数理解析研究所講究録
1039巻 1998年 152-164

擬Fourier変換について

鳥取大学教育学部　栗林幸男 (Yukio Kuribayashi)

§1. はじめに

我々は[7]において $R\times R^+$ 上で定義された関数 $f(x,y)$ の擬Fourier変換 (Pseudofourier Transform) $\mathcal{PF}(f,E_2)$ を定義し，基本的ないくつかの性質を示した。その要点は次のようなものである。

(1)　Schwartz超関数 (distribution) の理論で知られている公式

$$\mathcal{F}(1)=2\pi\delta\,,\quad \mathcal{F}(\delta)=1\,,\quad \mathcal{F}(H)=\pi\delta-i\,\mathrm{f.p.}\frac{1}{x}$$

等の直接的かつ初等的証明，

(2)　$\mathcal{F}(1*1)=\mathcal{F}(1)\mathcal{F}(1)$ の正当化にあたる公式の証明，

(3)　関数 $f(x)=e^{x}$ の擬Fourier変換の計算。すなわち

$$\mathcal{PF}(f,E_2)(x,y)=\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4y}+\frac{1}{4y}-\frac{ix}{2y}\right)$$

を示した。

本論文はこれらの成果を引き継ぐもので，主な内容は

(多項式)・e^x の形の関数の擬Fourier変換の計算結果を示すことである。

§2. 準備

まず超実数，超複素数および一般関数の定義を与える。

2.1. 定義 集合R^+, Fをそれぞれ $R^+=\{y\in R \mid y>0\}$, $F=\{(0,y) \mid y\in R^+\}$ とする。Fは有限交差性をもつ。Fを含む超フィルターの1つを$\mathcal{F}_0$とする。

KをRまたはCまたはMap(R,C)とする。ここでMap(R,C)はR上で定義された複素数値関数全体の集合である。

$a(y), b(y)\in\prod_{y\in R^+}K$ に対し $\{y\in R^+ \mid a(y)=b(y)\}\in\mathcal{F}_0$

が成立するとき $a(y)\sim b(y)$ と定める。このとき関係～は同値関係である。 $^*K$を次のように定義する。

$$^*K=\prod_{y\in R^+}K/\sim$$

$a(y)$の同値類を $[a(y)]$ と書く。 $^*R$の元を超実数，$^*C$の元を超複素数という。加法，減法，乗法および除法を通常の方法で定義すると $^*R$, $^*C$ はともに可換体となる。 $^*R$は$^*C$の部分体と考えられる。

$[f_y]\in{}^*Map(R,C)$, $[x(y)]\in{}^*R$ のとき

$$^*f([x(y)])=[f_y(x(y))]$$

によって関数$^*f$を定義する。 $^*f$は$^*R$上で定義され$^*C$に値を

とる関数である。${}^{*}f$ を一般関数という。

本論文では変数 $[x(y)]\in{}^{*}R$ を $x(y)=x$，定数関数，の場合すなわち標準的な実数の場合に制限して用いる。また記号は $f_y(x)=f(x,y)$ のように用いる。こうすると ${}^{*}f([x])=[f(x,y)]$ と表わされるが $[f(x,y)]$ の代りに代表元 $f(x,y)$ を用いて論ずる。さらに関数 $f(x,y)$ では x は変数 y はパラメータと考えて $\frac{d}{dx}f(x,y)=f'(x,y)$ のように表す。

2.2. R^{+} 上で定義された関数 $x(y)=y$ より定まる超実数 $[y]$ は正の無限小超実数である。このことを y は正の無限小である，というように述べることがある。

§3. 擬 Fourier 変換

測度，積分は Lebesgue の意味で用いる。

$(-\infty,\infty)$ で定義された複素数可測関数 $f(x)$ で $|f|$ が可積分なもの全体の集合を $L^1=L^1(-\infty,\infty)$ と表す。

3.1. 定義 関数 $f(x,y)$ は $R\times R^{+}$ 上で定義された複素数値関数で次の条件をみたすものとする。

$\{y\in R^{+}\mid f(x,y)$ は y を固定すると x の関数として可測$\}\in\mathcal{F}_0$

このとき $f(x,y)$ は可測であるという。

本論文では可測関数のみを考え特にことわらないことにする。

集合Ω^k ($k=1,2,3,\cdots$)を次のように定義する。

$$\Omega^k=\{f \mid \{y\in R^+ \mid y\text{を固定すると}x\text{の関数として}f(x,y)e^{-y|x|^k}\in L^1\}\in \mathfrak{F}_0\} \qquad k=1,2,3,\cdots,$$

