

インピーダンス同定を伴う心電図逆問題の数値計算

東理大院 代田 健二 (Kenji Shirota)

群馬大工 中村 玄 (Gen Nakamura)

茨城大理 大西 和榮 (Kazuei Onishi)

1 緒言

観測された体表面上の電位分布から心臓内部の電流源分布を求めることにより、心機能を推定する問題を心電図逆問題という。心電図逆問題に対する数値計算については、これまでいくつか研究されてきた [2] [3] [5]。しかしそれらの研究では、内部の導電率分布を既知として計算している場合が多い。内部の導電率が既知であるということは、肺・心臓など臓器の正確な位置を既知とするものであり少し強い仮定である。本研究では心臓内部の電流源分布を求める代わりに、心外膜状の電位分布を求めることを目的とする。臓器に対する仮定としては、心臓の位置は既知であり肺の位置は未知であるものとする。この仮定は、体表面と心外膜で囲まれた体組織内の導電率が未知であるということと同じである。本稿では、このような仮定のもとでの心電図逆問題に対する数値計算アルゴリズムを提案する。

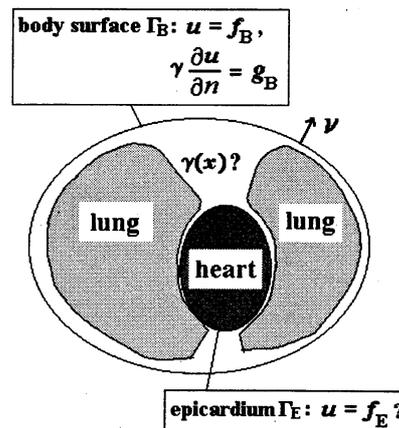


Fig.1 心電図逆問題

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ を滑らかな境界 Γ_B, Γ_E に囲まれた領域とする。 $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ は、条件

$$0 < \alpha \leq \gamma(x) \leq \beta \quad (x \in \Omega)$$

を満たす未知の関数とする。ここで、 α, β ($\alpha < \beta$) は与えられた正定数である。心電図逆問題では、 Ω は体組織、 Γ_B は体表面、 Γ_E は心外膜、 γ は導電率である。このとき、次の問題を考える：次の方程式を満たす $f_E \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_E)$ をみつけよ；

$$(IEP) \begin{cases} \nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = f_B \text{ and } \gamma \frac{\partial u}{\partial n} = g_B & \text{on } \Gamma_B, \\ u = f_E & \text{on } \Gamma_E. \end{cases}$$

ただし, $f_B \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_B)$, $g_B \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_B)$ は与えられた関数である (Fig.1). 心電図逆問題では, $g_B = 0$ となる. これは, 体表面上では電流の出入がないことを表している. 問題 (IEP) は一意可解ではない.

問題 (IEP) の数値計算を考える場合, 心外膜状の電位分布 f_E を同定すると同時に導電率 γ をも同定する必要がある. しかし同時に同定するのは困難が予想される. 導電率か電位分布のどちらかが既知である場合には, それぞれ数値計算法が存在する. 本稿では, それぞれに適した数値計算法を用いることにより, 電位分布 f_E と導電率 γ を同定する数値計算アルゴリズムを提案する. また, この数値計算アルゴリズムの効果を数値実験により確かめる.

2 計算アルゴリズム

2.1 境界値同定アルゴリズム

導電率 γ が与えられていると仮定する. 未知の Dirichlet 境界値 f_E を同定する方法として, 大西・小林・大浦 [4] が提案した境界値同定アルゴリズムを採用する. 境界値同定アルゴリズムは, 境界値逆問題を変分的定式化により汎関数最小化問題に変換し, 最小化関数を最急降下法により同定する方法である.

