数理解析研究所講究録
1044 巻 1998 年 76-85

GAUGE-THEORETIC EQUATIONS FOR SYMMETRIC SPACES AND COMPLEX LAGRANGIAN SUBMANIFOLDS IN A HYPERKÄHLER MODULI SPACE

大仁田　義裕　(YOSHIHIRO OHNITA)

東京都立大学大学院　理学研究科数学教室

序

最近、グラスマン幾何学のプロジェクトが、内藤博夫氏（山口大学)、間下克哉氏(東京農工大)、田崎博之氏（筑波大)、橋本英哉氏（日本工大）らを中心に組織的に進められつつある (cf. [Na1], [Na2], [Na3]).

微分可能多様体 N の各接ベクトル空間の k 次元部分空間全体をファイバーとするグラスマン束を、$Gr_k(TN)$ とする. 今、$Gr_k(TN)$ の部分集合 Σ が与えられたとする. N 内にはめ込まれた部分多様体 M が、各 $x \in M$ に対して $T_x(M) \in \Sigma$ が満たす時、M を Σ-部分多様体と呼ぶ. グラスマン幾何学における一連の基本的問題として、次の問題を考えるのは自然である.

(1) Σ-部分多様体の性質
(2) Σ-部分多様体の存在・一意性・構成
(3) Σ-部分多様体の変形・モジュライ空間およびその上の幾何構造

Σ-部分多様体の性質としては、いつ Σ-部分多様体は極小部分多様体になるか?がまず問題になる. 一般に、リーマン多様体内の極小部分多様体は、2階の非線型偏微分方程式によって定義される。グラスマン幾何の観点から、複素部分多様体、calibrated 部分多様体 ([HL]) のような1階の非線型偏微分方程式によって定義される極小部分多様体は、興味ありかつ重要な対象の一つのクラスを成す. 例えば、リーマン多様体のホロノミー群がすべて分類されている現在、各リーマン多様体のホロノミー不変な calibrations から定まる calibrated 部分多様体をすべて分類・決定することは、この理論の中核となるべき一つの問題である.

[La1], [La2],[Br],[CS], [Me] [Ma], [Hi7] などは、これに関係した最近の優れた仕事である. ユークリッド空間内の1階の非線型偏微分方程式によって定義された極小部分多様体は、[La1], [La2] において扱われた. [Ma] では、コンパクト calibrated 部分多様体の変形とモジュライの理論が議論されている. 特に、ホロノミー群が $SU(n)$ に含まれているリーマン多様体の special Lagrangian 部分多様体, ホロノミー群が G_2 に含まれている7次元リーマン多様体 (see [Jo1],[Jo2]) の associative 部分多様体と coassociative 部分多様体、ホロノミー群が $Spin(7)$ に含まれている8次元リーマン多様体 (see [Jo3]) の Cayley 部分多様体を扱った. [Hi7] では、Hitchin は、コンパクト special Lagrangian 部分多様体のモジュライ空間は、Lagrangian 部分多様体の局所構造を持つことを示した. 複素接触多様体内の Legendre 複素部分多様体は、複素部分多様体のさらに特殊なものであるが、一つのΣ-部分多様体と考えることがで

[Br], [CS], [Me] では、複素接触多様体内の Legendre 複素部分多様体のモジュライ空間上の torsion-free アファイン接続の構成が研究された.

ホロノミー群が $Sp(n)$ に含まれているリーマン多様体は、*hyperkähler* 多様体と呼ばれる. そのようなリーマン多様体は、Ricci flat になり、Levi-Civita 接続に関して平行な 3 個の複素構造 J_1, J_2, J_3 で四元数関係を満たすものを持つケーラー多様体として特徴付けられる.

