

### リーマン面のアーベル微分と多角形

大場 清 (お茶の水女子大学理学部)、橋本義武 (大阪市立大学理学部)

Kiyoshi Ohba

Yoshitake Hashimoto

#### §1. 序

リーマン面は1次元複素多様体のことであるからガウス平面上の領域を貼り合わせて構成されるが、特に平行移動のみを使って領域の貼り合わせを行う場合、ガウス平面の標準的な座標  $z$  の微分  $dz$  が平行移動で保存されることから、出来上がったリーマン面上には自然にひとつのアーベル微分、すなわち meromorphic 1-form が構成される。もちろん、領域ではなくガウス平面上の多角形たちを、平行だが境界としての向きが逆な辺どうしを平行移動で貼り合わせせた場合も同様である。また逆に、リーマン面にアーベル微分を任意に与えれば、リーマン面に適当な切れ込みを入れてから、各連結成分に適当に基点を決めてそのアーベル微分を積分することにより、リーマン面をガウス平面上の多角形たちに分解することができる。

ここで、“リーマン面に適当な切れ込みを入れる”にあたって、余分な切れ込みは入れるべきではない。例えば、[H-O]にある Igata construction は無駄な切れ込みがないが故に局所的にモジュライを表すことが出来たのである。

リーマン面上に描かれるべき切れ込みとは、そのリーマン面に埋め込まれたグラフ (1次元複体) であるが、それは、リーマン面から取り除くと与えられたアーベル微分の積分が1価関数になるような有限グラフである。したがって、各1-単体に向きと適切な複素係数を与えることにより、そのアーベル微分が表すコホモロジー類のポアンカレ双対類を表すサイクルとなる。以下、記号を用意して少し詳しく見てみよう。

$R$  を閉じた連結なリーマン面、 $\omega$  を  $R$  の上のアーベル微分とする。 $\Gamma$  を  $R$  上の有限グラフで、 $\omega$  の周期写像：

$$\int \omega : H_1(R \setminus \Gamma; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$$

が自明な写像になるものとする。(このような有限グラフ  $\Gamma$  は必ず存在する。例えば、少なくとも、 $H_1(R \setminus \Gamma; \mathbb{Z}) = 0$  となるような  $\Gamma$  を考えれば良い。) また、 $\Gamma$  は切れ込みを想定しているのので、自由な0-単体はないとし、 $\Gamma$  上の  $\omega$  の極・零点は必要なら細分をとって0-単体とする。

さらにいくつかの記号を用意する。 $\omega^{-1}(\infty)$  で  $\omega$  の極の集合、 $Res(\omega)$  で  $\omega$  の極のうち留数が消えていないものの集合、 $\omega^{-1}(0)$  で  $\omega$  の零点の集合、そして  $\overline{R \setminus \Gamma}$  で  $R \setminus \Gamma$  をフチ付き多様体としてコンパクト化したものを表すことにする。

アーベル微分  $\omega$  は、周期写像によりコホモロジーの元  $[\omega] \in H^1(R \setminus \text{Res}(\omega); \mathbb{C}) = \text{Hom}(H_1(R \setminus \text{Res}(\omega); \mathbb{C}), \mathbb{C})$  を定める。

$\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$  を  $\Gamma$  を構成する 1-単体に適当に向きを与えたものの集合とし、各 1-単体  $\sigma_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) に対する係数  $c_i$  を次のように定義する。

$\partial \overline{R \setminus \Gamma}$  において  $\sigma_i$  に対応する 2 つの有向 1-単体を  $\sigma_i^+, \sigma_i^-$  とする。(向きは  $\sigma_i$  から誘導される向きとし、 $\sigma_i^+$  の向きは  $\partial \overline{R \setminus \Gamma}$  の境界としての向きと一致し、 $\sigma_i^-$  の向きは境界の向きと反対であるとする。)  $\overline{R \setminus \Gamma} = R_1 \sqcup R_2 \sqcup \dots \sqcup R_l$  と連結成分に分解して、各成分に極でない基点  $x_j \in R_j$  を任意に固定して、写像

$$\begin{aligned} \Phi: \overline{R \setminus \Gamma} &\rightarrow \mathbb{C}P_1 \\ x &\mapsto \int_{x_j}^x \omega \quad (x \in R_j) \end{aligned}$$

