数理解析研究所講究録
1051巻 1998年 100-110

Spherical Shell Model の 統計的性質

名工大　小林 之彦 (Yukihiko Kobayashi)
名工大　後藤 俊幸 (Toshiyuki Gotoh)

1 Introduction

乱流についての研究は, 古くから盛んに行なわれているが今だ未解決な部分が多い. 近年においては大きな計算機資源を用いて Navier-Stokes 方程式を直接数値積分することにより, これまで実験に頼っていたエネルギースペクトルも理想化された条件のもとで計算できるようになり, 乱流の統計理論との比較も容易になった. また実験では得られにくいデータも比較的容易に得られ, 最近の乱流現象の理解に数値計算の果たした役割は極めて大きく, 今では欠くことのできない手段となっている.

上述のように Navier-Stokes 方程式の直接数値積分は大きな計算機資源を必要とする. そこで, Navier-Stokes 方程式との接点を残しつつ, もっと単純化した Navier-Stokes 方程式のモデルを考えて, これをシミュレーションするという考えが浮かんでくる. そのようなモデルの中の一つにシェルモデル (Shell Model , SM) と呼ばれるものがある.

乱流のシェル モデルについての研究は, 最初 Gledzer (1973 [1]) により理論的に行なわれ, 今日に至るまで多くの報告がなされている. フーリエ級数に展開された Navier-Stokes 方程式は無限大の自由度をもつので, シェル モデルではこれを有限自由度までに減らす. 自由度の減らし方はさまざまであるが, 最もよく行なわれているのは波数空間を $k_n = k_0 q^n, q > 1$ のシェルに分割して, 各シェル内 $k_n < |\boldsymbol{k}| < k_{n+1}$ に含まれるフーリエ モードを代表して u_n で表す. 通常この u_n は実数又は複素数にとられる. この考え方によりシェル モデルという名がついている. u_n の方程式には多くのものがあるが, 例えば, 3 次元乱流のシェル モデルの式 (Yamada & Ohkitani 1987 [2]) は, 以下のように与えられる.

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right) u_n = i \sum_{ml}^{\triangle} A_{nml} u_m^* u_l^* + f \cdot \delta_{n,n_0} \tag{1}$$

ここで i は虚数単位, $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタ, f は外力, ν は動粘性率, n_0 は外力の加えられる波数バンドである. 非線形相互作用を表す A_{nml} は通常波数バンドに関して局所的にとられる. 即ち m, l の和は有限項で打ち切られる. この構造は波数空間内におけるエネルギー輸送の局所性と矛盾しないようになっている. 言い換えると, 慣性領域において同じ程度のサイズの流体要素間の相互作用によりエネルギーが低波数から高波数に運ばれるという Kolmogorov(K41) の理論の描像とつじつまがあっているようにとられている.

シェル モデルは, 実際の乱流のいくつかの特徴的性質を示している. たとえば, 時間平均をとると, エネルギースペクトルの $-5/3$ 乗則や速度の確率密度関数が非 Gauss 分布になることなどが, 挙げられる. もちろん数値計算も直接数値積分にくらべるとはるかに容易である.

シェル モデルは簡単な形をしており, また Navier-Stokes 乱流の特徴をよく表しているという長所があるのだが, その理論的解析が易しいということには必ずしもなっていない. 非線形項は局所的相互作用であっても, 強非線形であることには変わりないから, 摂動展開などの方法や繰り込み展開の方法も使えるかどうか定かではない. また, 統計的性質が非 Gauss 分布であるから Gauss 分布からの摂動展開ということも可能であるかどうか定かではない. 要するに Navier-Stokes 乱流の性質を示す簡単なモデルがあってもそれに対する解析的理論がない以上そのメカニズムを解明したことにはならない.