ケーラー多様体 (N, ω, J) 内にはめ込まれた部分多様体 $f : M \longrightarrow N$ は、各 $x \in M$に対して, $J_{f(x)}((df)_x T_x M) \subset (df)_x T_x M$ となる時、複素部分多様体 (*complex submanifold*) と呼ばれる. そのとき、それ自身ケーラー多様体になる. ケーラー多様体 (N, ω, J) 内にはめ込まれた部分多様体 $f : M \longrightarrow N$ は、各 $x \in M$に対して, $J_{f(x)}(T_{f(x)}M)$ が Nのリーマン計量に関して接ベクトル空間 $T_x M$に直交する時、または同値な条件で、ω の Mへの引き戻しがゼロになる時、全実部分多様体 (*totally real submanifold*) と呼ばれる. シンプレクティク多様体 (N, ω) 内にはめ込まれたω の Mへの引き戻しがゼロになる部分多様体 M で $2 \dim M = \dim N$ になるものは、*Lagrangian* 部分多様体と呼ばれる. ホロノミー群が $SU(n)$ に含まれているリーマン多様体 N の Lagrangian 部分多様体 M が N 上の平行な正則 n-形式 $\alpha + \sqrt{-1}\beta$ の実部 α によって calibrate されるならば、*special Lagrangian* 部分多様体と呼ばれる (see [HL]). これらの概念は、はめ込まれた非特異な部分多様体でなくても、各点の接ベクトル空間が定義されるような空間とその微分写像が定義されるようなはめ込みに対しても自然に拡張される. 本稿では、そのような拡張された意味の部分多様体に対しても、複素部分多様体・全実部分多様体・ special Lagrangian 部分多様体などの用語を使う.

Hitchin [Hi1] は、コンパクト・リーマン面 M 上のコンパクト・リー群 G を構造群に持つ主束 P における共形不変なゲージ理論的方程式、いわゆる自己双対性方程式, を研究した. そして、その解のモジュライ空間が、hyperkähler quotient として得られること、従って、そのモジュライ空間の smooth part が hyperkähler 多様体になることを示した.

この講演では、hyperkähler モジュライ空間内のある極小部分多様体の系列の構成を与えたい. ここで得られる極小部分多様体は、J_1 に関して複素部分多様体、J_2 および J_3 に関してそのモジュライ空間の次元の半分の次元を持つ全実部分多様体、特に、それは、special Lagrangian 部分多様体になる. そのような special Lagrangian 部分多様体は、hyperkähler 多様体の複素 Lagrangian 部分多様体 (*complex Lagrangian submanifold*) と呼ばれている (see [Hi5]). さらに、それは、全測地的部分多様体になることが示される. 各コンパクト対称対 (G, K, σ) に対して、主束 P の構造群 G のコンパクト部分群 K への reduction を一つ与えた時、その構成は、[MO] において定義されたあるゲージ理論的方程式の解のモジュライ空間とそのモジュライ空間の Hitchin の hyperkähler モジュライ空間への自然な写像を使ってなされる.

1. Hitchin の Self-Duality 方程式

M をコンパクト・リーマン面とする。G をリー代数 $\mathfrak{g}$ を持つコンパクト・リー群とする. P をコンパクト・リーマン面 M 上の構造群 G を持つ主束とする. $\mathcal{A}_P$ を主束 P のすべての C^∞-接続のアファイン空間とする. $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ を随伴束 $\mathfrak{g}_P$ に値を持つ M 上のすべての一次微分形式からなるベクトル空間とする. P の接続 A と随伴束 $\mathfrak{g}_P$ に値を持つ M 上の一次微分形式 ϕ (Higgs 場) に対する共形不変な次のゲー

ジ理論的方程式を考える.

$$(*)^G \qquad \begin{cases} F(A) - \frac{1}{2}[\phi \wedge \phi] = 0, \\ d_A\phi = d_A * \phi = 0, \end{cases}$$

ここで、$F(A)$ は、接続 A の曲率形式を表わす. $\widetilde{\mathcal{M}}(M,G,P)$ は、$(*)^G$に対するすべての C^∞-解の空間を表わす. P のゲージ変換群 $\mathcal{G}_P$ の $\mathcal{A}_P \times \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ の上への作用による (A,ϕ) のゲージ同値類を $[A,\phi]$ によって表わす. $\mathcal{M}(M,G,P) = \widetilde{\mathcal{M}}(M,G,P)/\mathcal{G}_P$ を $(*)^G$ に対する解のすべてのゲージ同値類からなるモジュライ空間とする. モジュライ空間 $\mathcal{M}(M,G,P)$ に L^2-内積によって誘導されたリーマン計量を備えておく. $[A,\phi] \in \mathcal{A}_P \times \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ は、

$$\Gamma_{(A,\phi)} := \{g \in \mathcal{G}_P \mid g^*(A,\phi) = (A,\phi)\} = \{e\}$$

なる時、正則 (*regular*) であるという.

$$\mathcal{M}^*(M,G,P) = \{[A,\phi] \in \mathcal{M}(M,G,P) \mid [A,\phi] \text{ は正則 } \}$$

とおく. このとき、$\mathcal{M}^*(M,G,P)$ は、非特異な多様体になる ([Hi2], [MO]). もし M のジーナス p が 1 より大きいならば、$\mathcal{M}(M,G,P)$ の実次元は $4\dim G(p-1)$ になることが知られている ([H2], [H3]).