を考えると、ある複素数  $c_i$  が一意に存在し、 $x^+ \in \sigma_i^+, x^- \in \sigma_i^-$  が  $\sigma_i$  の同じ点に対応するならば、

$$\Phi(x^+) + c_i = \Phi(x^-)$$

となる。この複素数  $c_i$  を単体  $\sigma_i$  の係数とする。

このとき、1-チェイン  $c_1\sigma_1 + \dots + c_k\sigma_k$  が  $[\omega]$  のポアンカレ双対類  $pd([\omega]) \in H_1(R, \text{Res}(\omega); \mathbb{C})$  を表すサイクル、すなわち、任意の元  $\alpha \in H_1(R \setminus \text{Res}(\omega); \mathbb{C})$  に対して、

$$[\omega](\alpha) = \int_{\alpha} \omega = [c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + \dots + c_k\sigma_k] \cdot \alpha$$

となることを見るのは容易い。(ここで、“ $\cdot$ ” は交点数を表す。)

以上より、我々が求めるべきものは  $pd([\omega])$  を表す無駄のないサイクルということになる。

次の定理はある切り込みの存在定理である。(詳しくは [H-O] を見られたい。)

**定理 [H-0].**  $R$  を任意のリーマン面、 $p$  を  $R$  の点、 $\Lambda$  を  $R$  のラグランジアン格子とし、 $\omega_{p,\Lambda}$  を  $p, \Lambda$  から自然に決まる  $R$  のアーベル微分とする。するとこのとき、 $R$  に埋め込まれた有限グラフ  $\Gamma \subset R \setminus \{p\}$  が存在して、 $R \setminus \Gamma = R_1 \sqcup \dots \sqcup R_k$  と連結成分に分解したとき、各連結成分に対して、基点  $x_i \in R_i$  と適当な複素数  $c_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) を選ぶと、積分による写像

$$\begin{aligned} \Phi: R \setminus \Gamma &\rightarrow \mathbb{C}P_1 \\ x &\mapsto \int_{x_i}^x \omega_{p,\Lambda} + c_i \quad (x \in R_i) \end{aligned}$$

が *well-defined* で単射であり、 $\Phi(R \setminus \Gamma) = \mathbb{C}P_1 \setminus \{\text{有限個の線分}\}$  となる。

これは、すべての1点付きリーマン面がガウス平面  $\mathbb{C}$  から線分による切断と平行移動による貼り合わせで実現できることを示しているが、無駄のない切れ込みを考えているとはいえない。

“無駄のない”という意味を、[H-O], [N] から考えてみると、(1) 各1-単体は conical singularity をもつ計量  $|\omega|$  に対して測地線 ( $\omega$ -linear 単体と呼ぼう) となること、(2) 各0-単体は  $\omega^{-1}(0) \cup \text{Res}(\omega)$  に含まれること、(3)  $R \setminus \Gamma$  が連結であることの3つがまず要求される。今回我々は、任意のリーマン面  $R$  とその上の任意のアーベル微分  $\omega$  に対して  $H_1(R, \text{Res}(\omega); \mathbb{C})$  の任意のホモロジー類が (1), (2), (3) を満たす埋め込まれた有限グラフで表されることを示した。特に、 $pd([\omega])$  が上の条件を満たす埋め込まれた有限グラフで表されることを示すことが出来た。(ただし、第1種アーベル微分をもつ楕円曲線、すなわち正則1形式をもつ楕円曲線は  $\text{Res}(\omega) \cup \omega^{-1}(0)$  が空集合となるので、例外である。) すなわち、次の定理を得た。

**主定理** .  $\text{Res}(\omega) \cup \omega^{-1}(0) \neq \emptyset$  とする。  $H_1(R, \text{Res}(\omega); \mathbb{C})$ ,  $H_1(R; \mathbb{C})$ ,  $H_1(R \setminus \omega^{-1}(\infty); \mathbb{C})$  の任意の元  $c$  に対し、次の条件をみたす1-単体たち  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  が存在し、 $c$  は  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  の  $\mathbb{C}$  上線形結合で代表される。

- (1) 各単体は  $\omega$ -linear 単体である。
- (2) 各単体は  $\omega^{-1}(0) \cup \text{Res}(\omega)$  に端点を持ち、端点以外では自分自身とも他の単体とも交わらない。
- (3)  $R \setminus \bigcup_{i=1}^k |\sigma_i|$  は連結である。(ここで、 $|\sigma_i|$  は  $\sigma_i$  の台を表す。)