そこで解析的理論が構成できて, かつ非線形性や Gauss 分布からのずれをコントロールできるモデルがあれば, Navier-Stokes 乱流の統計的理論を構成するのに役立つと考えられる.
その様なモデルとして, 修正 Navier-Stokes 方程式 (Modified Navier-Stokes , MNS) と呼ばれるものがある. これは, 乱流場の N 個の集団と考えてこれらが非線形項を通じて結合しているものであり, 式で表すと以下のようになる.

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k^2\right) u_n^\alpha(\boldsymbol{k}, t) = M_{nml}(\boldsymbol{k}) \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q},\beta\gamma}^{\triangle} \Phi_{\alpha\beta\gamma} u_m^\beta(\boldsymbol{p}, t) u_l^\gamma(\boldsymbol{q}, t) \tag{2}$$

ここで, $\alpha = 1, \cdots N$ である. また $\Phi_{\alpha\beta\gamma} = 1$ であるならば通常の Navier-Stokes 方程式に移行する. 非線形項は実空間では

$$\sum_{\beta\gamma} \Phi_{\alpha\beta\gamma} \left(\boldsymbol{u}^\beta \cdot \nabla\right) \boldsymbol{u}^\gamma \tag{3}$$

という形をしている. これは $\boldsymbol{u}^\gamma$ が変形をうけながら $\boldsymbol{u}^\beta$ により流されて $\boldsymbol{u}^\alpha$ に変化をもたらすと考えられ, 乱流中における流体要素の変形と移流の相対的な強さを $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ でコントロールする格好になっている. この修正された Navier-Stokes 方程式において $N \to \infty$ の時には, 直接相互作用近似 (Direct interaction approximation , DIA . Kraichnan 1959 [3], 1961) が厳密解を与えることが知られている. その場合, DIA は $k^{-3/2}$ のエネルギースペクトルを導き Kolmogorov の $k^{-5/3}$ スペクトルとは相容れない. その大きな原因は, 波数間の相互作用が非局所的であることによる.

次に Modified Navier-Stokes シェル モデルを考える. このモデルでは波数間の相互作用は局所的であるから $k^{-5/3}$ スペクトルが期待できる. この様に考えると以下のモデル, 修正されたシェル モデルができあがる.

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right) u_n^\alpha = \sum_{m\beta,l\gamma}^{\triangle} A_{nml} \Phi_{\alpha\beta\gamma} u_m^\beta(t) u_l^\gamma(t) + f \cdot \delta_{n,n_0}(t) \tag{4}$$

この式と (1) 式を見比べると, (4) 式では $u_n^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, \cdots N$) の集団を考え, その集団が非線形項を通じて強さ $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ で結合していることが分かる. このモデルに対し DIA を適用すれば $N \to \infty$ で厳密解を得ることができるし, 局所的相互作用により $k^{-5/3}$ スペクトルも得られる. 一方 $N \to 1$ では (1) 式と同様 Navier-Stokes 方程式のそれと同様の非 Gauss 的, 非 kolmogorov 的スケーリングを示す. このことから N が大きいがしかし有限な場合, Gauss 統計から少しずれた統計性を示すであろうからこの修正シェル モデルに対する DIA 理論からの拡張を考えることも可能であろうと予想される (Eyink 1994). この意味で Modified shell model を考えることは意味がある.

結合マトリックス $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ をどう選ぶかで色々なモデルができる. 例えば, Φ をランダムに選べばランダム カップリング モデル (Random Coupling Model . Kraichnan 1961 [4]), Φ をクレブシュ - ゴルドン係数 [5] に選べばスフェリカル モデル (Spherical Model . Mou & Weichman 1993 [6]) となりそれらのシェル モデルを考えるとそれぞれ Random Coupling Shell Model, Spherical Shell Model (SPSM) となる. 具体的には Eyink [7] により SPSM が提案された. SPSM の式は, 以下のように示される.

