

## 一様乱流中の低圧力旋回渦のダイナミックス

三浦英昭 (核融合研)

木田重雄 (核融合研)

### 概要

数値計算で実現される一様等方乱流に対して圧力断面極小法を適用し、これによって得られる低圧力旋回渦の諸性質を調べた。十分に乱流が発達した状態では、低圧力旋回渦の実質半径はコルモゴロフ長の4～5倍程度であり、この実質半径の確率密度分布は、乱流が発達するにつれて、ほぼ同じ形状に漸近してゆく傾向があることがわかった。

### 1 はじめに

渦運動は、乱流現象を理解する上で鍵となる概念の一つである。特に管状渦運動の構造と運動は、一様等方乱流、壁乱流などで頻繁に議論の対象となっている。ところが、渦に対する適切な定義を与えること自体が依然として問題として残っているため、乱流の研究においても管状渦運動をどのように定義し、可視化するかは研究者によってまちまちである。例えば、実験では低圧力領域をもって渦とするが[1]、数値計算ではエンストロフィー密度、圧力のラプラシアンや、 $\Delta$ 定義、 $\lambda_2$ 定義などが利用されている。従って、乱流について研究、議論する際には何をもって渦(あるいは秩序構造)を定義しているのかをまず明らかにしなければならないが、上に述べたいずれの方法にせよ、渦を定義する上で必要にして十分な方法であるとは言えない。実際、Jeong and Hussain[2]は、他の方法の不十分さを議論した上で彼らの $\lambda_2$ 定義法の優位性を主張している。この $\lambda_2$ 定義法の長所は、任意パラメータの入る余地なく客観的に渦領域を定義できるということであったが、実際に壁乱流の解析では、客観的な尺度ではなく、別の尺度を持ち出して議論している[3]。

このように、これまでの渦の定義、可視化法が不十分、あるいは主観的な要素を含むことに鑑み、客観的で機械的に渦を抽出する方法として考えたのが圧力断面極小旋回法[4, 5]である。この方法で抽出できるのは、内部に2次元的な低圧力領域を含む旋回運動だけであるが、このような渦ならば自動的にすべてについて、その旋回中心軸と旋回領域とを各渦ごとに個別に抽出できるのがこの方法の特長である。この方法によって、一つ一つの渦の旋回

中心軸及び中心領域の運動、複数本の旋回中心軸及び中心領域の相互作用などの解析が可能になった。以下、第2節ではこの圧力断面極小旋回法を簡単に紹介する。第3節では、この方法を数値シミュレーションで実現された一様等方乱流に適用して解析した結果を述べる。第4節はまとめである。

## 2 圧力断面極小旋回法

圧力断面極小旋回法は、旋回渦の回転面上で圧力が2次元極小値を持つ傾向にあることを利用して渦の旋回中心軸とその周りの渦領域を定義するものである。詳細は既に Miura and Kida[4] 及び Kida and Miura[5] に述べられているが、文献が2つにまたがっていることもあり、この手法の一貫した手続きをここに紹介する。それぞれの手続きの物理的、または数値計算上の意味などは上記参考文献を当たられたい。

最初に、圧力のヘシアン  $\partial^2 P / \partial x_i \partial x_j$  の固有値及び固有ベクトルを利用して、圧力の断面極小点を求める。圧力  $P$  は、座標軸が圧力のヘシアンの3つの固有ベクトル  $e_1, e_2, e_3$  に対して平行となる座標系  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  において、2次までの次数で

$$P(X_1, X_2, X_3) = P_c + \frac{\lambda^{(i)}}{2} (x'_i - c_i)^2 \quad (1)$$

と書ける。ここで、 $(X_1, X_2, X_3)$  は、圧力のヘシアンを求めた元の座標系での座標である。また、 $\lambda^{(i)}$  は圧力のヘシアンの固有値であり、一般性を失わずに  $\lambda^{(1)} \geq \lambda^{(2)} \geq \lambda^{(3)}$  とすることができる。もし  $\lambda^{(1)} \geq \lambda^{(2)} > 0$  であるならば、圧力は  $e_3$  に対して垂直な平面で極小値をもつ。すなわち、

$$e_3 \times \nabla p = 0 \quad (2)$$

である。ここで、 $e_3$  に平行で、上記の点  $(c_1, c_2, c_3)$  を通る線に対して  $(X_1, X_2, X_3)$  から垂線をおろし、その足を  $(c'_1, c'_2, c'_3)$  とする。数値計算の格子幅を  $\Delta$  として、不等式  $|X_i - c'_i| < \Delta/2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を満たす点  $(c'_1, c'_2, c'_3)$  が、低圧力旋回渦の旋回中心を構成するための候補点となる。

