

# クライン群の幾何学的収束と 極限集合のハウスドルフ次元

松崎 克彦 (お茶の水女子大学理学部数学)

## 0 前書き

クライン群の極限集合のハウスドルフ次元は、その力学系の相空間にあらわれるフラクタル集合の複雑さを測る指標としてのおもしろさもあるが、さらにパラメーター空間のなかでクライン群を変形させたときの値の変化まで考えるとなおおもしろい。このノートは、ハウスドルフ次元の連続性の問題に関する最近の進展をまとめたものである。なお、1節から3節までは準備として、クライン群の極限集合のハウスドルフ次元についての基礎的結果を要約してある。この部分は1997年6月に行われた研究集会「ハウスドルフ次元：計算へのアプローチ」(代表：須川敏幸(京大理))の講演記録集にも収録されている。4節が本題である。クライン群論の基本的事実や用語等については、文献[MT]を参照していただきたい。

## 1 クライン群の極限集合

リーマン球面  $\hat{\mathbf{C}}$  の等角自己同相写像は一次分数変換(向きを保つメビウス変換)であり、これらの写像全体のなす群はリー群として  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})/\pm I$  と同一視される。この離散部分群をクライン群という。以下簡単のためクライン群は単位元以外に位数有限の元をもたないと仮定する。メビウス変換はもともと複素平面の円または直線に関する反転の合成として定義されるので、この作用は自然に上半空間  $H^3 = \{(x, y, t) \mid t > 0\}$  に拡張する。しかも  $H^3$  に双曲計量  $ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dt^2)/t^2$  をいれて3次元双曲空間の上半空間モデルとすると、メビウス変換は  $(H^3, ds)$  の等長変換となる。またケーリー変換により上半空間を単位球に移せば、

双曲空間の単位球モデル  $(B^3, ds)$  を得る.  $B^3$  の境界  $S^2$  が双曲空間の無限遠に位置する球面である.

クライン群  $\Gamma$  は双曲空間の等長変換群として真性不連続に作用するので, 商空間  $N_\Gamma = H^3/\Gamma$  は双曲多様体となる. また  $\hat{C} = S^2$  上にも  $\Gamma$  の作用が真性不連続となる最大の開集合  $\Omega(\Gamma)$  (不連続領域と呼ぶ) を考えると, 商空間  $\Omega(\Gamma)/\Gamma$  は複素多様体 (リーマン面) となる. 境界付き多様体  $(H^3 \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$  は内部に双曲構造, 境界に複素構造を持つものとみなし, これをクライン多様体と呼ぶ.

不連続領域  $\Omega(\Gamma)$  の  $S^2$  での補集合を極限集合と呼び,  $\Lambda(\Gamma)$  であらわす. これは次の定義と同値である.

**定義 1 (極限集合)** クライン群  $\Gamma$  が  $B^3$  に作用しているとするとき, 原点  $0 \in B^3$  の  $\Gamma$  による軌道  $\Gamma(0)$  のユークリッド距離に関する集積点集合 ( $\subset S^2$ ) を  $\Gamma$  の極限集合と定義し,  $\Lambda(\Gamma)$  であらわす.

極限集合  $\Lambda(\Gamma)$  は 3 点以上を含むときは非可算無限個の点からなる完全集合である.  $\Lambda(\Gamma)$  が 2 点以下のとき,  $\Gamma$  を初等的という. 以下このノートでは, クライン群はすべて非初等的と仮定する. 極限集合は  $\Gamma$ -不変な空でない最小の閉集合としても特徴づけられる. このとき,  $\Lambda(\Gamma)$  の双曲距離に関する凸包をとり, それを  $\Gamma$  の作用で割った  $N_\Gamma$  の部分集合を凸核と呼び,  $C_\Gamma$  であらわす.  $C_\Gamma$  は  $N_\Gamma$  への包含写像がホモトピー同値写像となるような最小の (位相的) 部分多様体である.

## 2 幾何学的指数による評価

幾何学的有限なクライン群に対しては, 極限集合  $\Lambda(\Gamma)$  のハウスドルフ次元  $\dim \Lambda(\Gamma)$  を 3 次元双曲多様体  $N_\Gamma$  の幾何学的指数で評価することができる.

**定義 2 (幾何学的有限)** クライン群  $\Gamma$  および双曲多様体  $N_\Gamma$  が幾何学的有限とは,  $\Gamma$  が有限生成かつ凸核  $C_\Gamma$  の体積が有限であることである.

Beardon-Maskit の定理 [MT, Section 3.1] より, 幾何学的有限なクライン群  $\Gamma$  に対しては,

$$\Lambda(\Gamma) = \Lambda_c(\Gamma) \cup \Lambda_p(\Gamma)$$

という分解が成り立つ. ここで  $\Lambda_c(\Gamma)$  は非接的極限集合 (conical limit set) であり,  $x \in S^2$  が非接的極限集合に属するとは,  $\Gamma(0)$  が  $B^3$  内で  $x$  を頂点にもつある錘領域の内部から  $x$  に集積するときをいう. また  $\Lambda_p(\Gamma)$  は,  $\Gamma$  に放物型元の固定点の集合で高々可算集合である (より詳しくいえば,  $\Lambda_p(\Gamma)$  の点はすべて“有界”放物型固定点になっている). 従って, 幾何学的有限なクライン群については  $\dim \Lambda(\Gamma) = \dim \Lambda_c(\Gamma)$  であり, 以下でみるように  $\dim \Lambda_c(\Gamma)$  は  $N_\Gamma$  の種々の幾何学的指数と次に定義する収束指数を通してつながってくる.