次の関係が成立する。

$$L^1\subset\Omega^1\subset\Omega^2\subset\cdots\subset\Omega^k\subset\cdots.$$

3.2. 定義　$f\subset\Omega^k$とし，$A_0=\{y\in R^+ \mid f(x,y)e^{-y|x|^k}\in L^1\}$とおく。擬Fourier変換 $\mathcal{PF}(f,E_k)$ および擬Fourier逆変換 $\mathcal{PF}^{-1}(f,E_k)$ をそれぞれ次のように定義する。

$$\mathcal{PF}(f,E_k)(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t,y)e^{-y|t|^k}e^{-ixt}dt \qquad y\in A_0$$

$$=0 \qquad y\notin A_0,$$

$$\mathcal{PF}^{-1}(f,E_k)(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,y)e^{-y|t|^k}e^{ixt}dt \qquad y\in A_0$$

$$=0 \qquad y\notin A_0.$$

なお本論文では$y\in A_0$の場合についてのみ論じ$y\notin A_0$の場合は省略する。また集合A_0はこの定義の意味で特にことわらずに用いることにする。

3.3. $f\in\Omega^k$とする。

$$\mathcal{PF}(f,E_k)(x,y)=\mathcal{F}(fE_k)(x,y),$$

$$\mathcal{PF}^{-1}(f,E_k)(x,y)=\mathcal{F}^{-1}(fE_k)(x,y).$$

ここで$\mathcal{F}$および$\mathcal{F}^{-1}$はそれぞれ標準的なFourier変換およ

び Fourier 逆変換を表わす。

3. 4. 定義 $A=\{y\in R^{+}\mid f(x,y)\in L^{1}\}$ とおく。 $A\in\mathfrak{F}_0$ が成立するものとする。 Fourier 変換 $\mathfrak{F}(f)$ および Fourier 逆変換 $\mathfrak{F}^{-1}(f)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(f)(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)\, e^{-ixt}\,dt \qquad y\in A\\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y\notin A.\\ \mathfrak{F}^{-1}(f)(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)\, e^{ixt}\,dt \qquad y\in A\\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y\notin A.\end{aligned}$$

これは y をパラメータとする標準的な Fourier 変換および Fourier 逆変換である。

§4. Ω^{1} における擬 Fourier 変換

4. 1. 例 (1) $f(x,y)=1 \quad (x,y)\in R\times R^{+}$ とする。

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\mathfrak{F}(1,E_1)(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y|t|}\, e^{-ixt}\,dt\\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-i(x-iy)t}\,dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-i(x+iy)t}\,dt\\ &= \frac{2y}{x^2+y^2} = 2\pi\cdot\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\\ &= 2\pi\,\delta(x,y).\end{aligned}$$

これは distribution の理論における Fourier 変換の公式 $\mathfrak{F}(1) = 2\pi\delta$ の超準解析的表現と考えられる。

(2) $H(x)$ を Heaviside 関数，すなわち

$H(x)=1 \quad x \geq 0$, $H(x)=0 \quad x<0$, をみたす関数とする。

$$\mathcal{PF}(H, E_1)(x,y) = \int_0^\infty e^{-yt} e^{-ixt} dt = \frac{1}{i(x-iy)}$$
$$= \pi \cdot \frac{y}{\pi(x^2+y^2)} - i\pi \cdot \frac{x}{\pi(x^2+y^2)}$$
$$= \pi \delta(x,y) - i\pi Q(x,y).$$

ここで $\delta(x,y) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$ はデルタ関数と考えているがPoisson核と考えてもよい。また $Q(x,y) = \frac{x}{\pi(x^2+y^2)}$ は共役Poisson核と考えられる。上の結果はdistributionの理論における公式

$\mathcal{F}(H) = \pi\delta - i\,\mathrm{Pf.}\frac{1}{x}$ の超準解析的表現と考えられる。

4.2. $f \in \Omega^1$ とする。

$$\mathcal{PF}(f, E_1)(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-y|t|} e^{-ixt} dt$$

$$= \int_0^\infty f(t) e^{-i(x-iy)t} dt + \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-i(x+iy)t} dt.$$

ここで $\quad F_+(z) = \int_{-\infty}^0 e^{-izt} f(t)\, dt \qquad z = x+iy,$

$$-F_-(z) = \int_0^\infty e^{-izt} f(t)\, dt \qquad z = x-iy$$

とおく。これらの積分は，$f \in \Omega^1$ であるから，いずれも収束する。従って $\mathcal{PF}(f, E_1)(x,y) = F_+(z) - F_-(z)$，であるから $\mathcal{PF}(f, E_1)(x,y)$ は $f(x)$ の超関数（hyperfunction）の意味でのFourier変換の超準解析による表現と考えられる。