次に、この点  $(c'_1, c'_2, c'_3)$  の周りに実際に旋回渦があるか否かを判定する条件を課す [5]。点  $(c'_1, c'_2, c'_3)$  に対して相対的な速度場を  $e_3$  に垂直な平面上に射影し、線形化した流れ場  $(u'_1, u'_2)$  は、

$$u'_1 = W'_{11}x'_1 + W'_{12}x'_2, \quad (3)$$

$$u'_2 = W'_{21}x'_1 + W'_{22}x'_2 \quad (4)$$

と書き表せる。ここで  $W'_{ij}$  は射影平面上での速度勾配テンソルを表している。この時、点  $(c'_1, c'_2, c'_3)$  の周りに旋回流があるための必要条件は、

$$D = \frac{1}{4}(W'_{11} - W'_{22})^2 + W'_{12}W'_{21} < 0 \quad (5)$$

で与えられる。従って、圧力のヘシアンを計算して得られた候補点  $(c_1, c_2, c_3)$  にこの判別式を課し、 $D < 0$  であるならば、この点では圧力が断面極小となり、なおかつその平面上において旋回渦が存在する。

数値計算で用いるすべての格子点  $(X_1, X_2, X_3)$  について上記の2つの手続きを行うことで、低圧力旋回渦の旋回中心軸の候補点の集合が得られる。そしてこれらの候補点を適切に連結すると、旋回渦の旋回中心が得られる。ここで、Miura and Kida[4] では単純に最近接候補点同士を結んでいたが、Kida and Miura[5] では、候補点の連結法が少々複雑になっていることを注意しておく。すなわち、Kida and Miura[5] では、ある中心軸に対して連結すべき候補点が見つからない場合、 $e_3$  方向に格子幅  $\Delta$  の長さだけ延ばした点に仮想的な候補点を設定し、この仮想候補点に対して最近接となる候補点がある場合には、これらを連結している。これは、数値誤差などの影響で旋回中心軸が不自然な途切れ方をすることを防ぐための工夫である。

図1(a) および (b) は、旋回条件も課さず、また、上記のつなぎ方を工夫せずに圧力断面極小線を構築したものと、旋回条件を課してつなぎ方も工夫した上で、旋回流を伴う圧力断面極小線を構築したものである。両図を比べると分かるように、旋回条件を課すことによって旋回を伴わない圧力断面極小点が排除され、いくつかの旋回中心軸がより滑らかになった。また、図1(b) には、かつては途切れていたため現われなかった中心軸が、つなぎ方を工夫することで新たに出現している例もある。

旋回中心軸の構築を終えたのち、旋回領域を定義する。中心軸の候補点が旋回判別式  $D < 0$  を満たしていることから、圧力断面極小の平面上で  $D < 0$  となる領域をもって渦の旋回中心領域と定義する。図2には、 $128^3$  の格子数の数値シミュレーションの等方乱流場にこの定義を適用して得られた低圧力旋回渦の旋回中心軸と旋回領域を示している。この乱流場のテイラー長レイノルズ数は  $Re_\lambda = 46$  である。(次節で述べる、Run-B と名付けられるシミュレーションの  $t = 144$  に対応している。) 図2には、この乱流場から得られた全ての旋回中心軸を表示したが、旋回領域については、すべてを表示すると全体積の40%以上を占めて構造が判り難くなるため、いくつかの典型的な旋回領域のみを示している。

この渦の諸性質の考察については次節に譲ることとして、ここで注意すべきことは以下の通りである。判別式  $D$  は点  $(c_1, c_2, c_3)$  に対して相対的な速度場を用いているため、 $D < 0$  を満たすある点が、他の点から見た場合に  $D > 0$  となる(従って旋回していない)ように見える場合もあり、また、複数の中心軸から見て  $D < 0$  を満たす場合もあり得る。これは我々の定義からして当然の結果であり、特殊な処理を要することではないが、シミュレーション領域に対する渦領域の体積の割合などを計算する場合には、重複計算のないように配慮する必要がある。