**定義 3 (収束指数)** クライン群  $\Gamma$  に対して

$$\delta(\Gamma) = \inf\{s \geq 0 \mid g_s := \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-s\rho(0, \gamma(0))) < \infty\} (\leq 2)$$

を  $\Gamma$  の収束指数という. ただし  $\rho$  は双曲距離である.  $g_s$  を  $s$  次元ポアンカレ級数と呼ぶ. 単位球モデル  $B^3$  で考えれば, 収束指数は

$$\delta(\Gamma) = \inf\{s \geq 0 \mid \sum_{\gamma \in \Gamma} (1 - |\gamma(0)|)^s < \infty\}$$

と表わすこともできる.  $\delta(\Gamma)$  次元ポアンカレ級数が発散するとき  $\Gamma$  を発散型, 収束するとき収束型という.

**定理 4 (Bishop-Jones [BJ])** 任意のクライン群  $\Gamma$  に対して

$$\dim \Lambda_c(\Gamma) = \delta(\Gamma)$$

が成り立つ.

ハウスドルフ次元の上からの評価  $\dim \Lambda_c(\Gamma) \leq \delta(\Gamma)$  は容易であるのでここで示しておく. 逆が成り立つことをクライン群一般に対して証明したのが上の定理の成果である. なおこの結果は, フックス群および幾何学的有限なクライン群に対してはすでに知られていた [N, Section 9.3].

**命題 5** クライン群  $\Gamma$  に対して  $s$  次元ポアンカレ級数が収束するならば,  $s$  次元ハウスドルフ測度  $\mathcal{H}_s$  に対して  $\Lambda_c(\Gamma)$  は零集合である.

(証明)  $\Gamma$  の非自明な元の集合を  $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$  とあらわす.  $\gamma_n(0)$  中心で双曲半径  $t$  の球が,  $0$  から見て  $S^2$  上につくる影を  $b_n(t)$  とあらわす. このとき非接的極限集合は

$$\Lambda_c(\Gamma) = \bigcup_{t>0} \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n > N} b_n(t)$$

と書ける. 従って,  $t$  を固定するごとに, 無限個の影に含まれるような点の集合が  $s$  次元ハウスドルフ測度の零集合であることを示せばよい. これは, 影  $b_n(t)$  の半径が  $1 - |\gamma_n(0)|$  と比較可能であることからわかる.

■

収束指数  $\delta(\Gamma)$  と双曲多様体  $N_\Gamma$  上の (正) ラプラシアン  $\Delta$  のスペクトルとの関係を与えた Elstrodt-Patterson-Sullivan の定理を述べる.

**定義 6 (スペクトルの底)** 一般にリーマン多様体  $N$  において,  $\Delta$  の 2 乗可積分な固有関数に対する固有値の集合の下限を  $\lambda_0(N)$  であらわし, ラプラシアンのスペクトルの底とよぶ. これは次の式で与えられる.

$$\lambda_0(N) = \inf \left\{ \frac{\int_N |\nabla f|^2}{\int_N |f|^2} \mid f \in C_0^\infty(N) \right\}$$

双曲多様体  $N_\Gamma$  のラプラシアンのスペクトルの底を特に  $\lambda_0(\Gamma)$  であらわす.

**定理 7 (Sullivan [S])** 任意のクライン群  $\Gamma$  に対して

$$\lambda_0(\Gamma) = \begin{cases} 1 & (\delta(\Gamma) \leq 1) \\ \delta(\Gamma)(2 - \delta(\Gamma)) & (\delta(\Gamma) \geq 1) \end{cases}$$

が成り立つ.

そして, ラプラシアンのスペクトルの底は次のような定数と関係がある:

**定義 8 (等周定数, 体積増大度)** クライン群  $\Gamma$  に対して

$$h(\Gamma) = \inf_W \frac{\text{Area}(\partial W)}{\text{Vol}(W)}$$

を  $N_\Gamma$  の等周定数という. ただし  $W$  は相対コンパクトな  $N_\Gamma$  の部分領域全体を動く. また

$$\mu(\Gamma) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log \text{Vol}(B(p, r))$$

を  $N_\Gamma$  の体積増大度という. ただし  $B(p, r)$  は  $p$  から距離  $r$  以内にある  $N_\Gamma$  の部分領域をあらわす.

定理 9 次の関係式がなりたつ.