ここで、モジュライ空間 $\mathcal{M}(M,G,P)$ 上の hyperkähler 構造の Hitchin の構成を復習する[Hi2]. アファイン空間 $\mathcal{A}_P$ およびベクトル空間 $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ は、各 $\psi \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ に対して

$$J(\psi) = - * \psi \tag{1.1}$$

で定義された複素構造を持つ、ここで、$*$ は、リーマン面 M のスター作用素を表わす. $\mathcal{A}_P$ および $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ 上のケーラー形式、従って シンプレクティク形式は、

$$\omega(\psi_1,\psi_2) = \langle J(\psi_1),\psi_2\rangle_{L^2}. \tag{1.2}$$

によって定義される. シンプレクティク多様体 $(\mathcal{A}_P,\omega)$ 上の群作用 $\mathcal{G}_P$ に対するモーメント写像は、

$$\mu(A) = *F(A) \cong F(A). \tag{1.3}$$

で定義された写像

$$\mu : \mathcal{A}_P \longrightarrow \Omega^0(\mathfrak{g}_P) \cong \Omega^2(\mathfrak{g}_P),$$

である. シンプレクティク多様体 $(\Omega^1(\mathfrak{g}_P),\omega)$ 上の群作用 $\mathcal{G}_P$に対するモーメント写像は、

$$\mu(\phi) = \frac{1}{2}[\phi \wedge \phi]. \tag{1.4}$$

によって定義された写像

$$\mu : \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Omega^0(\mathfrak{g}_P) \cong \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$$

である. $\mathcal{A}_P \times \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ 上の3個のシンプレクティク形式$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を、各 $(\psi_1, \phi_1), (\psi_2, \phi_2) \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \oplus \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ に対して、

$$\begin{aligned} \omega_1((\psi_1, \phi_1), (\psi_2, \phi_2)) &= -\langle *\psi_1, \psi_2 \rangle_{L^2} + \langle *\phi_1, \phi_2 \rangle_{L^2}, \\ \omega_2((\psi_1, \phi_1), (\psi_2, \phi_2)) &= -\langle \psi_1, \phi_2 \rangle_{L^2} + \langle \phi_1, \psi_2 \rangle_{L^2}, \\ \omega_3((\psi_1, \phi_1), (\psi_2, \phi_2)) &= \langle \phi_1, *\psi_2 \rangle_{L^2} - \langle \phi_2, *\psi_1 \rangle_{L^2}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

と定める.

各 ω_1, ω_2 and ω_3 に関する $\mathcal{A}_P \times \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ 上への $\mathcal{G}_P$ の群作用に対するモーメント写像は、それぞれ

$$\begin{aligned} \mu_1(A, \phi) &= F(A) - \frac{1}{2}[\phi \wedge \phi], \\ \mu_2(A, \phi) &= d_A * \phi, \\ \mu_3(A, \phi) &= d_A \phi, \end{aligned} \tag{1.6}$$

となる. 解空間$\widetilde{\mathcal{M}}$ は、

$$\widetilde{\mathcal{M}}(M, G, P) = \bigcap_{i=1}^{3} \mu_i^{-1}(0) \tag{1.7}$$

として表わされる. そのモジュライ空間は、

$$\mathcal{M}(M, G, P) = \widetilde{\mathcal{M}}(M, G, P)/\mathcal{G}_P = \bigcap_{i=1}^{3} \mu_i^{-1}(0)/\mathcal{G}_P \tag{1.8}$$

によって与えられる. $\mathcal{A}_P \times \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ 上に L^2-リーマン計量が、

$$g((\psi_1, \phi_1), (\psi_2, \phi_2)) = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{L^2} + \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{L^2} \tag{1.9}$$

