

数式処理による行列の有理標準形から Jacobson 標準形への変換行列の計算法

筑波大学 電子・情報工学系 栗山和子 (Kazuko Kuriyama)
図書館情報大学 図書館情報学部 森継修一 (Shuichi Moritsugu)

1. はじめに

本研究では、数式処理を用いた厳密計算によって、有理数を要素とする任意の n 次正方行列の有理標準形を Jacobson 標準形に変換する変換行列の計算法について述べる。

行列の標準形に関する研究は、既に多数発表されているが、行列の標準形と標準形への変換行列の構成的算法に関しては、Jordan 標準形と有理標準形に関する文献が多く、Jacobson 標準形について構成的算法を述べている文献はほとんどない。有理標準形、Jordan 標準形との関係において Jacobson 標準形の定義を述べているものがいくつかあるが ([1],[2],[5])、変換行列の計算法についてまで踏み込んでいるものは [3] くらいしか見あたらない。[3] では、行列のレゾルベントと、標準形の基底の属する巡回部分空間の性質を利用して、任意の行列を Jacobson 標準形を含むいくつかの標準形に変換するアルゴリズムについて述べている。

本研究では、[6] に述べられている有理標準形から Jordan 標準形への変換行列の構成法を参考にして、もとの行列を直接 Jacobson 標準形に変換するのではなく、一旦、もとの行列を有理標準形へ変換した後、有理標準形から Jacobson 標準形への変換行列を計算するアルゴリズムを提案する。

2. 基本概念

2.1. 定義・定理

以下の章では、任意の行列といえば、その要素は任意体上の元にとるものとする。

定義 1 (コンパニオン行列) 次の形の q 次正方行列

$$(2.1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_{q-2} \\ O & & & 1 & a_{q-1} \end{bmatrix}$$

を、多項式 $f(\lambda) = \lambda^q - a_{q-1}\lambda^{q-1} - \dots - a_1\lambda - a_0$ に随伴するコンパニオン行列という。特に、 $f(\lambda) = \lambda - a_0$ のコンパニオン行列は 1 次の行列 $[a_0]$ であるとする。 q 次のコンパニオン行列 A の特性多項式 $\varphi_A(\lambda)$ と最小多項式 $\phi_A(\lambda)$ は $f(\lambda)$ に一致する。

定理 1 (有理標準形) 任意の n 次正方行列 A は、適当な正則行列 S を用いて、

$$(2.2) \quad S^{-1}AS = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_t$$

という形のブロック対角行列に変換することができる。これを A の有理標準形という。ここで、各ブロック $C_i (i = 1, \dots, t)$ は、 q_i 次のコンパニオン行列であり、 C_{j+1} の最小多項式 $\phi_{C_{j+1}}(\lambda)$ は C_j の最小多項式 $\phi_{C_j}(\lambda)$ を割り切る ($j = 1, \dots, t-1$)。与えられた行列に対して、(2.2) の形の行列は一意的に定まる。

定義 2 (超同伴行列) 多項式 $f(\lambda)$ が p 次の既約多項式 $g(\lambda)$ のべき $g(\lambda)^q$ に等しいとき、次の形の r 次正方行列を、多項式 $f(\lambda) = g(\lambda)^q (r = p \times q)$ の超同伴行列という。ただし、 C は多項式 $g(\lambda)$ に随伴する p 次のコンパニオン行列であり、 M は右上隅が 1 で他がすべて 0 からなる p 次正方行列である。

$$(2.3), (2.4) \quad L = \begin{bmatrix} C & M & & O \\ & C & \dots & \\ & & \dots & \dots \\ O & & & M \\ & & & C \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ r \\ \downarrow \end{matrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & O & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

特に、 $q = 1$ 、すなわち $f(\lambda) = g(\lambda)$ のときは、 $L = C$ とする。

定理 2 (Jacobson 標準形) 任意の n 次正方行列 A は、適当な正則行列 $S (\det S \neq 0)$ を用いて

$$(2.5) \quad S^{-1}AS = L_{11} \oplus L_{12} \oplus \dots \oplus L_{tr_t}$$

という形のブロック対角行列に変換することができる。これを A の Jacobson 標準形という。ここで、各ブロック $L_{ij} (i = 1, \dots, t; j = 1, \dots, r_i)$ は、 A の特性行列 $\lambda E - A$ の単純単因子 $p_{ij}(\lambda)^{k_{ij}}$ の超同伴行列である。ただし、全固有値が属する体を基礎体にとれば、Jacobson 標準形は Jordan 標準形に一致する。