この性質より次の予想が得られる。

4.3. 予想 (1) 超関数あるいはdistributionの意味で

Fourier変換可能な関数はΩ^1に属する。

(2) $f(x)$は正則関数$F(z)$によって$f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$と表わされる超関数とする。$\tilde{F}(x,y)=F_+(x+iy)-F_-(x-iy)$とおく。$f(x)$の超関数の意味でのFourier変換を$\mathcal{F}(f)$とすると

$$\mathcal{F}(f)(x) \fallingdotseq \mathcal{PF}(\tilde{F}, E_1)(x,y) \quad a.e.\ x$$

が成立する。ここで$\fallingdotseq$は両辺の差は無限小であることを示し，a.e. xはLebesgue測度0の集合を除いて，を意味する。

§5. Ω^2における擬Fourier変換

我々は関数$f\in\Omega^2$の擬Fourier変換を次のように定義した。

$$\mathcal{PF}(f, E_2)(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)\, e^{-y|t|^2} e^{-ixt}\, dt \qquad y\in A_0$$
$$= 0 \qquad\qquad y\notin A_0.$$

定義よりただちに次の結果が得られる。

5.1. $\frac{d}{dx}\mathcal{PF}(f,E_2)(x,y) = \mathcal{PF}((-it)f, E_2)(x,y)$.

5.2. $E_2(x,y)=e^{-y|x|^2}$によって関数$f(x,y)$が(多項式)$\cdot e^x$の形ならば擬Fourier変換$\mathcal{PF}(f,E_2)(x,y)$は存在する。

5.3. 擬Fourier変換の計算

具体的な関数の擬Fourier変換を計算する。

(1) $f(x,y)=e^x$　定義域は$R\times R^+$であるが書くことは省略する。以後の例についても同様。

$$\mathcal{PF}(f, E_2)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t} e^{-yt^2} e^{-ixt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-y(t-\frac{1}{2y})^2 + \frac{1}{4y}\} \exp(-ixt) dt$$

$$= \exp(\frac{1}{4y} - \frac{ix}{2y}) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-yu^2) \exp(-ixu)\, du$$

$$= (\frac{\pi}{y})^{\frac{1}{2}} \exp(-\frac{x^2}{4y} + \frac{1}{4y} - \frac{ix}{2y}).$$

ここでは変数変換 $u = t - \frac{1}{2y}$ をし，次の公式([2])を用いた。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-yu^2} e^{-ixu} du = (\frac{\pi}{y})^{\frac{1}{2}} \exp(-\frac{x^2}{4y})$$

(2)　$f(x, y) = x$

$$\mathcal{PF}(f, E_2)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-yt^2} e^{-ixt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-yt^2} (\cos xt - i \sin xt) dt$$

$$= -i \int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-yt^2} \sin xt\, dt. \qquad (*)$$

ここで $\sin xt$ の整級数展開を用いる。

$$\sin xt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$$

であるから

$$(*) = -i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2(j+1)} e^{-yt^2} dt. \qquad (**)$$

関数 $g(y)$, $G(y)$ を次のように定める。

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-yt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{y}} ,$$

$$G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2(j+1)} e^{-yt^2} dt .$$

$$G(y) = (-1)^{j+1} \frac{d^{j+1}}{dy^{j+1}} g(y) = (-1)^{j+1} \sqrt{\pi} \frac{d^{j+1}}{dy^{j+1}} y^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{y}} \frac{(2j+2)!}{2^{2(j+1)}(j+1)!} \cdot \frac{1}{y^{j+1}}$$

であるから次の結果が得られる。

$$(**) = -i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} \cdot \frac{(2j+2)!}{2^{2(j+1)}(j+1)!} y^{-(j+1)} \sqrt{\frac{\pi}{y}}$$

$$= -i \frac{x}{2y} \sqrt{\frac{\pi}{y}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{4y}\right)^j \frac{1}{j!}$$

$$= -i \frac{x}{2y} \sqrt{\frac{\pi}{y}} \exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right).$$

(3) $f(x, y) = x^2$

$$\mathcal{PF}(f, E_2)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-yt^2} e^{-ixt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-yt^2} \cos xt \, dt. \qquad (*)$$

今度は

$$\cos xt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} (xt)^{2j}$$

を用いて

$$(*) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2(j+1)} e^{-yt^2} dt . \qquad (**)$$

故に (2) の場合と同様に

$$G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2(j+1)} e^{-yt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{y}} \cdot \frac{(2j+2)!}{2^{2(j+1)}(j+1)!} \cdot \frac{1}{y^{j+1}}$$

を代入して

$$(**) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} \sqrt{\frac{\pi}{y}} \frac{(2j+2)!}{2^{2(j+1)}(j+1)!} \cdot \frac{1}{y^{j+1}}$$

$$= \frac{1}{2y}\sqrt{\frac{\pi}{y}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{2y}\right)^j \frac{1}{j!}(2j+1).$$