により定められる. $\mathcal{A}_P \times \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ 上に3個の複素構造を、

$$\begin{aligned} J_1(\psi_1, \phi_1) &= (- * \psi_1, *\phi_1), \\ J_2(\psi_1, \phi_1) &= (\phi_1, -\psi_1), \\ J_3(\psi_1, \phi_1) &= (- * \phi_1, - * \psi_1) \end{aligned} \tag{1.10}$$

により定める. そのとき、

$$\begin{aligned} \omega_1((\psi_1, \phi_1), (\psi_2, \phi_2)) &= g(J_1(\psi_1, \phi_1), (\psi_2, \phi_2)), \\ \omega_2((\psi_1, \phi_1), (\psi_2, \phi_2)) &= g(J_2(\psi_1, \phi_1), (\psi_2, \phi_2)), \\ \omega_3((\psi_1, \phi_1), (\psi_2, \phi_2)) &= g(J_3(\psi_1, \phi_1), (\psi_2, \phi_2)) \end{aligned} \tag{1.11}$$

が成り立つ. これらにより、$\mathcal{A}_P \times \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ 上には無限次元の hyperkähler 空間の構造が定まる. そこで、hyperkähler quotient ([HKLR], [H2]) の方法によって、

$$\mathcal{M}(M, G, P) = \widetilde{\mathcal{M}}(M, G, P)/\mathcal{G}_P = \bigcap_{i=1}^{3} \mu_i^{-1}(0)/\mathcal{G}_P$$

に hyperkähler 構造を与えることができる．

ここで、この hyperkähler 空間の複素 Lagrangian 部分多様体の例を一つ見ておく．

$p_1, \cdots, p_k$ を $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 上の不変多項式の成す環の基底とする．多項式 p_i の次数を d_i で表わす．Hitchin 写像

$$p \;:\; \mathcal{M}(M,G,P) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{k} H^0(M; K_M^{\otimes d_i})$$

は、$p([A,\phi]) = (p_1(\phi'), \cdots, p_k(\phi'))$ によって定義された．ここで、K_M はリーマン面 M の標準直線束、また ϕ' は ϕ の (1,0)-成分を表わす．この写像が、代数的な完全積分可能な Hamilton 系を与えることは重要な事実である ([Hi3])．このことより、generic な $a \in H^0(M; K_M^{\otimes d_i})$ に対して、$p^{-1}(c)$ は $\mathcal{M}(M,G,P)$ のコンパクトな複素 Lagrangian トーラス部分多様体になることがわかる．われわれは、これらとは異なる複素 Lagrangian 部分多様体の族をこれから与えたい．

2. コンパクト対称空間に対するゲージ理論的方程式

[M-O] では、ゲージ理論的方程式 $(*)^G$ を一般化して, 各コンパクト対称空間 G/K に対してあるゲージ理論的方程式を導入した．そして、そのモジュライ空間の構造を議論した．今、(G,K,σ) をコンパクト対称対とする．あるいは、より一般に、直交対称リー代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ に付随したコンパクト・リー群 G とそのコンパクト部分群 K の対を (G,K) とする．Q を構造群 K を持つ M上の主束とする．$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ をリー代数 $\mathfrak{g}$ の対称対 G/K に関する標準分解とする．M 上の付随したベクトル束 を次のように定める:

$$\mathfrak{k}_Q := Q \times_K \mathfrak{k},\ \mathfrak{m}_Q := Q \times_K \mathfrak{m},\ \mathfrak{g}_Q := Q \times_K \mathfrak{g}$$

ここで、$\mathfrak{g}_Q = \mathfrak{k}_Q \oplus \mathfrak{m}_Q$ が成り立つ．ベクトル束として、$\mathfrak{g}_Q \cong \mathfrak{g}_P$ が成り立つ．$\mathcal{A}_Q$ を Q におけるすべての C^∞-接続の空間とする．各 $i = 0,1,2$ に対して, $\Omega^i(\mathfrak{k}_Q)$ および $\Omega^i(\mathfrak{m}_Q)$ は、それぞれ M 上の $\mathfrak{k}_Q$ および $\mathfrak{m}_Q$ に値を持つすべての C^∞- 1 次微分形式全体のベクトル空間とする．空間 $\mathcal{A}_Q$ は、$\Omega^1(\mathfrak{k}_Q)$ を付随ベクトル空間に持つアファイン空間である．