1. (Cheeger)  $\lambda_0(\Gamma) \geq \frac{1}{4}h(\Gamma)^2$
2. (Buser) ある普遍定数  $C$  が存在して  $Ch(\Gamma) \geq \lambda_0(\Gamma)$
3. (Brooks)  $\text{Vol}(N_\Gamma) = \infty$  のとき  $\lambda_0(\Gamma) \leq \frac{1}{4}\mu(\Gamma)^2$

幾何学的有限な (より一般に位相的に有限な, すなわちある境界つきコンパクト多様体の内部に同相な) 双曲多様体  $N_\Gamma$  においては, 凸核  $C_\Gamma$  の体積と境界の面積の比を考えると, 等周定数の評価が与えられる. 凸核の境界  $\partial C_\Gamma$  の面積は Ahlfors の有限性定理および Bers の面積定理により  $N_\Gamma$  の位相型 (より具体的には,  $\Gamma$  の生成元の最小個数) で評価できる. よって上の Buser の結果とあわせて次がいえる.

定理 10 (Canary [C]) 位相的に有限な双曲多様体  $N_\Gamma$  に対して

$$\lambda_0(\Gamma) \leq \frac{K}{\text{Vol}(C_\Gamma)}$$

が成り立つ. ただし,  $K$  は  $N_\Gamma$  の位相型のみによる定数.

特にこの結果から,  $N_\Gamma$  が位相的に有限だが幾何学的有限でないような  $\Gamma$  について  $\dim \Lambda(\Gamma) = 2$  がわかるが, さらに次の結果は, それが位相的に有限という仮定なしでも成立することを示している.

定理 11 (Bishop-Jones [BJ]) 有限生成クライン群  $\Gamma$  が幾何学的有限でないならば  $\dim \Lambda(\Gamma) = 2$  が成り立つ.

幾何学的有限な  $\Gamma$  についてはすでに  $\dim \Lambda(\Gamma) = 2$  であるための条件は知られていた (次節参照). よって, 上の定理とあわせると, 有限生成クライン群については, 極限集合がハウスドルフ次元 2 をもつための必要十分条件が完全に与えられる.

### 3 極限集合上の測度

極限集合のハウスドルフ次元を評価するときには, 極限集合上の群作用で不変な測度の構成が有力である.

**定義 12 (不変測度)** クライン群  $\Gamma$  に対して,  $S^2$  上のボレル測度  $\mu$  が  $s$  次元  $\Gamma$ -不変測度であるとは,  $S^2$  上の任意の可測集合  $E$  と  $\gamma \in \Gamma$  に対して,

$$\mu(\gamma E) = \int_E |\gamma'|^s d\mu$$

がみたされるときをいう. ここで微分  $|\gamma'|$  は  $S^2$  上の標準的計量 (球面距離) に関するものである.

$\Gamma$ -不変確率測度が存在するような次元の範囲を考える. そのような次元の下限を  $\alpha(\Gamma)$  と書く. 測度の弱収束極限をとることにより, 下限を与える測度の存在もわかる.

$\Gamma$ -不変確率測度が存在すれば, 非接的極限集合  $\Lambda_c(\Gamma)$  上でハウスドルフ測度を上から評価できる. そのときに本質的なのが次の命題である [N, Section 4.4].

**命題 13** クライン群  $\Gamma$  に対して, 影の列  $b_n(t)$  を考える.  $s$  次元  $\Gamma$ -不変確率測度  $\mu_s$  に対して, 次をみたす正数  $A$  が存在する: 有限個の  $n$  を除き, 十分大きな  $t$  について

$$\frac{1}{A} \mu_s(b_n(t)) < r(b_n(t))^s < A \mu_s(b_n(t))$$

が成り立つ. ここで  $r(b_n(t))$  は影の半径である.

$s$  次元ハウスドルフ測度  $\mathcal{H}_s$  の非接的極限集合  $\Lambda_c(\Gamma)$  への制限を  $h_s$  であらわす. これは  $s$  次元  $\Gamma$ -不変測度になっている.

**補題 14**  $s$  次元  $\Gamma$ -不変確率測度  $\mu_s$  が存在すれば  $h_s$  は有限測度である. よって,  $\dim \Lambda_c(\Gamma) \leq s$  であるので,  $\dim \Lambda_c(\Gamma) \leq \alpha(\Gamma)$  が成り立つ.