このようなサイクルでの表し方は一意ではない。したがって、さらに何がしかの条件をつけて無駄のない表し方を特定しなければならないが、それは次回への課題である。

また、この定理の証明の方法をみると、留数の消えている各極に対し、極の周りを一周するサイクルをこのように表そうとした場合、初めに極の周りに小さくループを取るところから始めれば、定理の条件を満たし、そのサイクルの  $\omega$  の積分による像がガウス平面上の ( $n$  位の極に対しては  $n-1$  重の) 凸多角形になる、という条件のもと、サイクルが一意に定まる。特に、リーマン面に1点にのみ2位の極を持ち他に極のないアーベル微分を与えることにより、リーマン面に自然に平面上の凸多角形が対応する。すなわち、次の系を得る。

**系** .  $\mathcal{MA}^1$ ,  $\mathcal{MC}^1$  をそれぞれ、1点にのみ2位の極を持ち他に極のないアーベル微分付きのリーマン面のモジュライ空間、1点付きラグランジアン格子付きリーマン面のモジュライ空間とし、 $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{SP}$  をそれぞれ、平面上の凸多角形 (2角形も含む) の平行移動による同値類の集合、相似類の集合とすると、自然な写像

$$P: \mathcal{MA}^1 \rightarrow \mathcal{P}, \quad SP: \mathcal{MC}^1 \rightarrow \mathcal{SP}$$

が存在する。

§2.  $\omega$ -linear 単体の定義と主定理の証明

リーマン面  $R$  上のアーベル微分  $\omega$  は、 $|\omega|$  を考えることにより  $R \setminus \omega^{-1}(\infty)$  上に  $\omega^{-1}(0)$  で conical singularity を持つ平坦な計量を誘導する。まず、この計量を使って“ $\omega$ -linear” 1-単体を定義する。

**定義 1.**  $R$  上の特異 1-単体  $\sigma : [0, 1] \rightarrow R$  が  $\omega$ -linear であるとは、 $\sigma$  は simple path または simple loop で、 $\sigma((0, 1)) \subset R \setminus (\omega^{-1}(0) \cup \omega^{-1}(\infty))$  となり、曲線  $\sigma : (0, 1) \rightarrow R \setminus (\omega^{-1}(0) \cup \omega^{-1}(\infty))$  が平坦なリーマン計量  $|\omega|$  に関する測地線となることをいう。また、 $\omega$ -linear な特異 1-単体の像を、 $\omega$  の極と極を結ぶ場合は  $\omega$ -直線、 $\omega$  の極と極でない点を結ぶ場合は  $\omega$ -半直線、その他の場合を  $\omega$ -線分ということにする。

注意：曲線  $\sigma : (0, 1) \rightarrow R \setminus (\omega^{-1}(0) \cup \omega^{-1}(\infty))$  が平坦なリーマン計量  $|\omega|$  に関する測地線であるとは、 $t_0 \in (0, 1)$  としたとき  $\sigma$  に沿う積分

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} : (0, 1) &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \int_{\sigma(t_0)}^{\sigma(t)} \omega \end{aligned}$$