### 3 低圧力旋回渦の性質

この節では、前節で紹介した低圧力旋回渦の定義を一様等方減衰乱流に適用し、その性質を調べる。ここで用いるのは、格子数  $128^3$  で、粘性率が  $\nu = 1 \times 10^{-4}$  および  $5 \times 10^{-5}$  の2つのシミュレーションである。これらのシミュレーションに共通の初期条件は、速度場の各フーリエ成分の位相を乱数で与え、そのエネルギースペクトルが

$$E(k, t=0) = k^2 \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) \quad (6)$$

に従うように決定した。

図3(a)には、上記2つのシミュレーションにおけるエンストロフィー  $Q = \int \frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}|^2 d^3\boldsymbol{x}$  の時間発展を示した。(以下、粘性率  $\nu = 1 \times 10^{-4}$  のシミュレーションを Run-A、 $\nu = 5 \times 10^{-5}$  のものを Run-B と呼ぶことにする。) 図3で、実線が Run-A の、破線が Run-B のエンストロフィー  $Q$  の時間発展である。Run-A では、エンストロフィーは  $t \simeq 51$  で小さな最大値をとるのに対し、Run-B では、 $t \simeq 87$  で、初期のエンストロフィーの  $5/3$  倍に達する最大値をとっている。前節で図2に示したのは、Run-B の  $t = 144$  における乱流場の低圧力旋回渦の旋回中心軸と旋回領域である。これは、低圧力旋回渦の可視化を行う前の段階でエンストロフィー密度  $\frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}|^2$  の等値面による可視化を行い、目で見て十分に発達したとみなされる時刻である。エンストロフィーの最大時刻が、必ずしも乱流が十分に発達した状態と対応していないことを注意しておく。

図3(b)に示したのは、この2つのシミュレーションにおけるコルモゴロフ波数  $k_K$  の時間発展である。コルモゴロフ波数は、エンストロフィーが最大となる時刻とほぼ同時期に最大となり、あとは単調に減少している。従って、コルモゴロフ長  $l_K = 1/k_K$  で特徴づけられるような現象は、乱流が十分に発達するにつれて次第に大きなスケールに移っていくことを示唆している。

低圧力旋回渦の旋回領域の定義を用いると、渦の性質についての様々な研究が可能になる。最初に旋回領域の断面の特徴的な長さ尺度を調べる。この特徴的な長さ尺度として、旋回領域の断面の実質半径  $\bar{r}$  を

$$\bar{r} = \frac{1}{L} \oint_L |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_c| dl \quad (7)$$

で定義する。ここで、 $dl$  は旋回領域の外周に沿った線素を、 $L$  は外周の長さを表し、

$$\boldsymbol{x}_c = \frac{1}{S} \int_S \boldsymbol{x} dS \quad (8)$$

はこの断面の重心である。図4には、Run-A および Run-B のいくつかの時刻に対する実質半径の確率密度関数を示した。この確率密度関数の横軸  $R(= \bar{r}/l_K)$  は、実質半径を各時刻でのコルモゴロフ長で正規化したものである。この両図の  $R \simeq 14$  におけるピークは、初期分布の名残である。

Run-A では  $t \simeq 300$  から、Run-B では  $t \simeq 400$  から、確率密度関数の形がほぼ定常になっているように見え、そのピークの位置は  $R = 4 \sim 5$  にある。これは、これまでに実験や数値計算で得られた結果とほぼ一致している [1, 6]。ただし、図 3(b) の  $k_K$  の時間発展からもわかるように、コルモゴロフ長は途中から大きくなっており、コルモゴロフ長で正規化しない実際の渦の太さは太くなっていることに注意したい。

#### 4 まとめ

管状渦構造を同定するために開発した圧力断面極小旋回法を用いて、一様等方減衰乱流の数値シミュレーションで得られた乱流場の低圧力旋回渦の断面構造を解析した。乱流が十分に発達するにつれて、低圧力旋回渦の実質半径は、コルモゴロフ長でスケールされる相似な確率密度関数に従うようになる。しかし、この相似な分布にいたるまでの時間尺度などを調べるためには、より大きなレイノルズ数の数値計算の結果を待たねばならない。

