数理解析研究所講究録
1049 巻 1998 年 39-46

無限遠で有界な非定数有理型関数をもつ Riemann 面

北海道大学大学院理学研究科　林　実樹廣

Mikihiro HAYASHI, Hokkaido University

§1 序. 任意の (連結) Riemann 面上で，有界な正則関数全体を $H^\infty(R)$, コンパクト集合の外で有界な有理型関数の全体を $M^\infty(R)$ で表す.

ここでは，$M^\infty(R)$ が非定数関数を含む Riemann 面 R の分類問題を考える．$H^\infty(R)$ が非定数関数を含む Riemann 面の特徴付けはより興味のある問題だが，未解決である．従って，$M^\infty(R)$ が非定数関数を含む Riemann 面の特徴付けも不可能な訳であるが，$H^\infty(R) \neq \mathbf{C}$ なる Riemann 面のクラスを用いることで，$M^\infty(R) \neq \mathbf{C}$ を満たす Riemann 面の分類を行うことは可能ではないか？このことに着目して得られた，次の結果があるのでここに紹介する.

定理 1. R を Riemann 面とし，$M^\infty(R)$ が弱点分離とすると，以下のどちらかである.

(1) $H^\infty(R) \neq \mathbf{C}$;

(2) R は閉 Riemann 面の部分領域に等角同値で，かつ $H^\infty(R) = \mathbf{C}$.

Riemann 面内の閉集合 E が **AB-negligible** とはすべての座標近傍 U について，$U \setminus E$ 上の有界正則関数が U 全体に正則に拡張できることであり，これは，$U \cap E$ が analytic capacity 零と同値である．また，閉 Riemann

面の部分領域 R については，$H^{\infty}(R)=\mathbf{C}$ は R の補集合が AB-negligible と同値である (cf. [6])．無限種数の一般の Riemann 面については，これは正しくない．

二つの開 Riemann 面が**同じ理想境界をもつ**とは，一点コンパクト化の無限遠点が等角同値な近傍をもつことである．Riemann 面 に関するある性質が**理想境界の性質**であるとは，同じ理想境界をもつ Riemann 面については，同時にこの性質をもったり，もたなかったりするような性質のことである．性質 $H^{\infty}(R)\neq\mathbf{C}$ が理想境界の性質でないことはよく知られている ([1])．

この観点から，次の系は意味あることと思われる．

系 1. $M^{\infty}(R)$ が弱点分離な Riemann 面の範疇で考えると性質 $H^{\infty}(R)\neq\mathbf{C}$ は理想境界の性質である．

§2 定理 1 の証明. R を Riemann 面とし，$M^{\infty}(R)$ は弱点分離でかつ $H^{\infty}(R)=\mathbf{C}$ とする． このとき， R が閉 Riemann 面の部分領域に等角同値となることを示せばよい．

定理の証明の鍵となるの次の補題である．

補題. $f,g\in M^{\infty}(R)$ とすると，2変数非定数多項式 P があって，$P(f,g)=0$.

証明 fに極がなければ，$f\in H^{\infty}(R)$． 仮定 $H^{\infty}(R)=\mathbf{C}$ により，$f=c$(constant)． 従って，求める多項式として $P(z,w)=c-z$ を考えれば

