数理解析研究所講究録
1040 巻 1998 年 114-117

非適合有限要素法による抗力・揚力の誤差評価

九州大学 大学院数理学研究科　田端正久 (Masahisa Tabata)

1　はじめに

流れ場に置かれた物体に働く抗力・揚力を非適合有限要素法で求める．空間次元は $d(=2,3)$ 次元とし，水路を考える．x_1方向は水路の方向と一致し，x_2方向は鉛直方向とする．水路中に置かれた物体の境界をΓ_bとする．流体の存在する領域Ωの境界ΓはΓ_bとΓ_cとから成り立っており，Γ_cは，流入境界Γ_i，流出境界Γ_o，側壁Γ_wとから成り立っているものとする．Γで，流速境界条件

$$u = g$$

が課されている．Γ_b, Γ_w上では，粘着境界条件を仮定するので，そこでは，$g = 0$である．u, pを流速，圧力とする．u, pはナヴィエ・ストークス方程式

$$\rho(u\cdot\nabla)u - \mu\Delta u + \nabla p = f,$$
$$\nabla\cdot u = 0$$

を満たしている．ただし，fは外力，μ, ρはそれぞれ，粘性係数，密度である．関数空間

$$V(g) = \{v \in (H^1((\Omega))^d;\ v|_\Gamma = g\},\quad V = V(0),$$
$$Q = \{q \in L^2((\Omega);\ \int_\Omega q\ dx = 0\}$$

を用意する．(u,p) は次の変分問題：$(u,p) \in V(g)\times Q$ で

$$a(u,v) + a_1(u,u,v) + b(v,p) + b(u,q) = (f,v),\quad \forall(v,q)\in V\times Q \tag{1}$$

を求めよ，の解である．ここに，

$$a(u,v) = 2\mu\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} D_{ij}(u)D_{ij}(v)\ dx,\quad D_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}), \tag{2}$$

$$a_1(w,u,v) = \frac{\rho}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} (w_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i}v_j - w_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}u_j)\ dx,$$

$$b(v,q) = -\int_\Omega q\ \mathrm{div}v\ dx,$$

$$(f,v)=\int_\Omega f\cdot v\,dx$$

である．このとき，境界Γ_bに囲まれた物体に働く抗力D，揚力Lは

$$D=-\int_{\Gamma_b}\sum_{j=1}^d\sigma_{1j}(u,p)n_j\,d\gamma,\quad L=-\int_{\Gamma_b}\sum_{j=1}^d\sigma_{2j}(u,p)n_j\,d\gamma \tag{3}$$

で定義される．ここに，nは境界への外向き(流体からみて)単位法線ベクトルであり，σは応力テンソル

$$\sigma_{ij}(u,p)=-p\delta_{ij}+2\mu D_{ij}(u)$$

である．これらを，Gauss-Greenの定理を使って，領域積分表示に変換し[1]，誤差評価を行う．

Crouzeix-Raviart[2]の非適合一次要素を念頭に置き，次の問題を解決する．

1. (2)で定義される双一次形式aは，非適合一次要素空間(粘着境界条件を仮定)では強圧的ではない．流れ場の計算は，aを双一次形式

$$a^*(u,v)=\mu\int_\Omega\sum_{i=1}^d\mathrm{grad}u_i\cdot\mathrm{grad}v_i\,dx$$

に取り替えて行われる．そのとき，適切なD,Lの計算を行うこと．

2. a_1を風上型近似で置き換えたとき，D,Lの誤差評価を行うこと．

3. 最近，開発された双対問題技法(Larson, M. G. [3])を使って，高精度の誤差評価を行うこと．

これらの結果の詳細は，論文John-Tabata-Tobiska [4] に発表予定である．

2　抗力・揚力の領域積分表示

抗力D，揚力Lは領域積分を使って次のように表示することができる．

補題1. $w^D,w^L\in H^1(\Omega)^d$を

$$w_i^D(x)=\begin{cases}\delta_{i1} & (x\in\Gamma_b)\\ 0 & (x\in\Gamma_c)\end{cases},\quad w_i^L(x)=\begin{cases}\delta_{i2} & (x\in\Gamma_b)\\ 0 & (x\in\Gamma_c)\end{cases} \tag{4}$$

を満たす任意の関数とする．(u,p)を(1)の解とする．このとき，(3)式のD,Lは

$$D=-\{a(u,w^D)+a_1(u,u,w^D)+b(w^D,p)-(f,w^D)\}, \tag{5}$$
$$L=-\{a(u,w^L)+a_1(u,u,w^L)+b(w^L,p)-(f,w^L)\} \tag{6}$$