が  $\mathbb{C}$  上の線分、半直線、または直線となることと同じである。

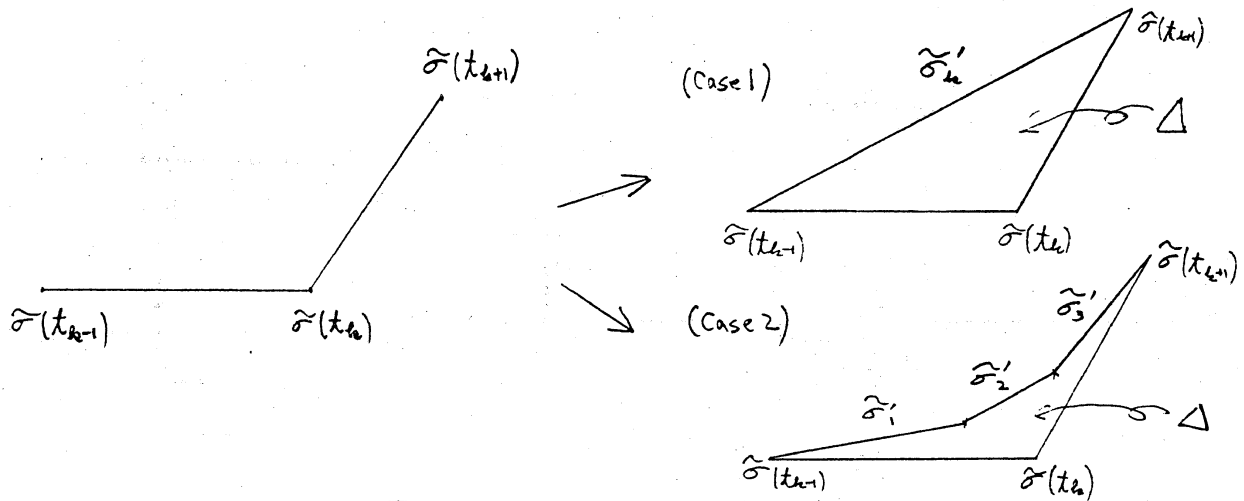
また、特異 1-単体が区分的に  $\omega$ -linear (piecewise  $\omega$ -linear) であるという意味も明らかであると思う。

主定理の証明に入る。ここでは、 $H_1(R, \text{Res}(\omega); \mathbb{C})$  についてのみ考える。 $H_1(R; \mathbb{C})$ ,  $H_1(R \setminus \omega^{-1}(\infty); \mathbb{C})$  の場合も同様である。

$H_1(R, \text{Res}(\omega); \mathbb{C})$  の任意の元が  $\text{Res}(\omega) \cup \omega^{-1}(0)$  に端点を持つ有限個の 1-単体の  $\mathbb{C}$  上線形結合で表されることは明らかである。さらに、任意の 1-単体は、それを局所座標近傍で覆い、区分的に  $\omega$ -linear な 1-単体にホモトピーで変形することも容易である。(このとき、もちろん 1-単体の端点は動かさない。) 次に、区分的に  $\omega$ -linear なものを  $\omega$ -linear で端点を  $\text{Res}(\omega) \cup \omega^{-1}(0)$  に持つものたちで表すことを考える。

**Step1** 区分的に  $\omega$ -linear な  $\omega^{-1}(0) \cup \text{Res}(\omega)$  に端点をもつ任意の 1-単体は、 $\omega^{-1}(0) \cup \text{Res}(\omega)$  に端点をもつ  $\omega$ -linear な 1-単体の有限和と homologous である。

証明)  $\pi : \tilde{R} \rightarrow R$  を  $R$  の普遍被覆、 $\tilde{\omega}$  を  $\pi$  による  $\omega$  の引き戻しである  $\tilde{R}$  上のアーベル微分とする。 $\sigma$  を区分的に  $\omega$ -linear な  $\omega^{-1}(0) \cup \text{Res}(\omega)$  に端点をもつ任意の 1-単体とし、 $\tilde{\sigma}$  を  $\sigma$  の  $\tilde{R}$  への一つ

FIGURE 1. 2つの  $\tilde{\omega}$ -線分の変形

の持ち上げとする。すると、 $\tilde{\sigma}$  は  $\tilde{\omega}^{-1}(0) \cup \text{Res}(\tilde{\omega})$  に端点をもつ区分的に  $\tilde{\omega}$ -linear な 1-単体となる。  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$  に対し  $\tilde{\sigma}|_{[t_{k-1}, t_k]}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) が  $\tilde{\omega}$ -linear であるとし、  $\tilde{\sigma}(t_k)$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) は  $\tilde{\omega}$  の極でも零点でもないとする。さらに、  $\tilde{\sigma}|_{[t_{k-1}, t_k]}$  と  $\tilde{\sigma}|_{[t_k, t_{k+1}]}$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) の  $\tilde{\sigma}(t_k)$  での計量  $|\tilde{\omega}|$  による角度は 180 度ではないとしてよい。

$\tilde{\sigma}$  が  $\tilde{\omega}^{-1}(0) \cup \text{Res}(\tilde{\omega})$  に端点をもつ  $\tilde{\omega}$ -linear な 1-単体たちの和と homologous であることを、  $n$  に関する帰納法で示す。

$n = 1$  のとき、すでに  $\tilde{\sigma}$  は  $\tilde{\omega}^{-1}(0) \cup \text{Res}(\tilde{\omega})$  に端点をもつ  $\tilde{\omega}$ -linear な 1-単体である。