2.2. 有理標準形から Jordan 標準形への変換行列の計算法

n 次正方行列 A の有理標準形 $R = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_t$ から Jordan 標準形 J への変換行列を U 、その逆行列を U^{-1} とする ($URU^{-1} = J$)。各 C_μ の次数を m_μ 、最小多項式を $\phi_{C_\mu}(\lambda)$ とおく ($\mu = 1, \dots, t$)。

2.2.1. 変換行列 U の計算手順

文献 [6] に基づき、 R の各コンパニオン行列 $C_\mu (\mu = 1, \dots, t)$ について、次の操作を行なう。まず、 C_1 に対して、以下の (i), (ii) を行なう。

- (i) $\phi_{C_1}(\lambda)$ を因数分解し、各固有値 α_τ とその重複度 p_τ を求める。

$$\phi_{C_1}(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{p_1} \cdots (\lambda - \alpha_l)^{p_l} \quad (p_1 + \cdots + p_l = m_1)$$

- (ii) 各固有値 $\alpha_\tau (\tau = 1, \dots, l)$ に対して次の操作を行ない、変換行列 U_1 を作る。
まず、 α_1 に対して、 $p_1 \times m_1$ 行列 $U_1^{(1)}$ を、

$$u_{ij} = \binom{j-1}{p_1-i} \alpha_1^{i+j-p_1-1} \quad (i = 1, \dots, p_1; j = 1, \dots, m_1)$$

を (i, j) 要素とする行列として定義する。他の固有値に対しても同様のことを行ない、その結果得られる $p_k \times m_1$ 行列を $U_1^{(k)} (k = 2, \dots, l)$ とする。そして $U_1^{(1)}, \dots, U_1^{(l)}$ をこの順に縦に並べて作った m_1 次の正方行列を U_1 とする。

同様にして、各コンパニオン行列 $C_\mu (\mu = 2, \dots, t)$ に対して m_μ 次行列 U_μ を作り、それらの直和を $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_t$ とおく。

2.2.2. 変換行列の逆行列 U^{-1} の計算手順

文献 [7] に基づき、変換行列 U の各ブロック $U_\mu (\mu = 1, \dots, t)$ について、次の操作を行なう。まず、 U_1 に対して、以下の (i), (ii) を行なう。

- (i) 各固有値 $\alpha_\tau (\tau = 1, \dots, l)$ に対して、以下の式にしたがって、 Q_1 を作る。ただし、 c_i は $\phi_{C_i}(\lambda)$ の $m_1 - i$ 次の項の係数である。まず、 α_1 に対して、 $m_1 \times p_1$ 行列 $Q_1^{(1)}$ を以下のように定義する。

$$Q_1^{(1)} = \begin{bmatrix} q_{m_1-1}^{(p_1-1)}(\alpha_1) & \cdots & q_{m_1-1}^{(1)}(\alpha_1) & q_{m_1-1}(\alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & q_2^{(1)}(\alpha_1) & q_2(\alpha_1) \\ 0 & \cdots & 1 & q_1(\alpha_1) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$q_0(\alpha_1) = 1, \quad q_{k+1}(\alpha_1) = q_k(\alpha_1)\alpha_1 + c_{k+1} \quad (k = 0, \dots, m_1 - 2),$$

$$q_s^{(s)}(\alpha_1) = 1, \quad q_{k+1}^{(s)}(\alpha_1) = q_k^{(s)}(\alpha_1)\alpha_1 + q_k^{(s-1)}(\alpha_1) \quad (s = 1, \dots, p_1 - 1; k = s, \dots, m_1).$$

他の固有値に対しても同様のことを行ない、その結果得られる $m_1 \times p_k$ 行列を $Q_1^{(k)} (k = 2, \dots, l)$ とする。そして $Q_1^{(1)}, \dots, Q_1^{(l)}$ をこの順に並べて作った m_1 次の正方行列を Q_1 とする。