(証明) 任意の  $\epsilon > 0$  に対して,  $\Lambda_c(\Gamma)$  を被う影の列を次のように選ぶ. 十分大きな  $t_1 > 0$  から出発して  $t_n \rightarrow \infty$  かつ  $r(b_n(t_n)) \rightarrow 0$  となるように単調増加数列  $\{t_n\}$  をとる. はじめの有限個をのぞくことにより,  $r(b_n(t_n)) < \epsilon$  としてよい.  $b_n(t_n)$  の和は  $\Lambda_c(\Gamma)$  を被っている.  $b_1(t_1)$  の次に  $b_n(t_n)$  の中心が  $b_1(t_1)$  の外にある最小の番号  $n$  をとり, それを改めて  $b_2(t_2)$  とする. 以下帰納的に,  $b_{k+1}(t_{k+1})$  の中心は  $\bigcup_{i=1}^k b_i(t_i)$  の外にあるように選び, 影の部分列  $b_i(t_i)$  をつくる.  $b_i(t_i)$  の和は依然として  $\Lambda_c(\Gamma)$  を被っている. もしそうでないとすると, 被われない点  $\xi \in \Lambda_c(\Gamma)$  が存在することになるが,  $b_n(t_n)$  の中には半径が 0 に収束しつつ  $\xi$  を含

んでいる影の列があるので、そのうちのどれかは  $b_i(t_i)$  として採用されているはずだからである。

上の構成法より、各  $b_i(t_i)$  の半径を半分にした円板は互いに交わりをもたない。

$$\sum_{i=1}^{\infty} r(b_i(t_i))^s = 2^s \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{r(b_i(t_i))}{2} \right)^s$$

と命題 13 より、左辺は  $b_i(t_i)$  の半径を半分にした円板を  $\mu_s$  で測った大きさの和の定数  $A$  倍で押さえられるが、 $\mu_s$  は有限測度なので、これは  $A\mu_s(S^2)$  で押さえられる。任意の  $\epsilon > 0$  に対して、 $\Lambda_c(\Gamma)$  を被う影の列  $b_i(t_i)$  でこの評価をもつものがとれるので、 $h_s$  は有限測度であることがわかる。 ■

一方、次の Patterson と Sullivan の結果より不等号  $\alpha(\Gamma) \leq \delta(\Gamma)$  がわかる [N, Chapter 3].

**定理 15** 任意のクライン群  $\Gamma$  に対して、収束指数  $\delta(\Gamma)$  次元の  $\Gamma$ -不変確率測度が存在する。

これを構成する方法としては、 $s > \delta(\Gamma)$  に対して、収束するポアンカレ級数  $g_s = \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-s\rho(0, \gamma(0)))$  の各項を重みとしてディラック測度  $\delta_{\gamma(0)}$  の和をとり、全測度で割って  $\overline{B^3}$  上の確率測度をつくり、 $s \downarrow \delta(\Gamma)$  のときの弱収束極限をとればよい（より正確に言えば、 $\Gamma$  が発散型のときはこれでいいが、収束型のときは  $B^3$  の内部に測度の台が残らないように、与える重みを調整する必要がある）。このように構成された  $\delta(\Gamma)$  次元の  $\Gamma$ -不変確率測度は、極限集合上に台をもっている。

**定義 16 (Patterson-Sullivan 測度)** 収束指数  $\delta(\Gamma)$  次元の  $\Gamma$ -不変確率測度で、極限集合  $\Lambda(\Gamma)$  上に台をもつものを Patterson – Sullivan 測度という。

さて、ここで定理 4 を用いると、上の 3 つの値  $\alpha, \delta, \dim \Lambda_c$  はすべて等しいことがわかる。なお、 $\alpha(\Gamma) = \delta(\Gamma)$  のみならば、定理 4 を経由しなくても直接証明できる [N, Section 4.5].

**定理 17** 任意のクライン群  $\Gamma$  に対して

$$\dim \Lambda_c(\Gamma) = \alpha(\Gamma) = \delta(\Gamma)$$

が成り立つ。

さらにこの結果を精密化して、次のことも証明できる。

**定理 18** クライン群  $\Gamma$  と  $\delta = \delta(\Gamma)$  に対して、次の 3 条件は同値である：

1.  $\delta$  次元 ポアンカレ級数  $g_\delta$  が収束する。
2.  $\delta$  次元  $\Gamma$ -不変確率測度  $\mu_\delta$  について  $\mu_\delta(\Lambda_c(\Gamma)) = 0$ 。
3.  $\delta$  次元ハウスドルフ測度  $\mathcal{H}_\delta$  について  $\mathcal{H}_\delta(\Lambda_c(\Gamma)) = 0$ 。

(方針) 条件 1 ならば条件 2 : 命題 5 と同様にして、 $\Lambda_c(\Gamma)$  を被う影の大きさを評価するが、それを  $\mu_\delta$  で測った大きさに読み替えるところは命題 13 をもちいる。条件 2 ならば条件 3 :  $\mathcal{H}_\delta(\Lambda_c(\Gamma)) > 0$  とする。 $\mathcal{H}_\delta$  の  $\Lambda_c(\Gamma)$  への制限  $h_\delta$  は、補題 14 より、正規化すれば  $\Gamma$ -不変確率測度となる。よって以下の補題 21 より、 $\Gamma$ -不変確率測度は一意的なので、 $\mu_\delta$  は定数倍をのぞいて  $h_\delta$  と一致し、特に  $\mu_\delta(\Lambda_c(\Gamma)) > 0$  がわかる。条件 3 ならば条件 1 : 定理 4 の証明を見直す。 ■

この定理の中の条件 2 に関連して、 $\mu_s(\Lambda_c(\Gamma))$  が 0 でないということは  $\Lambda_c(\Gamma)$  が  $\mu_s$  について全測度をもっているということと同値である。一般に非接的極限集合上では次のようなエルゴード性があるからである [N, Section 4.4].