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right) u_n^\alpha = \sum_{m\beta,l\gamma}^{\triangle} A_{nml} W_N^{\alpha\beta\gamma} u_m^{\beta *}(t) u_l^{\gamma *}(t) + f \cdot \delta_{n,n_0}(t) \tag{5}$$

ここで, $2J+1$ 個の乱流場を考えていることにする. $\alpha = -J \sim J$ とする. β, γ についても同じである. $W_N^{\alpha\beta\gamma}$ は Clebsch-Gordan 係数である. $J = 0$ の時, SM と同等の式となり乱流の特徴的性質を示す. しかし, $J \to$ 大 では, $2J+1$ 個の乱流場の集団を考えた式になるため, その統計性は, SM と大き

く違い乱流から離れていく. 理論的には $J \to \infty$ での統計性は, Eyink により速度のモーメントは K 41 scaling に漸近していくことが示されている.

今研究は, J を増加させると上述の様に統計性が変化することが期待できるので, J についてそれぞれの物理量を見ていくことを目的とする. 物理量としては, 大別して以下の 2 つである.

1 : 1 点統計	エネルギーなどの時系列, 散逸率の確率密度関数など
2 : 2 点統計	スペクトル, 構造関数, Kolmogorov 定数など

まず 1 については, エネルギー, エンストロフィー, スキューネスの時系列と平均値・分散, エネルギー散逸率の確率密度関数を調べた.

2 については, エネルギースペクトルが慣性領域で $-5/3$ 乗則に従っているか, 構造関数, 速度・エネルギー流束関数の確率密度関数が $J \to$ 大とするとともに K 41 scaling に漸近していくかを検証した.

エネルギースペクトルは, K 41 によると慣性領域では以下の式で表される.

$$E(k_n) = K\bar{\epsilon}^{2/3}k_n^{-5/3} \tag{6}$$

ここで K は, Kolmogorov 定数と呼ばれる. また $-5/3$ 乗則とのずれ δ を考えた時, 上述のエネルギースペクトルの式は,

$$E(k_n) = K\bar{\epsilon}^{2/3}k_n^{-5/3}(k_n\eta)^{-\delta} \qquad \eta = \frac{1}{k_d} \tag{7}$$

となる. k_d は Kolmogorov 波数である. この式では, $\delta = 0$ となる時 K 41 scaling に従うことを意味する. そして Kolmogorov 定数は, 上述の式から

$$K = \bar{\epsilon}^{-2/3}k_n^{5/3}(k_n\eta)^{\delta}E(k_n) \tag{8}$$

と定義でき, この値を見ていく.

2 Spherical Shell Model

モデル式については, Pierotti の論文 [8] から引用する. Pierotti により SPSM の式をほんの少し修正された方程式 はシェル モデルから SPSM への橋渡しに成功している. 以下にその SPSM の式を示す. ここで $u_n^\alpha = x_n^\alpha + iy_n^\alpha$ とする.

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right) u_n^\alpha = i \sum_{m\beta,l\gamma}^{\triangle} A_{nml} W_N^{\alpha\beta\gamma} u_m^{\beta*}(t) u_l^{\gamma*}(t) + f \cdot \delta_{n,n_0}(t) \tag{9}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right) x_n^\alpha = ik_n \sum_{\beta,\gamma=-J}^{J} W_N^{\alpha\beta\gamma}[u_{n+1}^{\beta*}u_{n+2}^{\gamma*} - \frac{\varepsilon}{2}u_{n-1}^{\beta*}u_{n+1}^{\gamma*} - \frac{(1-\varepsilon)}{4}u_{n-1}^{\beta*}u_{n-2}^{\gamma*}] + f \cdot \delta_{n,n_0} \tag{10}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right) x_n^\alpha = k_n \sum_{\beta,\gamma=-J}^{J} W_N^{\alpha\beta\gamma}[x_{n+1}^{\beta}y_{n+2}^{\gamma} + y_{n+1}^{\beta}x_{n+2}^{\gamma} - \frac{\varepsilon}{2}(x_{n-1}^{\beta}y_{n+1}^{\gamma}$$