また、ここで示した解析のほか、一本の旋回中心軸の運動を時間方向に追跡することも可能である。この研究は現在進行中であるが、互いに反平行な渦度をもつ 2 本の旋回中心軸が引きつけあって運動するなど、興味深い現象が観測されており、これらの結果については次の機会に報告したい。

#### 参考文献

- [1] F. Belin, J. Mauer, P. Tabeling and H. Williams: J. Phys. II France, **6** (1996) 573.
- [2] J. Jeong and F. Hussain: J. Fluid Mech. **285** (1995) 69.
- [3] J. Jeong, F. Hussain, W. Schoppa and J. Kim, J. Fluid Mech. **332** (1997) 185.
- [4] H. Miura and S. Kida: J. Phys. Soc. Jpn. **66** (1997) 1331.
- [5] S. Kida and H. Miura: J. Phys. Soc. Jpn. (1998) (印刷中).
- [6] J. Jiménez, A. A. Wray, P. G. Saffman and R. S. Rogallo: J. Fluid Mech., **255** (1993) 65.

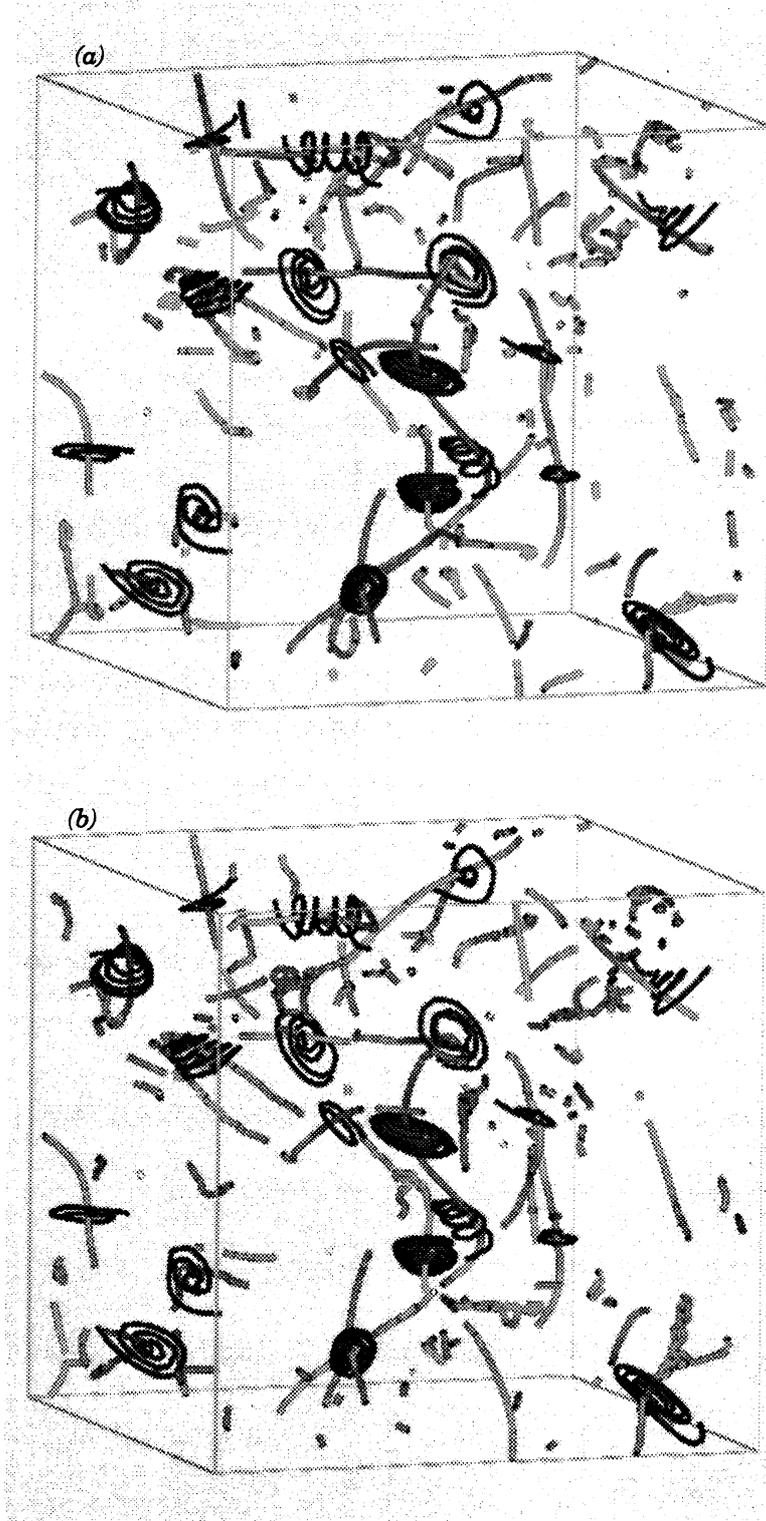


図 1: 格子数  $64^3$  の一様等方乱流シミュレーションにおける低圧力旋回渦の旋回中心軸。  
 (a) 旋回条件を課さず、最近接候補点同士を連結して中心軸を構築した例。(b) 旋回条件を課し、連結方法を変更したもの。

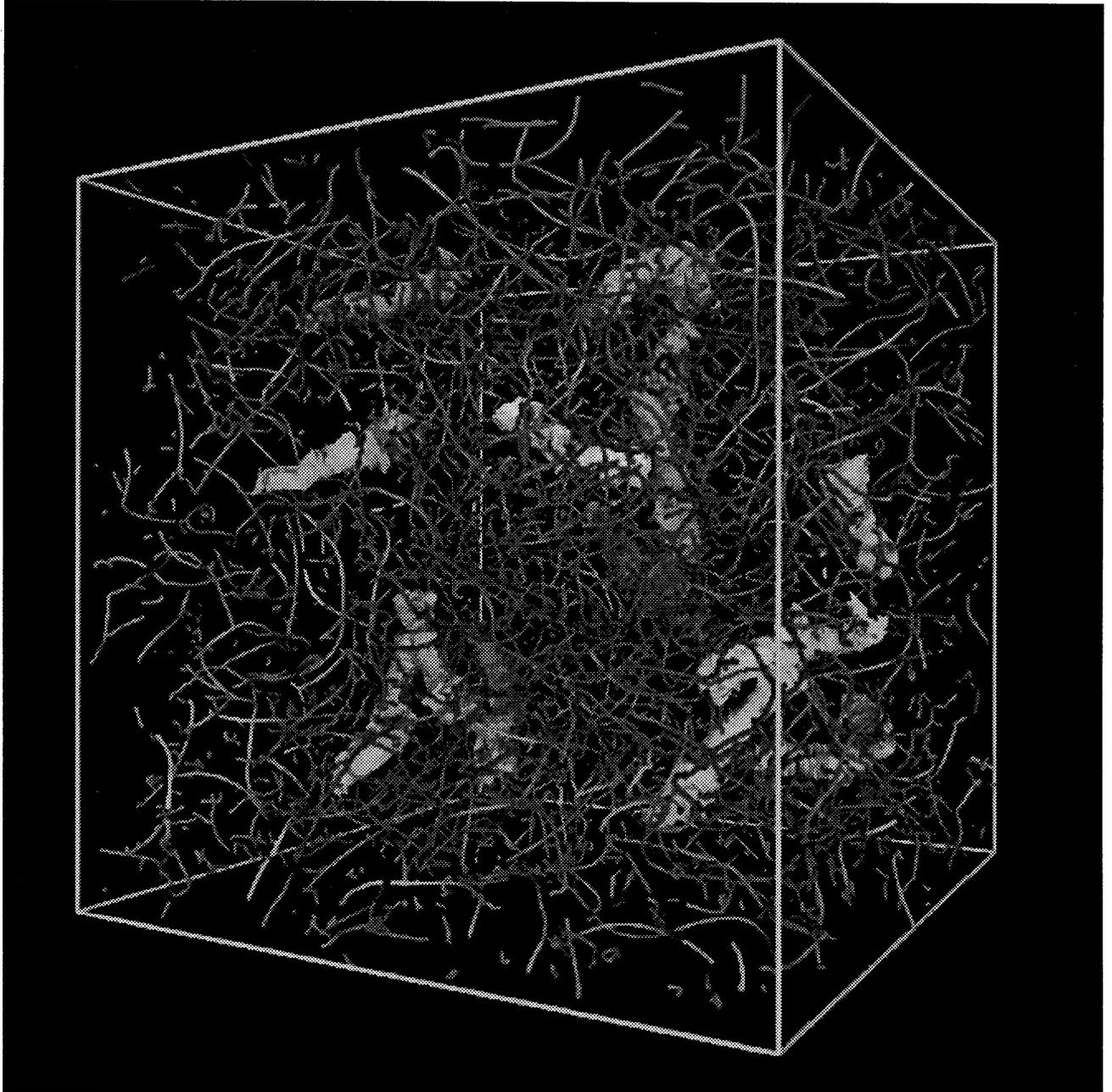


図 2: 格子数  $128^3$  の一様等方乱流シミュレーションにおける、低圧力旋回渦の中心軸と旋回領域。典型的ないくつかの旋回領域をポリゴンで表示してある。