$(A,\phi) \in \mathcal{A}_Q \times \Omega^1(\mathfrak{m}_Q)$ に関するゲージ理論的方程式

$$(*)^{G/K} \qquad \begin{cases} F(A) - \frac{1}{2}[\phi \wedge \phi] = 0, \\ d_A\phi = d_A * \phi = 0 \end{cases}$$

を考える．

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} &\widetilde{\mathcal{M}}(M, G/K, Q) \\ &= \{(A,\phi) \in \mathcal{A}_Q \times \Omega^1(\mathfrak{m}_Q) \mid (A,\phi) \text{ は } (*)^{G/K} \text{ の } C^\infty\text{-解 } \} \end{aligned}$$

とおく．構造群 K の主束 Q のゲージ変換の群を $\mathcal{K}_Q$ で表わす．$\mathcal{A}_Q \times \Omega^1(\mathfrak{m}_Q)$ 上への $\mathcal{K}_Q$ の右群作用は、

$$k^*(A,\phi) = (k^*A, \mathrm{Ad}(k)^{-1}\phi)$$

によって定義される. $(*)^{G/K}$ の C^∞-解のすべてのゲージ同値類から成るモジュライ空間は、

$$\mathcal{M}(M, G/K, Q) = \widetilde{\mathcal{M}}(M, G/K, Q)/\mathcal{K}_Q \tag{2.2}$$

によって定義される. もし、接続 A のホロノミー代数が構造群 K のリー代数 $\mathfrak{k}$ に等しい時、接続 $A \in \mathcal{A}_Q$ は、既約 (*irreducible*) であると呼ぶ. また、$[A, \phi] \in \mathcal{A}_Q \times \Omega^1(\mathfrak{m}_Q)$ は、

$$\Gamma_{(A,\phi)} := \{k \in \mathcal{K}_Q \mid k^*(A, \phi) = (A, \phi)\} = \{e\}$$

となる時、正則 (*regular*) であるという.

$$\mathcal{M}^*(M, G/K, Q) = \{[A, \phi] \in \mathcal{M}(M, G/K, Q) \mid [A, \phi] \text{ は正則 }\},$$

$$\mathcal{M}(M, G/K, Q)^{irr} = \{[A, \phi] \in \mathcal{M}(M, G/K, Q) \mid [A, \phi] \text{ は既約 }\}$$

および

$$\mathcal{M}^*(M, G/K, Q)^{irr} = \mathcal{M}^*(M, G/K, Q) \cap \mathcal{M}(M, G/K, Q)^{irr}$$

とおく. このとき、$\mathcal{M}^*(M, G/K, Q)^{irr}$ は、非特異な多様体である ([MO]).

注意. [MO], [Oh] では、$(*)^{G/K}$ と類似のゲージ理論的方程式

$$(*)^{G/K}_+ \qquad \begin{cases} F(A) + \frac{1}{2}[\phi \wedge \phi] = 0, \\ d_A\phi = d_A * \phi = 0 \end{cases}$$

も扱われている. このゲージ理論的方程式は、コンパクト対称空間 G/K への調和写像の方程式から来るものである.

3. モジュライ空間の間のはめ込み

(G, K, σ) をコンパクト対称対とする. あるいは、より一般に直交対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \sigma)$ に付随したコンパクト・リー群 G とそのコンパクト部分群 K の対としてもよい.

G のコンパクト部分群 K を構造群に持つ P の部分束 Q は、縮小された部分束 (*reduced subbundle*) と呼ばれる. 「構造群 G の部分群 K への縮小がどれだけあるか？」に関しては、次の事実がよく知られている.

$$\begin{aligned} &\{Q \mid \text{reduced subbundles of } P \text{ to the structure group } K\} \\ &\cong C^\infty(M; P \times_G (G/K)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで、$P \times_G (G/K)$ は、コンパクト対称空間 G/K 上への群 G の自然な左群作用に関して主束 P に付随したファイバー束である.