汎関数 $J: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_E) \rightarrow \mathbf{R}_+ := [0, +\infty)$ を次のとおり定義する:

$$J(\omega) := \int_{\Gamma_E} |u(\mathbf{x}; \omega) - f_B|^2 d\Gamma.$$

ここで, 関数 $u(\cdot; \omega) \in H^1(\Omega)$ は混合境界値問題

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\gamma \nabla u) &= 0 & \text{in } \Omega, \\ \gamma \frac{\partial u}{\partial n} &= g_B & \text{on } \Gamma_B, \\ u &= \omega & \text{on } \Gamma_E \end{aligned}$$

の解である. 汎関数 J の最小化関数を最急降下法により数値的に同定する. すなわち, 次のプロセスにより最小化関数を同定する: $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$\omega_{k+1} := \omega_k - \alpha_k J'(\omega_k).$$

ここで $\{\alpha_k\}$ は適当に定められる定数であり, $J'(\omega)$ は汎関数 J の第一変分

$$J(\omega + \delta\omega) - J(\omega) = \langle J'(\omega), \delta\omega \rangle + o(\|\delta\omega\|)$$

である. ただし

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Gamma_E} uv d\Gamma, \quad \|u\| := \left(\int_{\Gamma_E} |u|^2 d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}}.$$

最急降下法により境界値を同定するためには, $\{\alpha_k\}$ の選び方と第一変分 $J'(\omega)$ の具体的な表現が必要になる.

第一変分 $J'(\omega)$ の具体的な表現は次のとおりである [4]:

$$J'(\omega) = -\gamma \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Gamma_E}$$

ここで関数 $v \in H^1(\Omega)$ は, 境界値問題

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\gamma \nabla v) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \gamma \frac{\partial v}{\partial n} &= 2 \{u(\cdot; \omega) - f_B\} \quad \text{on } \Gamma_B, \\ v &= 0 \quad \text{on } \Gamma_E \end{aligned}$$

の解である. また $\{\alpha_k\}$ は, Armijo の基準により選ぶ. すなわち, 次のプロセスで決定する:

Armijo の基準

1. パラメーター $0 < \xi < \frac{1}{2}$, $0 < \tau < 1$, $\varepsilon > 0$ を与える.
2. $\|J'(\omega_k)\| < \varepsilon$ を満たすならば計算を終了し, 満たさなければ次ステップに進む.
3. $\beta_0 = 1$ とおく.
4. $m = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$J(\omega_k - \beta_m J'(\omega_k)) \leq J(\omega_k) - \xi \beta_m \|J'(\omega_k)\|^2$$

を満たすならば $\alpha_k := \beta_m$ とし, 満たさなければ $\beta_{m+1} := \tau \beta_m$ とする.

大西・小林・大浦は次のアルゴリズムを提案した:

境界値同定アルゴリズム

1. 初期境界値 ω_0 を与える.
2. $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して,
 - (a) 境界値問題

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\gamma \nabla u_k) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \gamma \frac{\partial u_k}{\partial n} &= g_B \quad \text{on } \Gamma_B, \\ u_k &= \omega_k \quad \text{on } \Gamma_E \end{aligned}$$

を計算し, $u_k|_{\Gamma_B}$ を求める.

- (b) 境界値問題

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\gamma \nabla v_k) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \gamma \frac{\partial v_k}{\partial n} &= 2 \{u_k - f_B\} \quad \text{on } \Gamma_B, \\ v_k &= 0 \quad \text{on } \Gamma_E \end{aligned}$$

を計算し, 第一変分 $J'(\omega_k) = -\gamma \frac{\partial v_k}{\partial n} \Big|_{\Gamma_E}$ を求める.

- (c) Armijo の基準により α_k を選択する.
- (d) 境界値をアップデートする:

$$\omega_{k+1} = \omega_k - \alpha_k J'(\omega_k).$$

- (e) $\|J(\omega_{k+1})\| < \varepsilon$ を満たすならば計算を終了し, 満たさなければ $k := k + 1$ とする.