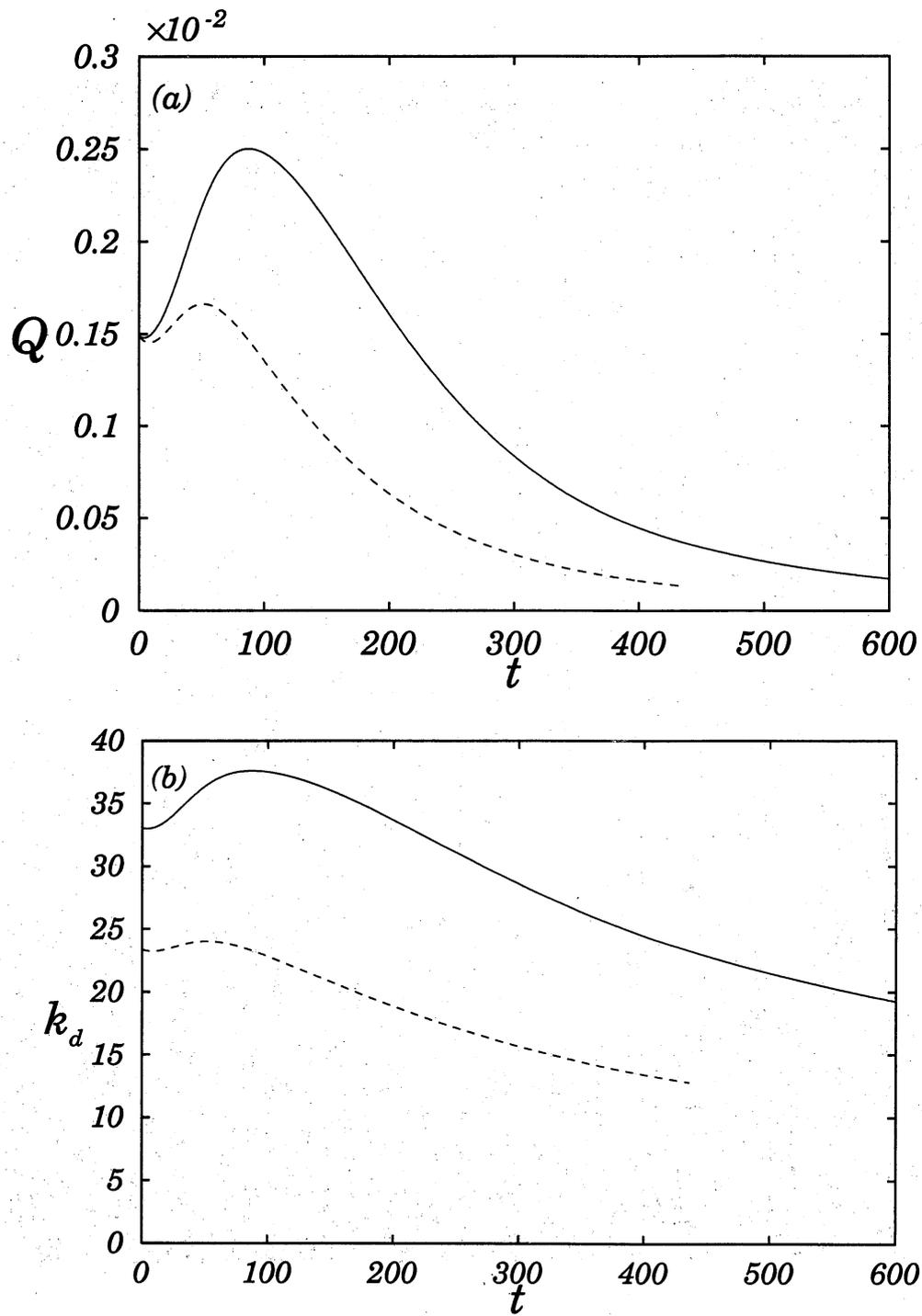


図3: (a) 2つのシミュレーションで得られたエネルギーの時間発展。実線が Run-A、破線が Run-B に対応している。(b) Run-A および Run-B におけるコルモゴロフ波数の時間発展。記号は (a) と同じ。