よい．よって，f と g がともに極をもつとして示せばよい．ある自然数 M があって，f と g の極はどれも高々 M としてよい．$f^{-1}(\infty)\bigcup g^{-1}(\infty)=\{a_1,\dots,a_L\}$ とおく．自然数 N に対して，$f^j g^k$ $(1\le j,k\le N)$ の形の関数で張られる有限次元線形空間を $\mathcal{L}_N$ で表す．各極 a_j を中心とする座標近傍を固定して，関数 $h\in\mathcal{L}_N$ を Laurent 展開し，その主要部のすべての係数を考えることで，$\mathcal{L}_N$ から $\mathbf{C}^{2MNL}$ への線形写像がえられる．$2MNL$ 次元の内，L は各 $h\in\mathcal{L}_N$ が高々 L 個の点 $\{a_1,\dots,a_L\}$ でしか極をとらないこと，そして，$2MN$ はそれらの極の位数が高々 $2MN$ であることによる．さて，$f^j g^k\in\mathcal{L}_N$ の形の関数は N^2 個あることから，N を十分大きく取れば，自明でない線形結合 $F=\sum_{1\le j,k\le N}c_{jk}f^j g^k$ で，この線形写像の核に属するものが存在する．これは，F は極をもたないことを意味し，関数 F は R 上の有界正則となるので定数でなくてはならない．従って，求める多項式は $P(z,w)=c-\sum_{1\le j,k\le N}c_{jk}z^j w^k$ で与えられる．　□

定理 1 の証明　$f\in M^\infty(R)$ を nonconstant とすると，f は少なくとも一つの極をもっている．f を R から Riemann 球 $\hat{\mathbf{C}}$ への解析写像とみる．f の極は有限個であるから，それらすべてを含む相対コンパクトな開集合 V をとると，f は $R\setminus V$ で有界である．そこで，十分大きな正数 r をとれば，$V_r:=\{p\in R:|f(p)|>r\}\subset V$ とできる．必要なら，r を更に大きくして，f は V_r を Riemann 球面上の開円板$\Delta_r:=\{z:r<|z|\le\infty\}$ の上に N 葉に写像しているとしてよい．このとき，

$$(*)\qquad f(V_r)\cap f(R\setminus V_r)=\emptyset$$

が成り立つことに注意する．ここで，$|\mu| > r$ とすると，$1/(f-\mu) \in M^\infty(R)$ となるので，f を $1/(f-\mu)$ で置き換えることで，f の極はすべて simple としてよい．その後改めて r を大きいもので置き換えることで，V_r の連結成分は N 個で，f はその各連結成分を Δ_r の上に一対一に写像しているようにできる．更に，$M^\infty(R)$ が弱点分離であることを使えば，必要なら μ を 少しだけ変えることにより，f の極を分離するような関数 $g \in M^\infty(R)$ を見つけることができる．補題により非定数多項式 $P(z,w)$ があって，R 上で $P(f,g)=0$. ここで，P は既約としてよい．１次元解析集合

$$W := \{(z,w) \in \hat{\mathbf{C}}^2 : P(z,w) = 0\}$$

は有限個の特異点を除けば，閉 Riemann 面 $\hat{W}$ と同一視でき，R から W への写像 $\varphi(p) := (f(p), g(p))$ から，解析写像 $\hat{\varphi} : R \to \hat{W}$ が定義できる．作り方から，写像 $\hat{\varphi}$ は V_r 上で単葉になっている．

以下、証明の続きは、二つの方法で示しておく．最初のは Gamelin により簡略化された証明で，論文 [4] に述べたものである．二番目の証明は著者が初めてこの結果を得たときのアイデアに基づいている．

（証明の続き：１）写像 $\hat{\varphi}$ が R 全体で単葉になっていることを示せばよい．$M^\infty(R)$ から任意の元 h をとる．再度，補題により，規約多項式 $Q(z,t)$ があって，R 上で $Q(f,h)=0$ とできる．同様にして，

$$T := \{(z,w,t) \in \hat{\mathbf{C}}^3 : P(z,w) = Q(z,t) = 0\}$$

とおくと，T は１次元解析集合であるから，有限個の特異点を除けば閉

Riemann 面 $\hat{T}$ と同一視され，R から T への写像 $\psi(p) := (f(p), g(p), h(p))$ から，解析写像 $\hat{\psi} : R \to \hat{W}$ が定義できる．更に，射影 $\pi : (z, w, t) \mapsto (z, w)$ を使うと，$\hat{T}$ から $\hat{W}$ への解析写像 $\hat{\pi}$ が induce される．このとき，$f = z \circ \hat{\varphi} = z \circ \pi \circ \hat{\psi}$ が成り立つ．仮定より $H^\infty(\hat{\varphi}(R)) = H^\infty(\hat{\psi}(R)) = \mathbf{C}$ でなくてはならないので，$\hat{\varphi}(R), \hat{\psi}(R)$ はそれぞれ $\hat{W}, \hat{T}$ で dense である．従って，$(z \circ \hat{\varphi})^{-1}(\Delta_r)$ の各連結成分は $\hat{\varphi}(R)$ と交わるので，(*) に注意して，