M上の任意の構造群 K の主束 Q は、構造群 G のある主束 P の Kへの縮小として得られることに注意する. 実際、主束 Q の構造群 K は、左からリー群 G に作用するから、群 K の G への左作用に付随した構造群 G を持つ M 上の主束 $P = Q \times_K G$ を定義することができる. このとき、構造群 K のその主束 Q は、縮小された部分束として、構造群 G の主束 P に埋め込むことができる. もし、Q が P の K への縮

小された部分束ならば、このとき、 P は、構造群 G の主束として標準的に $Q\times_K G$ に同型である.

もし、Q が主束 P の K への縮小ならば, 自然な埋め込み

$$\mathcal{A}_Q \longrightarrow \mathcal{A}_P \tag{3.2}$$

および

$$\Omega^1(\mathfrak{m}_Q) \longrightarrow \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \tag{3.3}$$

がある. $k\in\mathcal{K}_Q$ は、$P\cong Q\times_K G$ のゲージ変換に拡張するから, 単射準同型

$$\mathcal{K}_Q \longrightarrow \mathcal{G}_P$$

が得られる. これらの埋め込みは、解空間たちの間の埋め込みを誘導する:

$$\tilde{j}_Q : \widetilde{\mathcal{M}}(M,G/K,Q) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}(M,G,P). \tag{3.4}$$

これらは、$\mathcal{K}_Q$ および $\mathcal{G}_P$ の作用の下で同変である. 従って、各コンパクト対称対 (G,K,σ) および各 $Q\in C^\infty(M;P\times_G(G/K))$ に対して、これらモジュライ空間の間の写像

$$j_Q : \mathcal{M}(M,G/K,Q) \longrightarrow \mathcal{M}(M,G,P) \tag{3.5}$$

が得られる. j_Q は、必ずしも単射ではないことに注意すべきである. けれども、次を示すことができる.

$N_G(\mathfrak{k})=\{a\in G\mid Ad(a)\mathfrak{k}=\mathfrak{k}\}$ を G における $\mathfrak{k}$ の正規化群とする. このとき、$N_G(\mathfrak{k})$ は , リー代数 $\mathfrak{k}$ を持ち、そして、 $N_G(\mathfrak{k})/K$ は有限である. 対 $(G,N_G(\mathfrak{k}))$ もまた、$(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ に付随した対である.

命題 3.1 ([Oh]). $N_G(\mathfrak{k})=K$ と仮定する. このとき、 写像

$$j_Q : \mathcal{M}(M,G/K,Q)^{irr} \longrightarrow \mathcal{M}(M,G,P)$$

は、単射である.

命題 3.2 ([Oh]). $N_G(\mathfrak{k})=K$ と仮定する. このとき、

$$j_Q(\mathcal{M}^*(M,G/K,Q)^{irr}) \subset \mathcal{M}^*(M,G,P)$$

が成り立つ. よって、j_Q は、$\mathcal{M}^*(M,G/K,Q)^{irr}$ の $\mathcal{M}^*(M,G,P)$ 中への埋め込みを誘導する.

注意. ゲージ変換群 $\mathcal{G}_P$ は、Q を $g(Q)$ に移すことによって $C^\infty(M;P\times_G(G/K))$ に作用する. このとき、$j_{g(Q)}\circ g=j_Q$ が成り立つ.

4. 結果

定理 4.1 ([Oh]). G をリー代数 $\mathfrak{g}$ を持つコンパクト・リー群、P をコンパクト・リーマン面 M 上の構造群 G の主束とする．任意の直交対称リー代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ に付随した対 (G,K) と主束 P の K への任意の縮小 $Q\in C^\infty(M;P\times_G(G/K))/\mathcal{G}_P$ に対して、

(1) $\mathcal{M}(M,G/K,Q)$ は、J_1 に関して $\mathcal{M}(M,G,P)$ の複素部分多様体である．
(2) $\mathcal{M}(M,G/K,Q)$ は、 J_2 と J_3 に関して $\mathcal{M}(M,G,P)$ の全実部分多様体である．
(3) $2\dim\mathcal{M}(M,G/K,Q)=\dim\mathcal{M}(M,G,P)$.