**命題 19**  $A$  を  $\Lambda_c(\Gamma)$  の  $\Gamma$ -不変部分可測集合とすると、 $S^2$  上の任意の  $\Gamma$ -不変確率測度  $\mu$  について  $\mu(A) = 0$  または  $\mu(A) = 1$  が成り立つ。

$S^2$  上では一般にエルゴード性があるとは限らないが、もしあればそれは  $\Gamma$ -不変確率測度の一意性を特徴づけることができる [N, Section 4.2].

**命題 20**  $s$  次元  $\Gamma$ -不変確率測度  $\mu$  が存在すれば一意であるための必要十分条件は、 $\mu$  が次のエルゴード条件をみたすことである： $S^2$  の任意の  $\Gamma$ -不変可測集合  $A$  に対して、 $\mu(A) = 0$  または  $\mu(S^2 - A) = 0$  が成り立つ。

**補題 21**  $\Lambda_c(\Gamma)$  上正の測度をもつような  $\Gamma$ -不変確率測度は、存在すれば一意であり、その次元は  $\delta(\Gamma)$  である。

(証明) 次元が  $\delta(\Gamma)$  であることは, 定理 17 と定理 18 の証明の条件 1 ならば条件 2 と同様の議論からわかる. 命題 19 より,  $\Lambda_c(\Gamma)$  上全測度もつので, 命題 20 のエルゴード条件をみたすことがわかり, 一意性も従う. ■

一般に  $\Gamma$ -不変確率測度はアトム (point mass) をもつ場合もありうるが, 次のようなアトムは存在しない [N, Section 3.5].

**補題 22** 任意の  $s$  次元  $\Gamma$ -不変確率測度は非接的極限集合の点にアトムをもたない. また,  $\delta(\Gamma)$  次元  $\Gamma$ -不変確率測度は有界放物型固定点にアトムをもたない. さらに  $\Gamma$  が発散型るとき,  $\delta(\Gamma)$  次元  $\Gamma$ -不変確率測度はアトムをもたない.

最後に幾何学的有限なクライン群  $\Gamma$  について考える. Beardon-Maskit の定理より,  $\Lambda(\Gamma)$  は非接的極限集合と可算個の有界放物型固定点の集合からなるので, 上記の結果を組み合わせてまとめると次のようになる.

**定理 23**  $\Gamma$  を幾何学的有限なクライン群とすると,  $\Gamma$  は発散型であり,  $\delta(\Gamma)$  次元  $\Gamma$ -不変確率測度が一意的に存在する. それは Patterson-Sullivan 測度であり,  $\delta(\Gamma)$  次元ハウスドルフ測度の (非接的) 極限集合上への制限  $h_{\delta(\Gamma)}$  と定数倍をのぞいて一致する. また  $s > \delta(\Gamma)$  のときは, 極限集合上に台をもつ  $s$  次元  $\Gamma$ -不変確率測度は, 放物型固定点の集合上に台をもつアトムからなる測度である.

(証明) 定理 15 より Patterson-Sullivan 測度  $\mu$  をとる. 補題 22 より有界放物型固定点にアトムをもたないので,  $\mu$  は  $\Lambda_c(\Gamma)$  上に全測度をもつ. よって補題 21 より一意性が従う. また, 定理 18 より  $\delta(\Gamma)$  次元ポアンカレ級数は発散する.  $h_{\delta(\Gamma)}$  は補題 14 より有限測度であり, また定理 18 より正值である. よって正規化すれば  $\delta(\Gamma)$  次元  $\Gamma$ -不変確率測度となり, 一意性より  $\mu$  と一致する.

次に  $\nu$  を任意の  $s > \delta(\Gamma)$  次元  $\Gamma$ -不変確率測度とする. 補題 21 より  $\nu$  は  $\Lambda_c(\Gamma)$  上で零なので, 放物型固定点の集合上に台をもたなければならぬ. それは可算集合なので  $\nu$  はアトムからなる測度である. ■

**系 24** 幾何学的有限なクライン群  $\Gamma$  の極限集合  $\Lambda(\Gamma)$  がハウスドルフ次元 2 をもつための必要十分条件は,  $\Lambda(\Gamma) = S^2$  である.

(証明)  $\Lambda(\Gamma) \neq S^2$  のとき, 2次元ポアンカレ級数は収束する [N, Section 1.6]. 定理 23 より  $\Gamma$  は発散型なので, これは  $\delta(\Gamma) < 2$  を意味する. よって極限集合のハウスドルフ次元は 2 より小さい. ■