$n \geq 2$  のとき、各  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  に対して、(1)  $\tilde{\sigma}([t_{k-1}, t_k])$  も  $\tilde{\sigma}([t_k, t_{k+1}])$  も  $\tilde{\omega}$ -線分である、(2)  $\tilde{\sigma}([t_{k-1}, t_k])$  も  $\tilde{\sigma}([t_k, t_{k+1}])$  も  $\tilde{\omega}$ -半直線、(3)  $\tilde{\sigma}([t_{k-1}, t_k])$  は  $\tilde{\omega}$ -線分で  $\tilde{\sigma}([t_k, t_{k+1}])$  は  $\tilde{\omega}$ -半直線である、(4)  $\tilde{\sigma}([t_{k-1}, t_k])$  は  $\tilde{\omega}$ -半直線で  $\tilde{\sigma}([t_k, t_{k+1}])$  は  $\tilde{\omega}$ -線分である、の 4 つの場合が考えられる。

証明には、 $\tilde{R}$  上の  $\tilde{\omega}$  の極でないところに基点  $\tilde{x}_0$  を取って、写像

$$\tilde{\Phi}: \tilde{R} \setminus \tilde{\omega}^{-1}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \int_{\tilde{x}_0}^x \tilde{\omega}$$

を考えるのであるが、(3)、(4) の場合も同様であるので、(1) と (2) の場合についてのみ  $n$  が減らせることを証明する。

(1) の場合、Figure 1 のように  $\tilde{\sigma}([t_{k-1}, t_{k+1}])$  の周囲を写像  $\tilde{\Phi}$  の像と同一視して考えることより、  $\tilde{R}$  のある単連結領域  $\Delta$  が存在し、 $\Delta$  の閉包  $\bar{\Delta}$  上  $\tilde{\Phi}$  は単射であり、境界  $\partial\bar{\Delta}$  は (Case 1)  $\tilde{\omega}$ -線分  $\tilde{\sigma}([t_{k-1}, t_k])$ ,  $\tilde{\sigma}([t_k, t_{k+1}])$  と、  $\tilde{\sigma}(t_{k-1})$  と  $\tilde{\sigma}(t_{k+1})$  を結ぶ  $\tilde{\omega}$ -線分  $\tilde{\sigma}'_k([0, 1])$  により構成されているか、または、(Case 2) 境界  $\partial\bar{\Delta}$  は、  $\tilde{\omega}$ -線分  $\tilde{\sigma}([t_{k-1}, t_k])$ ,  $\tilde{\sigma}([t_k, t_{k+1}])$  と、いくつかの  $\tilde{\omega}$ -線分  $\tilde{\sigma}'_1([0, 1]), \dots, \tilde{\sigma}'_m([0, 1])$  によって構成されている。ここで、  $\tilde{\omega}$ -linear な単体  $\tilde{\sigma}'_1, \dots, \tilde{\sigma}'_m$