- (ii) 各固有値 $\alpha_\tau (\tau = 1, \dots, l)$ に対して、以下の式にしたがって、 D_1, D_1^{-1} を作る。ただし、 $\phi_{C_\mu}^{(i)}(\lambda)$ は $\phi_{C_\mu}(\lambda)$ の λ についての i 回微分である。まず、 α_1 に対して、 $p_1 \times p_1$ 行列 $D_1^{(1)}, D_1^{(1)-1}$ をそれぞれ以下のように定義する。

$$D_1^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{p_1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_2 & \ddots & & \\ a_1 & & & O \end{bmatrix}, \quad D_1^{(1)-1} = \begin{bmatrix} O & & & b_1 \\ & \ddots & & b_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{p_1} \end{bmatrix},$$

$$a_j = \frac{\phi_{C_1}^{(p_1-1+j)}(\lambda) |_{\lambda=\alpha_1}}{(p_1-1+j)!} \quad (j = 1, \dots, p_1),$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_j = -b_1 \sum_{s=1}^{j-1} a_{j+1-s} b_s \quad (j = 2, \dots, p_1)$$

他の固有値に対しても同様のことを行ない、その結果得られる $p_k \times p_k$ 行列をそれぞれ $D_1^{(k)}, D_1^{(k)-1}$ ($k = 2, \dots, l$) とする。そして $D_1^{(1)}, \dots, D_1^{(l)}$ の直和である m_1 次の正方行列を $D_1, D_1^{(1)-1}, \dots, D_1^{(l)-1}$ の直和である m_1 次の正方行列を D_1^{-1} とする。

同様にして、各ブロック U_μ ($\mu = 2, \dots, t$) 対しても m_μ 次行列 Q_μ, D_μ, D_μ^{-1} を作り、それぞれ、それらの直和を $Q = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \dots \oplus Q_t, D = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_t, D^{-1} = D_1^{-1} \oplus D_2^{-1} \oplus \dots \oplus D_t^{-1}$ とおく。このとき、 $UQ = D$ であり、 $U^{-1} = QD^{-1}$ である。

3. 有理標準形から Jacobson 標準形への変換行列の計算法

n 次正方行列 A の有理標準形 $R = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_t$ から Jacobson 標準形 J への変換行列を T 、その逆行列を T^{-1} とする ($TRT^{-1} = J$)。

3.1. 変換行列 T の計算手順

R の各コンパニオン行列 C_μ ($\mu = 1, \dots, t$) について、次の操作を行なう。まず、 C_1 に対して、以下の (i), (ii) を行なう。

- (i) $\phi_{C_1}(\lambda)$ を因数分解し、各既約因子 p_r とその重複度 k_r を求める ($p_r^{k_r}$ は単純単因子である)。

$$\phi_{C_1}(\lambda) = p_1^{k_1} \dots p_l^{k_l} \quad (d_r = \deg(p_r); d_1 k_1 + \dots + d_l k_l = m_1)$$

- (ii) 各既約因子 p_r ($r = 1, \dots, l$) に対して次の操作を行ない、変換行列 T_1 を作る。まず、 p_1 に対して、以下の操作を行ない、 $d_1 k_1 \times m_1$ 行列 $T_1^{(1)}$ を作る。

- (1) M を p_1 に同伴するコンパニオン行列とし、 $\mathbf{e}_{d_1} = [0, \dots, 0, 1]$ とする。

$$\tilde{M} = M^{d_1}, \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{d_1} M^{d_1-1} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{d_1} M \\ \mathbf{e}_{d_1} \end{bmatrix}$$

- (2) $d_1 k_1 \times m_1$ 行列 $T_1^{(1)}$ は以下のようなブロック要素を持つ。

$$T_1^{(1)} = \begin{bmatrix} O & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & O & \tilde{E}^3 & \dots \\ \vdots & O & \tilde{E}^2 & \tilde{M}\tilde{E}^2 + \tilde{E}\tilde{M}\tilde{E} + \tilde{E}^2\tilde{M} & \dots \\ O & \tilde{E} & \tilde{M}\tilde{E} + \tilde{E}\tilde{M} & \tilde{M}^2\tilde{E} + \tilde{E}\tilde{M}^2 + \tilde{M}\tilde{E}\tilde{M} & \dots \\ E & \tilde{M} & \tilde{M}^2 & \tilde{M}^3 & \dots \end{bmatrix}$$

他の既約因子に対しても同様のことを行ない、その結果得られる $d_r k_r \times m_1$ 行列を $T_1^{(r)}$ ($r = 2, \dots, l$) とする。そして $T_1^{(1)}, \dots, T_1^{(l)}$ をこの順に縦に並べて作った m_1 次の正方行列を T_1 とする。