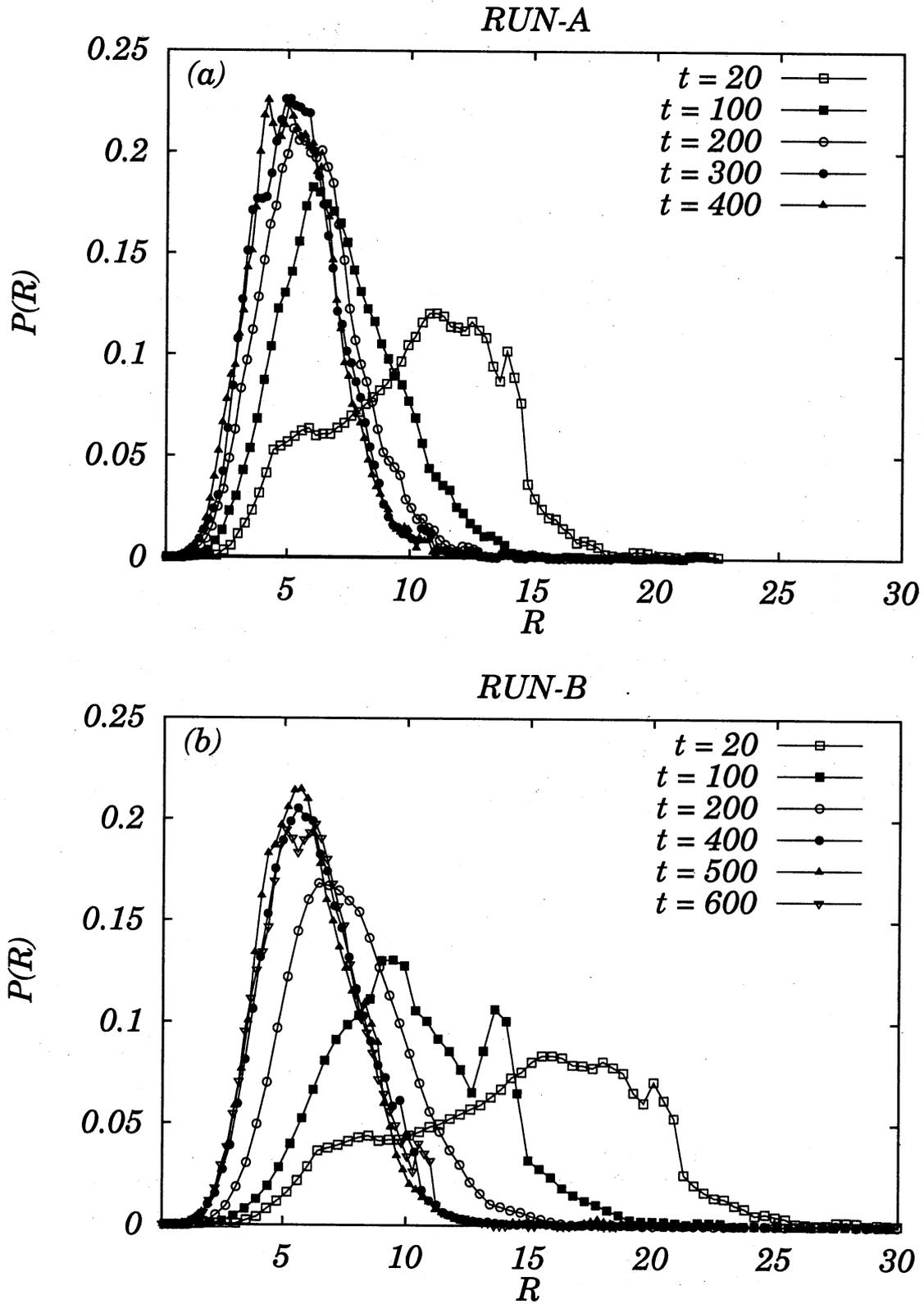


図 4: (a)Run-A,(b)Run-B の各時刻における巡回領域の实质半径の確率密度分布。