## 4 幾何学的収束とハウスドルフ次元の連続性

クライン群の変形による極限集合のハウスドルフ次元の変化を考える。そのためにまず、クライン群の列の収束について、いくつかの概念を定義する。

**定義 25 (代数的収束)** 一般に群  $\Gamma_0$  の  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$  表現の列  $\theta_n : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_n$  が表現  $\theta : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$  に代数的に収束するとは、任意の元  $\gamma \in \Gamma_0$  について  $\theta_n(\gamma)$  が  $\theta(\gamma)$  に収束することである。

Bishop-Jones [BJ] は、有限生成群  $\Gamma_0$  の  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$  離散表現  $\theta_n : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_n$  ( $\Gamma_n$  はクライン群) の列が  $\theta : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$  に代数的に収束するとき (このとき  $\Gamma$  もクライン群となる [MT, Section 7.1])、ハウスドルフ次元の下半連続性を証明した (以下の定理 30)。しかし、代数的収束は必ずしも対応する双曲多様体の幾何学的収束を意味しない。第 2 節でみたように、極限集合のハウスドルフ次元は双曲多様体の幾何学的性質を反映するので、ハウスドルフ次元の連続性は、次に定義するクライン群の列の幾何学的収束のもとで考えたほうが期待しやすい。

**定義 26 (幾何学的収束)**  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$  の部分群の列  $\Gamma_n$  が  $G$  に幾何学的に収束するとは、 $\Gamma_n$  が  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$  の閉部分集合の列として  $G$  にハウスドルフ収束することである。すなわち、次の 2 条件がみたされることである。

1. 任意の  $g \in G$  は  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$  ( $\gamma_n \in \Gamma_n$ ) として書ける。
2.  $g = \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_{n_i}$  ( $\gamma_{n_i} \in \Gamma_{n_i}$ ) として書ける元は  $G$  に属する。

射影  $B^3 \rightarrow N_\Gamma = B^3/\Gamma$  による原点  $0 \in B^3$  の像を  $o_\Gamma$  とする。このとき、クライン群  $\Gamma_n$  が  $G$  に幾何学的に収束するということは、双曲多様体のレベルでは、基点付きの多様体の列  $(N_{\Gamma_n}, o_{\Gamma_n})$  が  $(N_G, o_G)$  に Gromov 収束することにほかならない [MT, Section 7.1]。一般に、基点付きの多様体の列は、基点における単射半径が一様に下から押さえられているならば、Gromov 収束する部分列を選ぶことができる。従って、その条件がみたされるような仮定のもとでは、クライン群の列から幾何学的に収束する部分列を選ぶことができる。代表的な仮定としては、クライン群の列がすでに代数的に収束しているとするこことである。

**命題 27** 有限生成群  $\Gamma_0$  から (非初等的) クライン群の上への準同型  $\theta_n : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_n$  が  $\theta : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$  に代数的に収束しているならば,  $\Gamma_n$  のある部分列はある  $\Gamma$  を含むクライン群  $G$  に幾何学的に収束する.

まず, 幾何学的収束に関して, 非接的極限集合のハウスドルフ次元が下半連続性をもつことを示す.

**補題 28** クライン群の列  $\Gamma_n$  がクライン群  $G$  に幾何学的に収束するならば,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \dim \Lambda_c(\Gamma_n) \geq \dim \Lambda_c(G)$$

が成り立つ.

(証明)  $\mu_n$  を  $\Gamma_n$  に関する Patterson-Sullivan 測度とする. 部分列をとり  $\dim \Lambda_c(\Gamma_n)$  がある値  $d$  に収束するようにし, さらに部分列をとり,  $\mu_n$  が  $S^2$  上のある測度  $\mu$  に弱収束するようにできる. このとき,  $\mu$  は  $d$  次元  $G$ -不変確率測度である. 従って  $d \geq \alpha(G)$  であるが, 定理 17 より  $\alpha(G) = \dim \Lambda_c(G)$  であるので主張を得る. ■

**注意 29** この補題と定理 7 より, ラプラシアンの特値の底の幾何学的収束のもとでの上半連続性もわかる. このことは,

$$\lambda_0(G) = \inf \left\{ \frac{\int_{N_G} |\nabla f|^2}{\int_{N_G} |f|^2} \mid f \in C_0^\infty(N_G) \right\}$$

において  $\inf$  に十分近い値を与える関数  $f$  をとり,  $N_{\Gamma_n}$  から  $N_G$  への近似写像  $\varphi_n$  との合成  $f \circ \varphi_n$  を  $N_{\Gamma_n}$  上の関数として,  $\lambda_0(\Gamma_n)$  の式に適用してみてもわかる.

幾何学的極限は代数的極限を含むので, 幾何学的収束に関するハウスドルフ次元の下半連続性から代数的収束に関しての下半連続性が従う. 若干の補足的考察を加えれば, 前述の Bishop-Jones の結果が導かれる.

**定理 30**  $\Gamma_0$  を有限生成群とし, (非初等的) クライン群  $\Gamma_n$  の上への準同型  $\theta_n : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_n$  が  $\theta : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$  に代数的に収束しているならば,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \dim \Lambda(\Gamma_n) \geq \dim \Lambda(\Gamma)$$

が成り立つ.