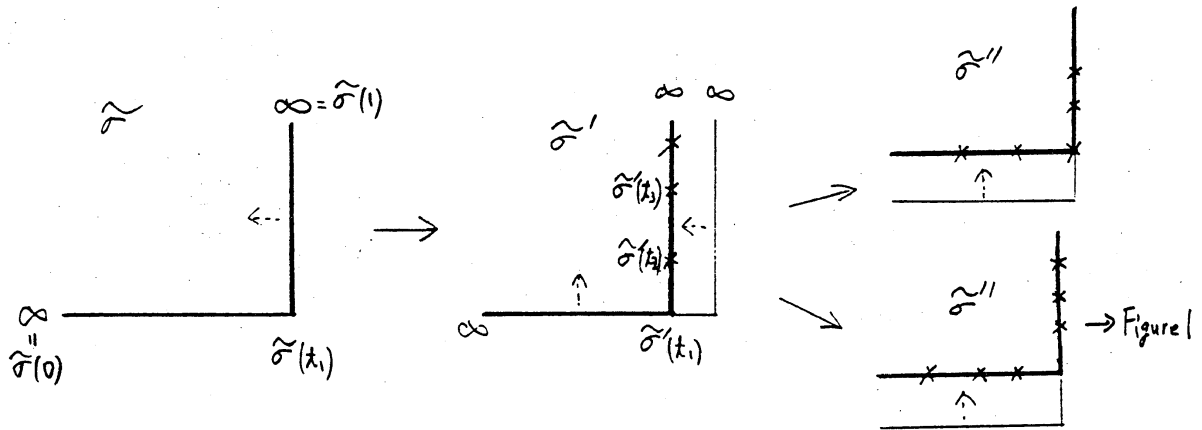


FIGURE 2. 2つの  $\tilde{\omega}$ -半直線の変形

は、 $\tilde{\sigma}(t_{k-1}) = \tilde{\sigma}'_1(0)$ ,  $\tilde{\sigma}'_1(1) = \tilde{\sigma}'_2(0)$ ,  $\dots$ ,  $\tilde{\sigma}'_{m-1}(1) = \tilde{\sigma}'_m(0)$ ,  $\tilde{\sigma}'_m(1) = \tilde{\sigma}(t_{k+1})$  となり、 $\tilde{\sigma}'_l(1)$  ( $l = 1, \dots, m-1$ ) はすべて  $\tilde{\omega}$  の零点となる。さらにこの場合、 $\tilde{\Phi}(\tilde{\sigma}'_1([0, 1]) \cup \dots \cup \tilde{\sigma}'_m([0, 1]))$  はガウス平面  $\mathbb{C}$  上一定の方向に凸な図形になることに注意しておく。これは、step 2 で用いる性質である。

このように、領域  $\Delta$  が高々有限個の  $\tilde{\omega}$ -線分で囲まれることは、 $\tilde{\omega}$  の極、零点が孤立していることから保証される。

Case 1 のとき、 $\tilde{\sigma}_{|[t_{k-1}, t_{k+1}]}$  を  $\tilde{\sigma}'_k$  で置き換えることにより、 $\tilde{\sigma}$  と homologous で、より区分点の少ない区分的に  $\tilde{\omega}$ -linear な単体が得られる。

Case 2 のとき、 $\tilde{\sigma}_{|[t_{k-1}, t_{k+1}]}$  を  $\tilde{\sigma}'_1 + \dots + \tilde{\sigma}'_m$  で置き換えて、 $\tilde{\sigma}$  と homologous な区分的に  $\tilde{\omega}$ -linear な単体を得られるが、この新しい単体は、より区分点の少ない区分的に  $\tilde{\omega}$ -linear な単体の和として表されている。

(2) の場合は、 $n = 2$  のときのみ起こりうる。Figure 2 のように、まず、線分  $\tilde{\sigma}([t_1, 1])$  を  $\tilde{\sigma}([0, t_1])$  に沿って  $\tilde{\omega}$  の零点に当たるまで平行移動する。(いつまでも零点に当たらないなら、 $\tilde{\sigma}$  は  $\tilde{\omega}$  の一つの極のいくらでも小さな近傍に押し込められ、また  $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}(1)$  であり、0 に homologous であるので、考える必要はない。) すると、 $\tilde{\sigma}$  と homologous な区分的に  $\tilde{\omega}$ -linear な 1-単体  $\tilde{\sigma}' : [0, 1] \rightarrow \tilde{R}$  が図のように得られる。 $0 < t_1 < \dots < t_m < 1$  を  $\tilde{\sigma}'$  の区分点とすると、 $\tilde{\sigma}'(t_1)$  は  $\tilde{\omega}$  の零点でも極でもない点であり、 $\tilde{\sigma}'(t_j)$  ( $j = 2, \dots, m$ ) は  $\tilde{\sigma}$  の零点である。このように、 $\tilde{\sigma}'_{|[t_1, 1]}$  が有限個の零点しか通らないことは、 $\tilde{\omega}$  の極、零点が孤立していることから保証される。

さらに、Figure 2 のように、線分  $\tilde{\sigma}'([0, t_1])$  を  $\tilde{\sigma}'([t_1, t_2])$  に沿って  $\tilde{\omega}$  の零点に当たるまで平行移動する。すると、 $\tilde{\sigma}'$  に homologous な区分的に  $\tilde{\omega}$ -linear な 1-単体  $\tilde{\sigma}'' : [0, 1] \rightarrow \tilde{R}$  が得られる。図でわかる通り、 $\tilde{\sigma}''$  の区分点  $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_l$  で  $\tilde{\omega}$  の零点でないものは、高々 1 点である。零点でないものがあつたときには、それを  $\tilde{\sigma}''(s_i)$  とすると、 $\tilde{\sigma}''(s_{i-1})$  と  $\tilde{\sigma}''(s_{i+1})$