2.2 交代方向法

境界 Γ_E において Dirichlet データ f_E , Neumann データ g_E が与えられていると仮定する。このとき未知の導電率 γ を同定する方法として, Kohn and Vogelius[1] が提案した交代方向法を採用する。この方法は,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\gamma \nabla u) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= f_B \text{ and } \gamma \frac{\partial u}{\partial n} = g_B && \text{on } \Gamma_B, \\ u &= f_E \text{ and } \gamma \frac{\partial u}{\partial n} = g_E && \text{on } \Gamma_E \end{aligned}$$

を変分法的定式化により, 汎関数

$$F(\gamma, u, \sigma) := \int_{\Omega} |\gamma^{\frac{1}{2}} \nabla u - \gamma^{-\frac{1}{2}} \sigma|^2 d\Omega$$

の最小化問題に変換することを基礎としている。ここで $\sigma \in L^2(\Omega)^2$ である。

$H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)^2$ の部分集合 S を

$$S := \{(u, \sigma) \mid u|_{\Gamma_B} = f_B, u|_{\Gamma_E} = f_E, \nabla \cdot \sigma|_{\Omega} = 0, \sigma \cdot n|_{\Gamma_B} = g_B, \sigma \cdot n|_{\Gamma_E} = g_E\}$$

と定義する。このとき $(\gamma, u, \sigma) \in L^\infty(\Omega) \times S$ に対して

$$F(\gamma, u, \sigma) = \int_{\Omega} \gamma |\nabla u|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \gamma^{-1} |\sigma|^2 d\Omega - 2 \int_{\Gamma_B} f_B g_B d\Gamma - 2 \int_{\Gamma_E} f_E g_E d\Gamma$$

となる。 γ を固定すると, 汎関数 F を最小にする関数 $(u, \sigma) \in S$ は次の2つの境界値問題の解により与えられる: 関数 u は Dirichlet 境界値問題

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\gamma \nabla u) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= u_B && \text{on } \Gamma_B, \\ u &= u_E && \text{on } \Gamma_E \end{aligned}$$

の解である。またベクトル関数 σ は Neumann 境界値問題

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\gamma \nabla v) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \gamma \frac{\partial v}{\partial n} &= g_B && \text{on } \Gamma_B, \\ \gamma \frac{\partial v}{\partial n} &= g_E && \text{on } \Gamma_E \end{aligned}$$

の解 v を用いて, $\sigma = \gamma \nabla v$ となる。また $(u, \sigma) \in S$ を固定すると, 汎関数 F を最小にする関数 $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ は

$$\gamma = \frac{|\sigma|}{|\nabla u|}$$

により与えられる [1].

Kohn and Vogelius は, 次のアルゴリズムを提案した:

交代方向法

1. 初期導電率 γ_{old} を与える。

2. γ_{old} に対して,

(a) Dirichlet 境界値問題

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\gamma_{old} \nabla u) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= f_B && \text{on } \Gamma_B, \\ u &= f_E && \text{on } \Gamma_E\end{aligned}$$

を解き, ∇u を求める.

(b) Neumann 境界値問題

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\gamma_{old} \nabla v) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \gamma_{old} \frac{\partial v}{\partial n} &= g_B && \text{on } \Gamma_B, \\ \gamma_{old} \frac{\partial v}{\partial n} &= g_E && \text{on } \Gamma_E\end{aligned}$$

を解き, ∇v を求める.

3. 導電率をアップデートする: $\gamma_{new} := \gamma_{old} \frac{|\nabla v|}{|\nabla u|}$.

4. 同定結果が十分であれば計算を終了; 不十分であれば $\gamma_{old} := \gamma_{new}$ としステップ 2 に戻る.

2.3 計算アルゴリズム

本稿では問題 (IEP) の解として, 汎関数

$$J(\omega) + \lambda F(\gamma, u(\cdot; \omega), \sigma(\omega)) \quad (1)$$

を停留にする関数 (γ, ω) を採用する. ここで λ は Lagrange の未定乗数であり, 関数 $u(\cdot; \omega)$, $\sigma(\omega)$ は

$$\begin{aligned}u(\cdot; \omega)|_{\Gamma_B} &= f_B, \quad u(\cdot; \omega)|_{\Gamma_E} = f_E, \\ \nabla \cdot \sigma(\omega)|_{\Omega} &= 0, \quad \sigma(\omega) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_B} = g_B, \quad \sigma(\omega) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_E} = \gamma \frac{\partial W}{\partial n} \Big|_{\Gamma_E}\end{aligned}$$

を満たす関数とする. このとき関数 W は境界値問題

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\gamma \nabla W) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \gamma \frac{\partial W}{\partial n} &= g_B && \text{on } \Gamma_B, \\ W &= \omega && \text{on } \Gamma_E\end{aligned}$$

の解である.