(証明)  $\Gamma$  が幾何学的有限のときは,  $\dim \Lambda(\Gamma) = \dim \Lambda_c(\Gamma)$  である. 部分列をとれば,  $\Gamma_n$  は  $\Gamma$  を含むクライン群  $G$  に幾何学的に収束するので, 補題 28 と  $\dim \Lambda_c(G) \geq \dim \Lambda_c(\Gamma)$  より主張を得る.  $\Gamma$  が幾何学的有限でないときは, 定理 11 より  $\dim \Lambda(\Gamma) = 2$  である. 部分列をとり,  $\Gamma_n$  がすべて幾何学的有限であるか, すべて幾何学的有限でないかのどちらかと仮定してよい. 後者の場合は再び定理 11 より主張は明らか.  $\Gamma_n$  がすべて幾何学的有限である場合, さらに部分列をとり,  $\dim \Lambda(\Gamma_n)$  が収束し, かつクライン群  $G$  に幾何学的に収束しているとしてよい. もしも  $\lim \dim \Lambda(\Gamma_n) < 2$  であるとする, 定理 10 より, 凸核  $C_{\Gamma_n}$  の体積は一樣に上から押さえられていなければならない. このとき, 幾何学的極限  $G$  の凸核  $C_G$  の体積も有限であることがわかる. 従って補題 28 より  $\dim \Lambda(G) < 2$  となる. しかし, これは  $\dim \Lambda(\Gamma) = 2$  に反する. よって  $\lim \dim \Lambda(\Gamma_n) = 2$  であり, この場合も主張が成り立つことがわかる. ■

ここで, 幾何学的収束が必ずしも極限集合のハウスドルフ次元の収束を意味しない簡単な例をあげる.

**例 31** (非初等的) クライン群  $\Gamma_0$  の指数有限の部分群の列

$$\Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \cdots$$

で幾何学的に  $\{1\}$  に収束するものをとる (たとえば, 原点での単射半径が  $\infty$  に増大するようにすればよい). このとき,  $\dim \Lambda(\Gamma_n) = \dim \Lambda(\Gamma_0) > 0$  であるが,  $\dim \Lambda(\{1\}) = 0$  である.

この例では,  $\Lambda(\Gamma_n) = \Lambda(\Gamma_0)$  が  $\Lambda(\{1\}) = \emptyset$  にハウスドルフ収束すらしていない. ハウスドルフ次元の収束をみるためには, 極限集合がハウスドルフ収束している状況に制限するほうが可能性が高い. 極限集合がハウスドルフ収束するための十分条件として Kerckhoff-Thurston による次の結果がある [MT, Section 7.3].

**命題 32** クライン群の列  $\Gamma_n$  が (非初等的) クライン群  $G$  に幾何学的に収束し, 凸核  $C_{\Gamma_n}$  において単射半径が ( $n$  によらず) 一樣に上から押さえられているならば,  $\Lambda(\Gamma_n)$  は  $\Lambda(G)$  にハウスドルフ収束する.

$\Gamma_n$  に関する Patterson-Sullivan 測度の弱収束極限を  $\mu$  とし,  $\mu$  が  $G$  に関する Patterson-Sullivan 測度になっていることが判定できれば, 収束指数  $\delta(\Gamma_n)$  が  $\delta(G)$  に収束することがわかり, 若干の考察で極限集合

のハウスドルフ次元の収束もわかる.  $\Lambda(\Gamma_n)$  が  $\Lambda(G)$  にハウスドルフ収束しているとする,  $\mu$  は  $\Lambda(G)$  上に台をもつ  $G$ -不変確率測度である. 従って, たとえば  $G$  が放物型元を含まない幾何学的有限なクライン群とすると, 定理 23 より  $\mu$  は Patterson-Sullivan 測度以外ありえず, ハウスドルフ次元の収束がいえる.

**定理 33** クライン群の列  $\Gamma_n$  が (非初等的で) 放物型元を含まない有限生成クライン群  $G$  に幾何学的に収束しているならば,  $\lim \dim \Lambda(\Gamma_n) = \dim \Lambda(G)$  である.

なお, この定理の主張では, 幾何学的極限  $G$  が幾何学的有限であることを仮定していないが, これは次の補題にあるように,  $G$  が有限生成であるが幾何学的有限でない場合には, 自動的にハウスドルフ次元の収束がいえるからである. 従って, この問題に関しては以下の議論でも, 幾何学的極限が幾何学的有限である場合が本質的である.

**補題 34** クライン群の列  $\Gamma_n$  が有限生成であるが幾何学的有限でないクライン群  $G$  に幾何学的に収束しているならば,  $\lim \dim \Lambda(\Gamma_n) = \dim \Lambda(G) = 2$  である.