$$\hat{\varphi}(V_r) = (z \circ \hat{\varphi})^{-1}(\Delta_r)$$

となる．同様にして，

$$\hat{\psi}(V_r) = (z \circ \pi \circ \hat{\psi})^{-1}(\Delta_r).$$

ここで，$\hat{\varphi}$ が V_r 上で単射であり，$\hat{\varphi} = \pi \circ \hat{\psi}$ より，π も $(z \circ \pi)^{-1}(\{z : r < |z| \leq \infty\})$ 上で単射となる．しかも，$\hat{T}$ と $\hat{W}$ はともに閉 Riemann 面であるから，$\hat{\pi}$ は W 上の（分岐点をもつ）有限葉の被覆写像となっているので，単葉でなくてはならず，π は全単射になる．従って，$\hat{T}$ 上の関数 t は z, w の有理関数で表されるので，h も f, g の有理関数で表される．よって，２つの関数 f と g だけで R が弱点分離する．以上により，$\hat{\varphi}$ は R 上で単射となる． []

（証明の続き：2）fの極の一つを a とする．Riemann-Roch の定理により，$\hat{\varphi}(a)$ にのみ極をもつ$\hat{W}$ 上の有理関数 u がある．$f_1 = u \circ \hat{\varphi}$ は $M^\infty(R)$ の元で，点 a にのみ極をもつ．$M^\infty(R, a)$ で a にのみ極をもつ $M^\infty(R)$ の元全体からなる集合とする．h を $M^\infty(R)$ の nonconstant な任意の元とす

る．h の a 以外の極を $b_1, \ldots, b_k$ とおく．$f_1 - f_1(b_j)$ $(j = 1, \ldots, k)$ の適当な巾を h に掛けることで，$M^\infty(R,a)$ の元がえられる．従って，$M^\infty(R)$ の任意の元 h は $M^\infty(R,a)$ の元の商で表される．特に，$M^\infty(R,a)$ は R を弱点分離する．さて，点 a の近傍 U を V_r に含まれるようにとる．今度は，h を $M^\infty(R,a)$ の **nonconstant** な任意の元とする．証明 1 のように，写像 $\psi(p) = (f(p), g(p), h(p))$ から，閉 Riemann 面 $\hat{T}$ と解析写像 $\hat{\psi} : R \to \hat{T}$ が定まる．第 3 座標関数 t は $\hat{T}$ 上の有理関数である．像 $\hat{\psi}(R)$ は $\hat{T}$ で dense, 関数 $h = t \circ \hat{\psi}$ が $R \setminus U$ で有界，更に，$\hat{\psi}(U) \cap \hat{\psi}(R \setminus U) = \emptyset$ であるから，有理関数 t の極は $\hat{\psi}(a)$ のみでもつ．従って，

$$\sup_{p \in R \setminus U} |h(p)| \leq \sup_{p \in \partial U} |h(p)|$$

が成り立つ．Bishop-Royden の理論から，algebra $M^\infty(R,a)$ に関する $R \setminus U$ の Royden's resolution は ∂U を境界とする境界付き有限 Riemann 面 R_0 になる．よって，$M^\infty(R,a)$ は閉 Riemann 面 $\tilde{R} = R_0 \cup U$ 上の弱点分離な algebra となり，この閉 Riemann 面が $M^\infty(R,a)$ に関する R の Royden's resolution になる．$M^\infty(R)$ の元は $M^\infty(R,a)$ の元の商であるから，$M^\infty(R)$ に関する R の Royden's resolution も，$\tilde{R}$ に一致する．$M^\infty(R)$ は R の点を弱点分離しているので，R は $\tilde{R}$ の部分領域と見なされる．　[]