汎関数 (1) を停留にする関数を次のプロセスにより同定する: 1) 汎関数 J の最小化関数 ω を境界値同定アルゴリズムにより同定する. 2) 汎関数 F の最小化関数 γ を交代方向法により同定する. 問題 (IEP) の計算アルゴリズムとして, 次のアルゴリズムを提案する:

計算アルゴリズム

1. 初期境界値 ω_0 と初期導電率 γ_0 を与える.
2. $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

(a) 境界値問題

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\gamma_k \nabla u_k) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \gamma_k \frac{\partial u_k}{\partial n} &= g_B \quad \text{on } \Gamma_B, \\ u_k &= \omega_k \quad \text{on } \Gamma_E\end{aligned}$$

を解き、境界値 $u_k(\cdot; \omega_k)|_{\Gamma_B}$ を求める。

(b) 境界値問題

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\gamma_k \nabla v_k) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \gamma_k \frac{\partial v_k}{\partial n} &= 2\{u_k - f_B\} \quad \text{on } \Gamma_B, \\ v_k &= 0 \quad \text{on } \Gamma_E\end{aligned}$$

を解き、汎関数 J の第一変分 $J'(\omega_k) = -\gamma_k \frac{\partial v_k}{\partial n}|_{\Gamma_E}$ を求める。

(c) 境界値をアップデートする: $\omega_{k+1} = \omega_k - \alpha_k J'(\omega_k)$.(d) $\|J'(\omega_{k+1})\| < \varepsilon$ を満たせば計算を終了、満たさなければ次のステップへ進む。

(e) 境界値問題

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\gamma_k \nabla W) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \gamma_k \frac{\partial W}{\partial n} &= g_B \quad \text{on } \Gamma_B, \\ W &= \omega_{k+1} \quad \text{on } \Gamma_E\end{aligned}$$

を解き、 $\gamma_k \frac{\partial W}{\partial n}|_{\Gamma_E}$ を求める。

(f) Dirichlet 境界値問題

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\gamma_k \nabla U) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ U &= f_B \quad \text{on } \Gamma_B, \\ U &= \omega_{k+1} \quad \text{on } \Gamma_E\end{aligned}$$

を解き、 ∇U を求める。

(g) Neumann 境界値問題

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\gamma_k \nabla V) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \gamma_k \frac{\partial V}{\partial n} &= g_B \quad \text{in } \Gamma_B, \\ \gamma_k \frac{\partial V}{\partial n} &= \gamma_k \frac{\partial W}{\partial n}|_{\Gamma_E} \quad \text{on } \Gamma_E\end{aligned}$$

を解き、 ∇V を求める。

(h) 導電率をアップデートする; $\gamma_{k+1} = \gamma_k \frac{|\nabla V|}{|\nabla U|}$.

この計算アルゴリズムは、汎関数の最小化を最急降下法による反復に訴えるために、収束は遅いが安定な数値解が得られることが期待できる。

3 計算例

提案した計算アルゴリズムを使った計算例を示す。Ω を原点を中心とした半径 1 と半径 3 の同心円で囲まれた領域とする。このとき、

$$u(r, \theta) = \begin{cases} (-1.125r + \frac{5.5}{r}) \cos \theta & (1 < r < 2, 0 \leq \theta < 2\pi) \\ \frac{1}{r} \cos \theta & (2 < r < 3, 0 \leq \theta < 2\pi) \end{cases}, \quad \gamma(r) = \begin{cases} 0.5 & (1 < r < 2) \\ 5.0 & (2 < r < 3) \end{cases}$$

である問題を計算する (Fig.2)。アルゴリズム中の境界値問題は、有限要素法により計算した。使用した有限要素は、Fig.3 のとおりである (要素数:192)。有限要素法を使用するにあたり、アルゴリズムのステップ (h) を次のように改良した:

(h)' 各要素について、条件 $\alpha \leq \gamma_k \frac{|\nabla V|}{|\nabla U|} \leq \beta$ を満たせば $\gamma_{k+1} = \gamma_k \frac{|\nabla V|}{|\nabla U|}$, 満たさなければ $\gamma_{k+1} = \gamma_k$ とする。