特に, 各 $\mathcal{M}(M,G/K,Q)$ は、*hyperkähler* 空間 $\mathcal{M}(M,G,P)$ の複素 *Lagrangian* 部分多様体 である．

定理 4.2 ([Oh]). G をコンパクト・リー群、P をコンパクト・リーマン面 M 上の構造群 G の主束とする．任意の直交対称リー代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ に付随した対 (G,K) と主束 P の K への任意の縮小 $Q\in C^\infty(M;P\times_G(G/K))/\mathcal{G}_P$ に対して、写像

$$j_Q:\mathcal{M}(M,G/K,Q)\longrightarrow\mathcal{M}(M,G,P)$$

は、全測地的である．

5. k-対称空間に対するゲージ理論的方程式

(G,K,σ) は、コンパクト k-対称対であると仮定する．ここで、σ は、位数 $k>2$ の G の自己同型である．

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}=\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}_k}\mathfrak{g}_i^{\mathbf{C}}$$

を 複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ の σ の固有空間への直和分解とする．$[\mathfrak{g}_i^{\mathbf{C}},\mathfrak{g}_j^{\mathbf{C}}]\subset\mathfrak{g}_{i+j}^{\mathbf{C}}$ に注意する．

$$\mathfrak{k}^{\mathbf{C}}=\mathfrak{g}_0^{\mathbf{C}},\qquad \mathfrak{m}^{\mathbf{C}}=\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}_k\setminus\{0\}}\mathfrak{g}_i^{\mathbf{C}}$$

なるような直和分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ がある．

M 上の構造群 K を持つ主束を Q とする．このとき、付随したベクトル束を

$$\mathfrak{g}_Q=\mathfrak{k}_Q\oplus\mathfrak{m}_Q,\quad \mathfrak{g}_Q^{\mathbf{C}}=\mathfrak{k}_Q^{\mathbf{C}}\oplus\mathfrak{m}_Q^{\mathbf{C}}$$

および

$$\mathfrak{k}_Q^{\mathbf{C}}=(\mathfrak{g}_0^{\mathbf{C}})_Q,\quad (\mathfrak{m}^{\mathbf{C}})_Q=\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}_k\setminus\{0\}}(\mathfrak{g}_i^{\mathbf{C}})_Q$$

とする．

さて、$(A,\phi')\in\mathcal{A}_Q\times\Omega^{1,0}((\mathfrak{g}_1^{\mathbf{C}})_Q)$ に対するゲージ理論的方程式

$$(*)^{G/K}\qquad \begin{cases} F(A)-\frac{1}{2}[\phi\wedge\phi]_{\mathfrak{k}}=0, \\ d_A\phi=0 \end{cases}$$

を考える. ここで、$\phi = \phi' + \overline{\phi'}$ とおく. $(\cdot)_{\mathfrak{k}}$ は、直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ に関する $(\cdot)$ の $\mathfrak{k}$-成分を表わす.

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathcal{M}}(M, G/K, Q)\\ =&\{(A, \phi') \in \mathcal{A}_Q \times \Omega^{1,0}((\mathfrak{g}_1^{\mathbf{C}})_Q) \mid (A, \phi) \text{ is a solution to } (*)^{G/K}\}\end{aligned}$$

とおく.

$(*)^{G/K}$ に対する解のモジュライ空間は、

$$\mathcal{M}(M, G/K, Q) = \widetilde{\mathcal{M}}(M, G/K, Q)/\mathcal{K}_Q$$

によって定義される.

定理 5.1 ([Oh]). G をコンパクト・リー群、P をコンパクト・リーマン面 M 上の構造群 G の主束とする. このとき、同一の G を持つ各 コンパクト $k(>2)$-対称対 (G, K, σ) と 各 $Q \in C^\infty(M; P \times_G (G/K))/\mathcal{G}_P$ に対して,

(1) $\mathcal{M}(M, G/K, Q)$ は、J_1 に関して $\mathcal{M}(M, G, P)$ の複素部分多様体である.
(2) $\mathcal{M}(M, G/K, Q)$ は、J_2 と J_3 に関して $\mathcal{M}(M, G, P)$ の全実部分多様体である. 特に, $\mathcal{M}(M, G/K, Q)$ は、$\mathcal{M}(M, G, P)$ の極小部分多様体である.

問い. この場合、$2 \dim \mathcal{M}(M, G/K, Q) < \dim \mathcal{M}(M, G, P)$ か?、上の部分多様体は全測地的か?あるいはそうでないか?

補遺. 本研究集会における筆者の講演の後、伊藤光弘教授 (筑波大) より筆者へ興味ある文献 [KS1], [KS2], [It] の教示があった.