同様に、各コンパニオン行列 C_μ ($\mu = 2, \dots, t$) 対しても m_μ 次行列 T_μ を作り、それらの直和を $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_t$ とおく。

3.2. 変換行列の逆行列 T^{-1} の計算手順

変換行列 T の各ブロック T_μ ($\mu = 1, \dots, t$) について、次の操作を行なう。まず、 T_1 に対して、以下の (i), (ii) を行なう。

- (i) 各既約因子 p_r ($r = 1, \dots, l$) に対して、以下の手順にしたがって、 Q_1 を作る。
まず、 p_1 に対して、

- (1) 以下のような (i, j) 要素を持つ $m_1 \times m_1$ 下三角行列 W を作る。

$$w_{ij} = \begin{cases} p_1 \text{ の } (i-j) \text{ 次の項の係数} & (i \geq j) \\ 0 & (i < j) \end{cases}$$

- (2) $\phi_{C_1}/p_1^{k_1} = \lambda^d - \pi_1 \lambda^{d-1} - \dots - \pi_d$ とするとき、以下のような $m_1 \times d_1$ 行列 V を作る。

$$V = \begin{bmatrix} \pi_d & & & & O \\ \vdots & \ddots & & & \\ \pi_1 & \ddots & \pi_d & & \\ 1 & \ddots & \vdots & & \\ & \ddots & \pi_1 & & \\ O & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- (3) 以下のように W と V をかけた行列を並べて $m_1 \times d_1 k_1$ 行列 $Q_1^{(1)}$ を作る。

$$Q_1^{(1)} = [W^{k_1-1}V, W^{k_1-2}V, \dots, WV, V]$$

他の既約因子に対しても同様のことを行ない、その結果得られる $m_1 \times d_r k_r$ 行列を $Q_1^{(r)}$ ($r = 2, \dots, l$) とする。そして $Q_1^{(1)}, \dots, Q_1^{(l)}$ をこの順に並べて作った m_1 次の正方行列を Q_1 とする。

- (ii) m_1 次の正方行列 D_1, D_1^{-1} を計算する。

同様に、各ブロック T_μ ($\mu = 2, \dots, t$) 対しても m_μ 次行列 Q_μ, D_μ, D_μ^{-1} を作り、それぞれ、それらの直和を $Q = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \dots \oplus Q_t$, $D = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_t$, $D^{-1} = D_1^{-1} \oplus D_2^{-1} \oplus \dots \oplus D_t^{-1}$ とおく。このとき、 $TQ = D$ であり、 $T^{-1} = QD^{-1}$ である。

4. おわりに

本研究では、巡回部分空間に属するベクトルを計算しなくても、有理標準形を経由して機械的に Jacobson 標準形を計算する方法を提案した。本研究の計算法を数式処理システム REDUCE3.5(version3.5) に実験的にインプリメントし、いくつかの計算を行なった結果、実用的であることが確かめられた。今後の課題としては、変換行列の逆行列を構成する2つの行列のうち、残りの D^{-1} の要素を簡単な形の式として表現できるように考察を進めたい。

他の数式処理システムの現状としては、本研究で使用した REDUCE3.5 にもその他の代表的な数式処理システムである MACSYMA, Mathematica にも Jacobson 標準形を計算する関数は組み込まれていない。

参 考 文 献

- [1] Ayres, F. Jr., 今井正隆訳, 行列, マグロウヒル出版, 東京, 1989
- [2] Browne, E. T., On the Reduction of a Matrix to a Canonical Form, American Mathematical Monthly. 47(1940) 437-450.
- [3] Della Dora, J., Jung, F., Resolvent and Rational Canonical Forms of Matrices, SIGSAM Bulletin. 30(1996) 4-10.
- [4] Danilevskii, A. M., On the numerical solution of the secular equation, Matematicheskii sbornik, 2(1937), 169-172.
- [5] Jacobson, N., Lectures in Abstract Algebra Vol.2, D. Van Nostrand Company, New Jarsey, 1953.
- [6] 韓太舜, 伊理正夫, ジョルダン標準形, 東京大学出版会, 東京, 1982.
- [7] Kaufman, I., The Inversion of the Vandermonde Matrix and the Transformation to the Jordan Canonical Form, IEEE Transactions on Automatic Control, AC14(1969) 774-777.
- [8] 栗山和子, 森継修一, 数式処理による行列の標準形の厳密計算法, 日本応用数学会論文誌, 4(1994), 183-194.