と表現できる．さらに，aをa^*で，a_1を

$$a_1^*(w,u,v)=\rho\,((w\cdot\nabla)u,v)$$

で置き換えても，(5), (6)は成立する．

3 抗力・揚力の誤差評価

領域Ωの正則な単体分割列を考える，hは各分割に現れる要素の最大直径とする．$V_h(g)$, V_h, Q_hを，それぞれ，$V(g)$, V, Qの非適合一次有限要素近似とする．問題(1)の有限要素近似は，$(u_h, p_h) \in V_h(g) \times Q_h$で

$$a_h^*(u_h, v_h) + a_{1h}(u_h, u_h, v_h) + b_h(v_h, p_h) + b_h(u_h, q_h) = (f, v_h), \quad \forall (v_h, q_h) \in V_h \times Q_h \quad (7)$$

を求めることである．ここに，a_h^*, a_{1h}, b_hについている添字hは非適合要素を使うので，積分を要素ごとで行いその和をとることを示している．

近似抗力D_h，近似揚力L_hを

$$D_h = -\{a_h^*(u_h, w_h^D) + a_{1h}(u_h, u_h, w_h^D) + b_h(w_h^D, p_h) - (f, w_h^D)\}, \quad (8)$$

$$L_h = -\{a_h^*(u_h, w_h^L) + a_{1h}(u_h, u_h, w_h^L) + b_h(w_h^L, p_h) - (f, w_h^L)\} \quad (9)$$

で定義する．ここに，(u_h, p_h)は(7)の解であり，w_h^D, w_h^Lは各成分が非適合一次要素空間に入り

$$w_{hi}^D(P) = \begin{cases} \delta_{i1} & (P \in \Gamma_b) \\ 0 & (P \in \Gamma_c) \end{cases}, \quad w_{hi}^L(P) = \begin{cases} \delta_{i2} & (P \in \Gamma_b) \\ 0 & (P \in \Gamma_c) \end{cases}$$

を満たす関数である．Pは節点である．次の定理が成立する．

定理1. hに依存しない正定数Mが存在し，

$$|D_h - D|, |L_h - L| \leq Mh$$

が成立する．

定理1は移流項の近似を風上型近似a_{1h}^{upw}[5]に取り替えても成立する．

4 高精度評価

領域ΩでStokes問題が正則であると仮定する．たとえば，滑らかな境界を持つ領域は正則である[6]．このとき，高精度の収束結果を得ることができる．

定理2. ある正定数μ_0

$$\mu_0 = \mu_0(||g||_{H^{1/2}(\Gamma)^d}, ||f||_{L^2(\Omega)^d})$$

が存在し，$\mu \geq \mu_0$なるμにたいして，hに依存しない正定数Mが存在し，

$$|D_h - D|, |L_h - L| \leq Mh^2$$

が成立する．

証明は，領域積分で表現された抗力，揚力の式(5),(6)に現れる関数w^D, w^Lの選択に，任意性があることを利用する．その関数を，(ϕ, r)を未知関数とする双対問題[3]

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\phi_i - \rho(u\cdot\nabla)\phi_i + \frac{\rho}{2}\left(\theta^{(i)}\cdot\phi - u_h\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial r}{\partial x_i} &= 0 \quad (i=1,\ldots,d), \\ \nabla\cdot\phi &= 0 \end{aligned}$$

の解の第一成分ϕにとる．ただし，ϕの境界条件は(4)であり，

$$\theta^{(i)} = \sum_K \frac{\partial u_h}{\partial x_i}(K)\chi_K.$$

である．χ_Kは要素Kの特性関数である．双対問題は有限要素解u_hに依存するが，ϕの$H^2(\Omega)^d$ノルムはhに依存しないことを示すことができる．

参考文献

[1] M. Tabata and K. Itakura. Precise computation of drag coefficients of a sphere. *Intern. J. Comput. Fluid Dynamics*, Vol. to appear, , 1997.

[2] M. Crouzeix and P.A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. *RAIRO Numer. Anal.*, Vol. 3, pp. 33–76, 1973.

[3] M.G. Larson. *Analysis of Adaptive Finite Element Methods.* PhD thesis, Department of Mathematics, Chalmers University of Technology, Göteborg, 1996.

[4] V. John, M. Tabata, and L. Tobiska. Error estimates for drag and lift coefficients by nonconforming finite element method, to appear.

[5] F. Schieweck and L. Tobiska. An optimal order error estimate for an upwind discretization of the Navier–Stokes equations. *Numer. Methods Partial Different. Equations*, Vol. 12, pp. 407–421, 1996.

[6] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations. Theory and Algorithms*, Vol. 5 of *Springer Series in Computational Mathematics.* Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996.