§3 Further gerenalizations.　$M^\infty(R) \neq \mathbf{C}$ で，$M^\infty(R)$ が必ずしも弱点分離と限らない場合を考える．このとき，つぎの性質をもつ三つ組 $(\tilde{R}, \Phi, \mathcal{M})$ がある:

(a) $\mathcal{M} \circ \Phi = M^\infty(R)$;

(b) $\mathcal{M}$ は $\tilde{R}$ 上弱点分離;

(c) $\tilde{R}$ は $\mathcal{M}$-極大; より正確には，$\tilde{R}$ を真部分領域として含むような Riemann 面 R' があれば，$\mathcal{M}$ の中の関数で R' 上有理型に拡張できないものが存在する.

Riemann 面 $\tilde{R}$ を R の環 $M^\infty(R)$ に関する **Royden の resolution** という ([5]). 定理 1 から次が従う.

定理 2. $M^\infty(R) \neq \mathbf{C}$ とする. $\tilde{R}$ を R の $M^\infty(R)$ に関する Royden の resolution とすると，$H^\infty(\tilde{R}) \neq \mathbf{C}$ となるか，または，$\tilde{R}$ が閉 Riemann 面である. 更に，$M^\infty(R) \subset M^\infty(\tilde{R}) \circ \Phi$.

更なる一般化として，R のあるコンパクト集合 K をとれば，$M^\infty(R \setminus K)$ が弱点分離となる場合を問題にする. このとき，$M^\infty(R)$ が点分離となることが期待されるが，期待に反して，その答えは否定的である. 実際，[3] で構成した例を少し修正することで，次のような例が作れる ([4]).

例. Riemann 面 R で，あるコンパクト集合 K に対し $H^\infty(R \setminus K)$ が点分離となるが，$H^\infty(R) = M^\infty(R) = \mathbf{C}$ となるものが存在する.

この例と 系 1 に関連することとして，次の予想を挙げておく.

予想. Riemann 面 R 上に，あるコンパクト集合 K と開集合 U があって，$M^\infty(U)$ は弱点分離で $R = K \cup U$ かつ $\partial K \subset \mathcal{P}(U)$ となるものがあれば，$M^\infty(R)$ は弱点分離である.

ここで，$\mathcal{P}(U)$ は $M^\infty(U)$ に含まれる関数の極となるような点の全体を表す．集合 $\mathcal{P}(U)$ は **pole set** と呼ばれ，バナッハ環 $H^\infty(R)$ の極大イデアル空間に同相に埋め込まれるなど，様々な良い性質がある（[2], [3]).

追記：ここで述べた定理は 10 年程前に得ていたもので，87 年 12 月に関数環の研究会で発表させて頂いた記録が残っているが論文としては未発表であった．今回機会があって本節でふれた例を補って [4] の形にまとめたので，本研究集会で改めて発表させて頂いた．

References

1. L. Ahlfors, *Remarks on the classification of open Riemann surfaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. No.87, (1951), *8*pp.
2. T.W. Gamelin and M. Hayashi, *The algebra of the bounded analytic funtions on a Riemann surface*, J. Reine Angew. Math. **382** (1987), *49–73*.
3. M. Hayashi, *The maximal ideal space of the bounded analytic funtions on a Riemann surface*, J. Math. Soc. Japan **39** (1987), *337–344*.
4. M. Hayashi, *Classifiction of Riemann surfaces with a nonconstant meromorphic function bounded at infinity*, preprint (to appear).
5. H. L. Royden, *Algebras of bounded anallytic functions on Riemann surfaces*, Acta Math. **114**, (1965), *113–142*.
6. L. Sario and M. Nakai, *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, New York·Heidelberg·Berllin 1970.