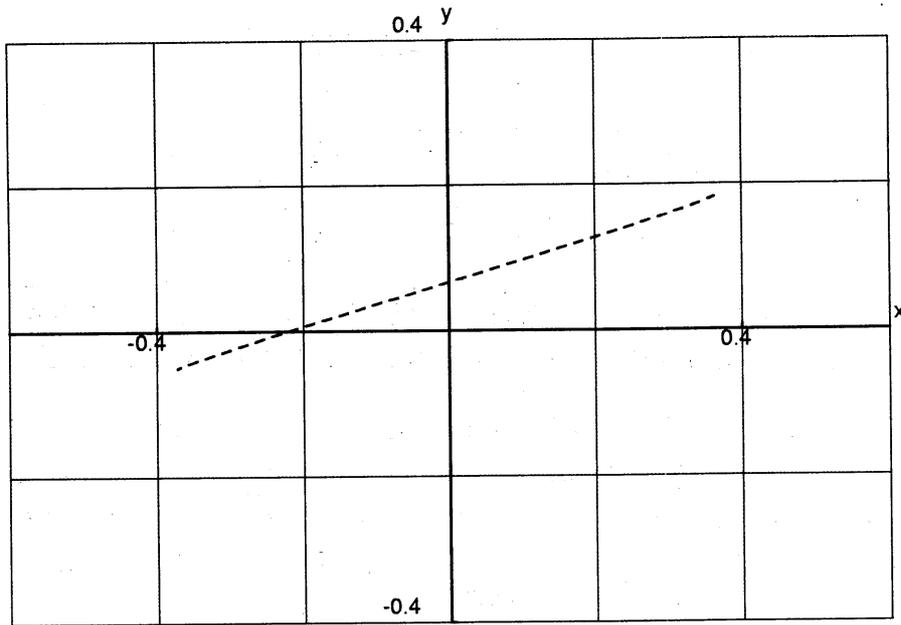


図 6: 例 2 の定理による近似周期解

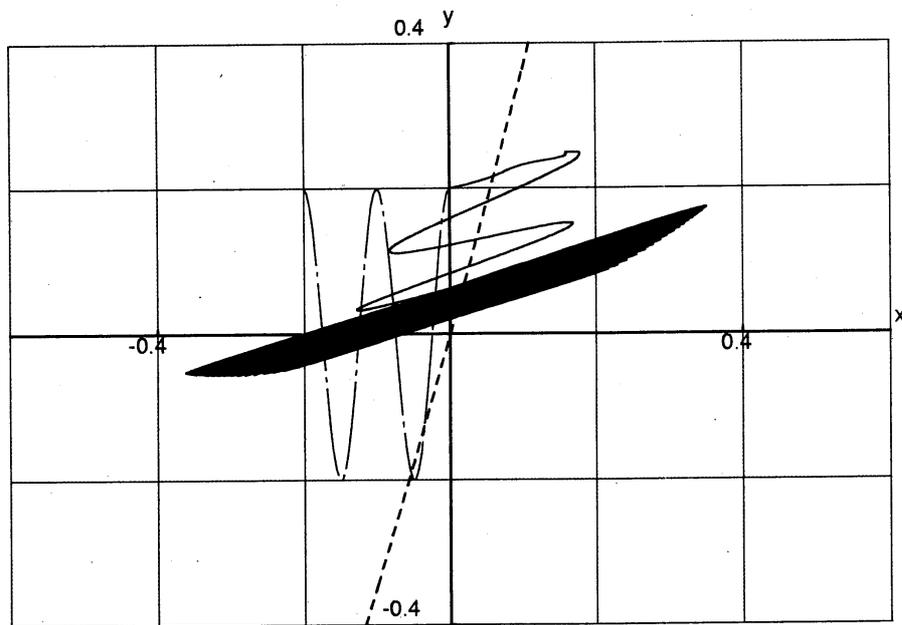


図 7: 例 2 の方程式(1) の数値解 (破線は $F(x)$)

参考文献

- [1] M.Ait Babram and M.L.Hbid and O.Arino, Approximation Scheme of a Center Manifold for Functional Differential Equations, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol.213, 554-572 (1997).
- [2] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag (1983).
- [3] J. Hale and S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag (1993):
- [4] B.D. Hassard, N.D. Kazarinoff and Y.H. Wan, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, Cambridge University Press (1981).
- [5] K. Murakami, Stable Periodic Solutions for Two-dimensional Linear Delay Differential Equations, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol.205, No.2, 512-530 (1997).
- [6] K. Murakami and T. Hara, Hopf bifurcation for delayed equation of van der Pol type, *京大数理解析研講究録* 984, 114-122 (1997).
- [7] G. Stépán, *Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions*, Pitman (1989).
- [8] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag (1990).
- [9] J. H. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer-Verlag (1996).