References

[Br] R. L. Bryant, *Two exotic holonomies in dimension four, path geometries, and twistor theory*, Proc. Symp. Pure. Math. **53** (1991), 33–88.

[CS] Q. S. Chi and L. J. Schwachhöfer, *Exotic holonomy of moduli spaces of rational curves*, preprint.

[HL] R. Harvey and H.B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math. **148** (1982), 47–157.

[Hi1] N. J. Hitchin, *Monopoles, Minimal surfaces and Algebraic Curves*, vol. 105, Les Presses de l'Universitré de Montréal, Montréal, Canada, 1987.

[Hi2] N. J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surfaces*, Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987), 59–126.

[Hi3] N. J. Hitchin, *Stable bundles and integrable systems*, Duke Math. J. **54** (1987), 91–114.

[Hi4] N. J. Hitchin, *The geometry and topology of moduli spaces*, Global Geometry and Mathematical Physics, Lecture Notes in Math., vol. **1451**, Springer-Verlag, 1990, pp. 1–48.

[Hi5] N. J. Hitchin, *Harmonic maps from a 2-torus to the 3-sphere*, J. Differential Geom. **31** (1990), 627–710.

[Hi6] N. J. Hitchin, *Integrable systems in Riemannian geometry*, preprint, 1997.

[Hi7] N. J. Hitchin, *The moduli space of special Lagrangian submanifolds*, preprint, 1997.

[HKLR] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström and M. Roček, *Hyperkähler metrics and supersymmetry*, Commun. Math. Phys. **108** (1987), 535–589.

[It] M. Itoh, *Automorphisms and conjugate connections*, Hokkaido Math. J. **26** (1997), 141–155.

[Jo1] D. D. Joyce, *Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2. I*, J. Differential Geom. **43** (1996), 291–328.

[Jo2] D. D. Joyce, *Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2. II*, J. Differential Geom. **43** (1996), 329–375.

[Jo3] D. D. Joyce, *Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy $Spin(7)$*, Invent. math. **123** (1996), 507–552.

[KS1] S. Kobayashi and E. Shinozaki, *Conjugate connections in principal bundles*, Geometry and Topology of Submanifolds, VII, (in honor of K. Nomizu), edited by F. Dillen, M. Magid, U. Simon, I. Van de Woestijne, L. Verstraelen, World Scientific Publ., 1995, pp. 143–148.

[KS2] S. Kobayashi and E. Shinozaki, *Conjugate connections and moduli spaces of connections*, Tokyo J. Math. **20** (1997), 67–72.

[La1] J. M. Landsberg, *Minimal submanifolds of $\mathbf{E}^N$ arising from degenerate $SO(3)$ orbits on the Grassmannian*, Trans. Amer. Math. Soc. **325** (1991), 101–118.

[La2] J. M. Landsberg, *Minimal submanifolds defined by first-order systems of PDE*, J. Differential Geom. **36** (1992), 369–415.

[Mc] R. C. McLean, *Deformations of calibrated submanifolds*, preprint.

[Me] S. A. Merkulov, *Existence and geometry of Legendre moduli spaces*, Math. Z. **226** (1997), 211–265.

[Mu] M. Mukai, *The moduli spaces of solutions to the gauge theoretic equations for harmonic maps*, preprint.

[MO] M. Mukai and Y. Ohnita, *Gauge theoretic equations for harmonic maps into symmetric spaces*, to appear in the Proceedings of the 3rd Pacific Rim Geometry Conference held in Korea, 1996.

[Na1] H. Naitoh, グラスマン幾何の現状について, 幾何学研究集会（世話人　大前田定広）1997.9.20-21、島根大学総合理工学部、講演予稿集.

[Na2] H. Naitoh, *Grassmann geometries on compact symmetric spaces*, to appear in the Proceedings of the 3rd Pacific Rim Geometry Conference held in Korea, 1996.

[Na3] H. Naitoh, *Grassmann geometries on compact symmetric spaces of general type*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[Oh] Y. Ohnita, *Gauge-theoretic equations for symmetric spaces and certain minimal submanifolds in moduli spaces*, preprint, 1997.

MINAMI-OHSAWA 1-1, HACHIOJI, TOKYO 192-03, JAPAN
E-mail address: ohnita@comp.metro-u.ac.jp