(4) $f(x,y) = x^{2k+1} \quad k \geq 0$

$$\mathcal{PF}(f, E_2)(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k+1} e^{-yt^2} e^{-ixt} dt$$

$$= -i \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k+1} e^{-yt^2} \cos xt\, dt$$

$$= -i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2(k+j+1)} e^{-yt^2} dt. \qquad (*)$$

やはり $G(y)$ を用いることにして

$$G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2(k+j+1)} e^{-yt^2} dt$$

とおけば

$$G(y) = (-1)^{k+j+1} \cdot \frac{d^{k+j+1}}{dy^{k+j+1}} g(y)$$

$$= \frac{(2k+2j+2)!}{2^{2(k+j+1)}(k+j+1)!} \cdot \frac{1}{y^{k+j+1}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{y}}$$

であるから

$$(*) = -i\sqrt{\frac{\pi}{y}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2k+2j+2)!}{2^{2(k+j+1)}(2j+1)!(k+j+1)!} \cdot \frac{x^{2j+1}}{y^{k+j+1}}.$$

(5) $f(x,y) = x^{2k} \qquad k \geqq 1$

$$\mathcal{PF}(f, E_2)(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} e^{-yt^2} e^{-ixt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} e^{-yt^2} \cos xt\, dt$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2(k+j)} e^{-yt^2} dt. \qquad (*)$$

この場合も同様に

$$G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2(k+j)} e^{-yt^2} dt$$

とおくと

$$G(y) = (-1)^{k+j} \frac{d^{k+j}}{dy^{k+j}} g(y) = \frac{(2k+2j)!}{2^{2(k+j)}(k+j)!} \cdot \frac{1}{y^{k+j}} \sqrt{\frac{\pi}{y}}.$$

従って

$$(*) = \sqrt{\frac{\pi}{y}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2k+2j)!}{2^{2(k+j)}(2j)!(k+j)!} \cdot \frac{x^{2j}}{y^{k+j}}.$$

(6) $f(x,y) = x^k e^x \qquad k \geqq 1$

$$\mathcal{PF}(f, E_2)(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^t e^{-yt^2} e^{-ixt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t^k \exp\{-y(t - \frac{1}{2y})^2 + \frac{1}{4y}\} \exp(-ixt) dt. \qquad (*)$$

ここで $u = t - \frac{1}{2y}$ とおいて変数変換すれば

$$(*) = \exp(\frac{1}{4y} - \frac{ix}{2y}) \int_{-\infty}^{\infty} (u + \frac{1}{2y})^k \exp(-yu^2) \exp(-ixu) du$$

$$= \exp(\frac{1}{4y} - \frac{ix}{2y}) \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \left(\frac{1}{2y}\right)^{k-l} \int_{-\infty}^{\infty} u^l \exp(-yu^2) \exp(-ixu) du.$$

故に(5), (6)の結果を用いて具体的な計算が可能である。

ここで $k=1$ の場合の具体的な関数を計算してみよう。

(7) $f(x,y) = xe^{x}$

$$\mathcal{PF}(f, E_2)(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} te^{t} e^{-yt^2} e^{-ixt}\,dt$$

$$= \exp\left(\frac{1}{4y} - \frac{ix}{2y}\right)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} u\exp(-yu^2)\exp(-ixu)\,du + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2y}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-yu^2)\exp(-ixu)\,du\right\}$$

$$= \left\{\exp\left(\frac{1}{4y} - \frac{ix}{2y}\right)\right\}\left(-\frac{ix}{2y} + \frac{1}{2y}\right)\sqrt{\frac{\pi}{y}}\exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right).$$

§6. Ω^3 における擬Fourier変換の準備

Ω^3 における擬Fourier変換を計算するには次の問題を解決することが必要でありまた十分でもあると考えている。

6.1. 問題. (1) $I(y) = \int_0^{\infty} e^{-yx^3}\,dx \quad (y>0)$ を求めよ。

(2) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y|t|^k} e^{ixt}\,dt \quad (k \geqq 3)$ は総和核であるか。

参考文献

[1] A. E. Hurd and P. A. Loeb, An Introduction to Nonstandard Real Analysis, Academic, Orland, 1985.

[2] 猪狩 惺, フーリエ級数, 岩波書店, 東京, 1975.

[3] A. Kaneko, Introduction to Hyperfunctions, TKT Scientific, Tokyo, 1988.

[4] 河田龍夫, FOURIER 解析, 産業図書, 東京, 1975.

[5] A.G. Kursraev and S. S. Kutateladze, Nonstandard Methods of Analysis, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[6] Y. Kuribayashi, On Sets of Hyperreal Numbers, Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fis. Nat., Buenos Aires 45 (1993), 251-255.

[7] 栗林幸男, 超準解析を用いた Fourier 変換, 京都大学数理解析研究所講究録 975 (1996), 132-144.