は  $\tilde{\omega}$  の零点である。このとき、 $\tilde{\sigma}''_{[s_{i-1}, s_{i+1}]}$  に対して (1) と同じ操作をする。このようにして、 $\tilde{\sigma}$  と homologous な区分的に  $\tilde{\omega}$ -linear な 1-単体で、区分点がすべて  $\tilde{\omega}$  の零点であるようなものが構成できる。このようにして極でも零点でもない区分点の個数を下げることができる。よって帰納法により、1-単体  $\tilde{\sigma}$  が  $\tilde{\omega}^{-1}(0) \cup \text{Res}(\omega)$  に端点を持つ  $\tilde{\omega}$ -linear な 1-単体たちの和と homologous であることが示された。最後に写像  $\pi$  でこの 1-単体たちを  $R$  に落とせば、 $\sigma$  が  $\omega^{-1}(0) \cup \text{Res}(\omega)$  に端点を持つ  $\omega$ -linear な単体の有限個の和と homologous なことがわかる。すなわち、step 1 が証明された。(証了)

**Step 2**  $\omega^{-1}(0) \cup \text{Res}(\omega)$  に端点を持つ  $\omega$ -linear な 1-単体の線形結合で表されるサイクルは、互いに端点以外では交わらない  $\omega^{-1}(0) \cup \text{Res}(\omega)$  に端点を持つ  $\omega$ -linear な 1-単体の線形結合で表される。

(証明) リーマン面  $R$  上のアーベル微分  $\omega$  に対し、 $\omega$  の極でも零点でもない  $R$  の点を通常点と呼ぶことにする。 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  を  $\omega^{-1}(0) \cup \text{Res}(\omega)$  に端点を持つ  $\omega$ -linear な 1-単体としたとき、これらの通常点での交点の数 (重複度を込めて数える) に関する帰納法により、step 2 を証明する。

$\sigma_1([0, 1])$  が通常点  $\sigma_1(t_1), \dots, \sigma_1(t_l)$  ( $0 < t_1 < \dots < t_l < 1$ ) で他の 1-単体と交わるとする。 $\sigma_1(t_1)$  で  $\sigma_1$  と交わる 1-単体の一つが  $\sigma_2$  であるとし、 $\sigma_1(t_1) = \sigma_2(s)$  とする。(  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  たちは自己交叉はしないことに注意。)

2つの 1-単体  $\sigma_2|_{[0, s]}$  と  $-\sigma_1|_{[0, t_1]}$  を合わせてできる区分的に  $\omega$ -linear な 1-単体を  $\sigma_2^+$  とし、2つの 1-単体  $\sigma_1|_{[0, t_1]}$  と  $\sigma_2|_{[s, 1]}$  を合わせてできる区分的に  $\omega$ -linear な 1-単体を  $\sigma_2^-$  とすると、1-単体  $\sigma_2$  は  $\sigma_2^+ + \sigma_2^-$  と homologous であることは明かである。

1-単体  $\sigma_2^+, \sigma_2^-$  に対して step 1 で行った操作をそれぞれ行くと、1-単体  $\bar{\sigma}_2^+, \bar{\sigma}_2^-$  を得る。これらは、 $\omega^{-1}(0)$  に区分点をもつ区分的に  $\omega$ -linear な 1-単体となる。すなわち、 $\omega^{-1}(0) \cup \text{Res}(\omega)$  に端点をもつ  $\omega$ -linear な 1-単体の和として表される。(Figure 3)

1-単体  $\sigma_2$  を  $\bar{\sigma}_2^+ + \bar{\sigma}_2^-$  で置き換えると、通常交叉点が減ることを確認しよう。(Figure 3 は、普遍被覆  $\tilde{R}$  での図であることに注意しなければならない。)

領域  $\Delta^+, \Delta^-$  の内部に  $\omega$  の極も零点もないことと  $\bar{\sigma}_2^+, \bar{\sigma}_2^-$  の凸性から、やや煩雑な議論を要するが、 $\bar{\sigma}_2^+$  または  $\bar{\sigma}_2^-$  の内点が  $\sigma_1$  と  $\sigma_1((0, t_1))$  の範囲で交わるとすると、 $\sigma_1$  は  $\sigma_2$  と  $\sigma((0, t_1))$  の範囲で交わってしまうことがわかり、 $t_1$  の選び方に反する。