(証明) 幾何学的極限が有限生成のとき, 十分大きな  $n$  に対して (上へのとは限らない) 準同型写像  $\psi_n : G \rightarrow \Gamma_n$  で, 恒等写像  $\text{id} : G \rightarrow G$  に代数的に収束するものがとれる [MT, Section 7.1].  $\psi_n(G) = \Gamma'_n$  とおくと, 定理 30 より  $\liminf \dim \Lambda(\Gamma'_n) \geq \dim \Lambda(G)$  であるが,  $\dim \Lambda(\Gamma_n) \geq \dim \Lambda(\Gamma'_n)$  と  $\dim \Lambda(G) = 2$  より等式を得る. ■

幾何学的極限  $G$  が放物型元を含む場合, 極限集合がハウスドルフ収束しても, ハウスドルフ次元が収束するとは限らない.  $\Gamma_n$  に関する Patterson-Sullivan 測度  $\mu_n$  の弱極限  $\mu$  が放物型固定点上のアトムからなる測度になる場合があり, そのときは,  $\delta(G)$  は  $\mu$  の次元より小さくなる [M]. 多様体レベルでいえば, Gromov 収束するとき, カスプになってちぎれて “主要部” が捨てられる場合に起こる. 新しくできたカスプに対応する放物型固定点上に, 消えた “主要部” にあった測度が集中して残ることになる.

そこで, 幾何学的極限で多様体がちぎれることがないようにするための条件として, 次の強収束を定義する.

**定義 35 (強収束)** クライン群の列  $\Gamma_n$  が  $G$  に強収束するとは、 $\Gamma_n$  が  $G$  に幾何学的に収束し、かつ、十分大きな  $n$  に対して、上への準同型  $\psi_n : G \rightarrow \Gamma_n$  で  $\text{id} : G \rightarrow G$  に代数的に収束するものが存在することをいう。

**注意 36** この定義は McMullen [M] による。通常強収束は、有限生成群の忠実な離散表現の代数的収束が同時に幾何学的収束にもなっていることで定義するが、上の定義は明らかにこの定義を含んでいる。さらに、代数的極限と幾何学的極限が異なっている場合でも、幾何学的極限が有限生成クライン群であることを仮定すれば、これも上の定義の意味で強収束になっている。実際、有限生成幾何学的極限からの（上へのとは限らない）準同型で恒等写像に収束するものは常に存在するが（補題 34 の証明）、代数的にも収束していたとすると、上への準同型でそのようなものが存在する [MT, Section 7.1].

強収束し、極限が幾何学有限であるとき、極限集合の列もハウスドルフ収束していることがわかる [JM]（上のような定義のもとでは [M] で主張されている）。しかし、それでもまだハウスドルフ次元が収束しない例が、McMullen [M] によって挙げられている。

強収束のもとでの双曲多様体のスペクトルの底の収束に関しては、McMullen と独立に、より幾何学的な証明による次のような結果がある。

**定理 37 (Canary-Taylor [CT])** クライン群の列  $\Gamma_n$  が  $G$  に強収束し、かつ  $N_G$  が位相的に有限であるとする、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_0(\Gamma_n) = \lambda_0(G)$$

が成り立つ。

スペクトルの底が収束するのに、ハウスドルフ次元が収束するとは限らないのは、両者の関係（定理 7）において、収束指数が 1 以下のときは、スペクトルの底は 1 で一定であるからである。実際、McMullen による反例はこの 1 を境にして起きている。彼による強収束のもとでのハウスドルフ次元の収束に関する定理の主張は以下のとおりである。なお、もとの論文では  $G$  が幾何学的有限と仮定してあるが、補題 34 より有限生成としてもいいので、そのようなかたちしておく。

定理 38 (McMullen [M]) クライン群の列  $\Gamma_n$  が (非初等的) 有限生成  
 クライン群  $G$  で  $\dim \Lambda(G) \geq 1$  をみたすものに強収束しているならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \dim \Lambda(\Gamma_n) = \dim \Lambda(G)$$

が成り立つ.

## 参考文献

- [BJ] C. Bishop and P. Jones, *Hausdorff dimension and Kleinian groups*, Acta Math., to appear.
- [C] R. Canary, *On the Laplacian and the geometry of hyperbolic 3-manifolds*, J. Diff. Geom. 36 (1992), 349–367.
- [C] R. Canary and E. Taylor, *Hausdorff dimension and limits of Kleinian groups*, preprint.
- [JM] T. Jørgensen and A. Marden, *Algebraic and geometric convergence of Kleinian groups*, Math. Scand. 66 (1990), 47–72.
- [MT] K. Matsuzaki and M. Taniguchi, *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*, Oxford Univ. Press, to appear.
- [M] C. McMullen, *Hausdorff dimension and conformal dynamics I: Strong convergence of Kleinian groups*, preprint.
- [N] P. Nicholls, *The ergodic theory of discrete groups*, LMS Lecture Note Series 143, Cambridge Univ. Press, 1989.
- [S] D. Sullivan, *Related aspects of positivity in Riemannian geometry*, J. Diff. Geom. 25 (1987), 327–351.