これは近似導電率 γ_k が、元の問題の導電率の先験情報を満たすための改良である。計算結果は、Fig.4 のとおりである。

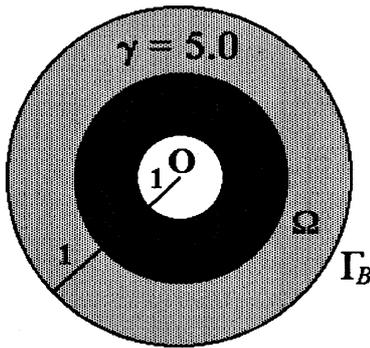


Fig.2 Example

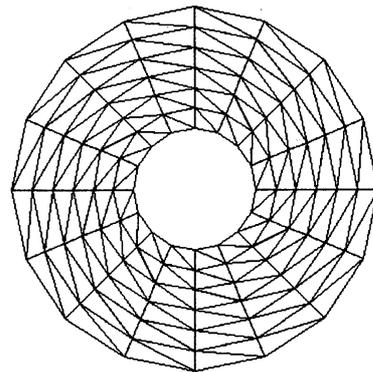


Fig.3 Finite elements

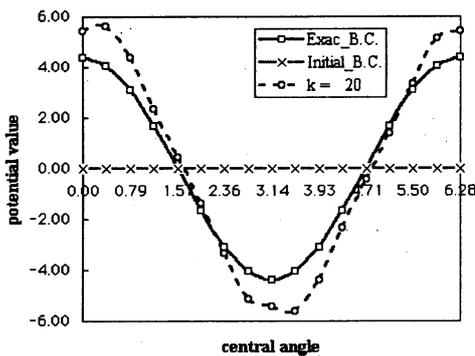


Fig.4 Calculated results

Fig.4 のグラフの縦軸は境界値 f_E , 横軸は中心角を表している。初期境界値は $\omega_0 = 0$ (一定), 初期導電率は $\gamma_0(x, y) = 1.0$ (一定) を使用した。計算の結果, 安定ではあるが同定は十分でないことがわかった。境界値の同定が不十分 (誤差 25%) である原因は, 元の問題 (IEP) が一意可解ではないことにありと考えられる。

4 まとめ

本論文では、導電率同定を伴った心電図逆問題の数値計算アルゴリズムを提案した。提案した計算アルゴリズムは、問題 (IEP) を汎関数 $J(\omega) + \lambda F(\gamma, u(\cdot; \omega), \sigma(\omega))$ (λ は Lagrange の未定乗数) の停留条件を求める問題に変換し、境界値同定アルゴリズムと交代方向法を交互に適用することにより境界値を同定する方法である。例題から、このアルゴリズムを用いて安定な数値解を得ることができると考えられる。しかし同定結果は不十分であった。問題 (IEP) は一意可解ではない。このため汎関数の最小化問題に変換するにあたって汎関数の最小値が一意であるよう設定をする必要がある。本稿における汎関数最小化問題では、この点における考慮が不十分であるため最小化関数の一意性を与えることができなかった。このことが同定結果が不十分である原因であると考えられる。今後は最小値の一意性が保証されるような条件を考える必要がある。

参考文献

- [1] R. Kohn and M. Vogelius, Relaxation of variational method for impedance computed tomography, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol.40, pp.745-777, 1987.
- [2] 村井, 加川, 心電図逆問題のための有限要素モデル, *電気通信学会論文誌*, J64-C, 1, pp.1-8, 1981.
- [3] 村井, 加川, 心電図逆問題に伴う悪条件の適切化の一手法, *電気通信学会論文誌*, J65-C, 5, pp.359-366, 1982.
- [4] K. Onishi, K. Kobayashi and Y. Ohura, Numerical solution of a boundary inverse problem for the Laplace equation, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.45, pp.257-264, 1996.
- [5] 山下, 高橋, 有限要素法を用いた心電図逆問題の新しい解法, *医用電子と生体工学*, 17-3, pp.193-199, 1979.