やはり、領域  $\Delta^+, \Delta^-$  の内部に  $\omega$  の極も零点もないことと  $\bar{\sigma}_2^+, \bar{\sigma}_2^-$  の凸性から、 $\omega^{-1}(0) \cup \text{Res}(\omega)$  に端点をもつ 1-単体で、 $\bar{\sigma}_2^+$  または  $\bar{\sigma}_2^-$  と交わるものは、必ず  $\sigma_2([0, s])$  または  $\sigma_2([s, 0])$  と交わ

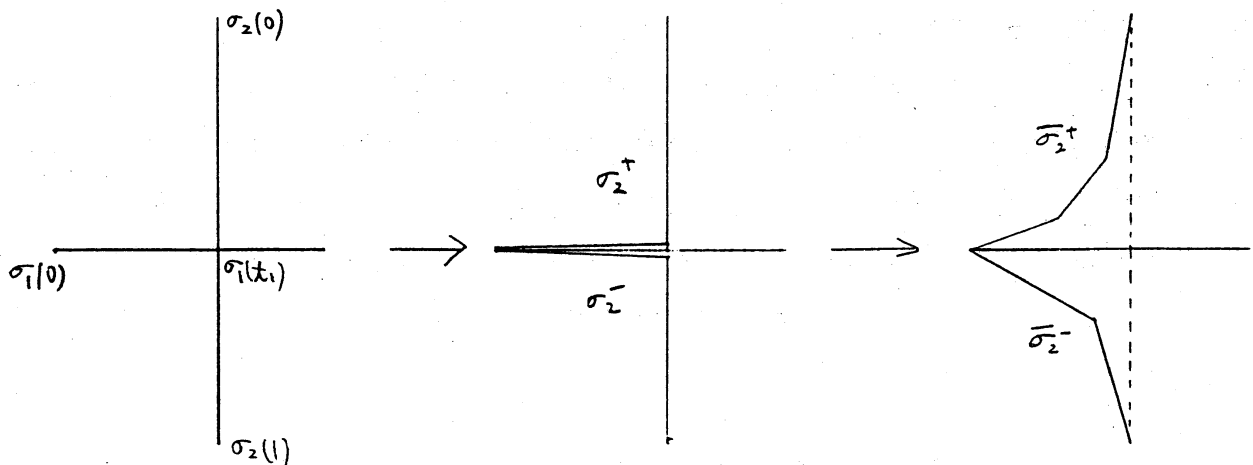


FIGURE 3. 通常交叉点の解消

る。したがって、 $\bar{\sigma}_2^+$ ,  $\bar{\sigma}_2^-$  と  $\sigma_{1|(t_1,1)}$ ,  $\sigma_3, \dots, \sigma_k$  の通常点での交叉点の数は  $\sigma_2$  とこれらの単体とのそれを越えないことがわかる。

また、 $\bar{\sigma}_2^+$ ,  $\bar{\sigma}_2^-$  は自己交叉はしない。なぜなら、自己交叉をするとすると、やはり、 $\sigma_1$  が  $\sigma_2$  と  $\sigma((0, t_1))$  の範囲で交わってしまうからである。さらに、 $\bar{\sigma}_2^+$  と  $\bar{\sigma}_2^-$  の交わりもないことがわかる。

以上より、 $\sigma_2$  を  $\bar{\sigma}_2^+ + \bar{\sigma}_2^-$  に代えると、 $\bar{\sigma}_2^+$  と  $\bar{\sigma}_2^-$  の内点にある交叉点は、 $\sigma_2$  の内点にある交叉点の数よりも少ない事がわかる。

したがって、帰納法が成り立ち、step 2 が証明された。(証了)

Step 1, Step 2 より、今回の主定理が証明された。

## REFERENCES

- [G-W] S. B. Giddings and S. A. Wolpert, *A triangulation of moduli space from light-cone string theory*, Comm. Math. Phys. 109 (1987) 177-190.
- [H-O] Y. Hashimoto and K. Ohba, *Cutting and pasting of Riemann surfaces with Abelian differentials*, preprint.
- [N] S. Nakamura, *A new cell decomposition of the Teichmüller space*, UTMS 97-66