$$+ y_{n-1}^{\beta} x_{n+1}^{\gamma}) - \frac{(1-\varepsilon)}{4}(x_{n-1}^{\beta} y_{n-2}^{\gamma} + y_{n-1}^{\beta} x_{n-2}^{\gamma})]^* + f^{\alpha} \cdot \delta_{n,1} \quad (11)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right) y_n^{\alpha} = k_n \sum_{\beta,\gamma=-J}^{J} W_N^{\alpha\beta\gamma}[x_{n+1}^{\beta} x_{n+2}^{\gamma} - y_{n+1}^{\beta} y_{n+2}^{\gamma} - \frac{\varepsilon}{2}(x_{n-1}^{\beta} x_{n+1}^{\gamma}$$

$$- y_{n-1}^{\beta} y_{n+1}^{\gamma}) - \frac{(1-\varepsilon)}{4}(x_{n-1}^{\beta} x_{n-2}^{\gamma} - y_{n-1}^{\beta} y_{n-2}^{\gamma})]^* + f^{\alpha} \cdot \delta_{n,1} \quad (12)$$

ここで $\alpha = -J \sim J$; $N = 2J+1$ であり, $n = 1, \cdots, n_{max}$, $n_0 = 1$ である. $W_N^{\alpha\beta\gamma}$ は Clebsch-Gordan 係数であり, ε は任意の実定数ある. また k_n についてはシェル モデル同様以下のように定義する.

$$k_n = k_0 \cdot q^n \qquad (q > 1\,,\, 1 \leq n \leq n_{max}) \quad (13)$$

このように定義された波数空間でモデル式は構成されている. 今研究においては, $q = 2$ とする. また速度の対称性から強制的に $x_n^{-\alpha} = (-1)^{\alpha}(x_n^{\alpha})^*$, $y_n^{-\alpha} = (-1)^{\alpha}(x_n^{\alpha})^*$, $f^{-\alpha} = (-1)^{\alpha}(f^{\alpha})^*$ の条件を負わせている. ここで x_n, y_n は複素数である. なぜわざわざ自由度を多くしているかというと, 複素数であると $\alpha = 0$ のところでの速度の対称性が崩れないからである. (そこでの速度は実数である. また容易に確かめられるので証明は避ける.) ここで実際に (11), (12) 式においてエネルギー保存則 ($\frac{dE}{dt} = 0$), シェル モデル ヘリシティーが保存することを確かめる方法を簡単に以下に示す (簡単にするため (10) 式を使用する). まず (10) 式の両辺に $u_n^{\alpha *}$ を掛ける ($f = 0$, $\nu = 0$) .

$$\frac{d}{dt} u_n^{\alpha} \cdot u_n^{\alpha *} = i k_n \sum_{\beta,\gamma=-J}^{J} W_N^{\alpha\beta\gamma}[u_{n+1}^{\beta} u_{n+2}^{\gamma} u_n^{\alpha} - \frac{\varepsilon}{2} u_{n-1}^{\beta} u_{n+1}^{\gamma} u_n^{\alpha}$$

$$- \frac{(1-\varepsilon)}{4} u_{n-1}^{\beta} u_{n-2}^{\gamma} u_n^{\alpha}]^* \quad (14)$$

$$2\frac{d}{dt}E(t) = \frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{n_{max}} \sum_{\alpha=-J}^{J} u_n^{\alpha} \cdot u_n^{\alpha *}$$

$$= i \sum_{n=1}^{n_{max}} k_n \sum_{\beta,\gamma=-J}^{J} W_N^{\alpha\beta\gamma}[u_{n+1}^{\beta} u_{n+2}^{\gamma} u_n^{\alpha}$$

$$- \frac{\varepsilon}{2} u_{n-1}^{\beta} u_{n+1}^{\gamma} u_n^{\alpha} - \frac{(1-\varepsilon)}{4} u_{n-1}^{\beta} u_{n-2}^{\gamma} u_n^{\alpha}]^* \quad (15)$$

よって右辺の和が 0 となれば良いことが分かる. あとは右辺を素直に計算すれば確かめられる. またシェル モデル ヘリシティーについては, これが保存するように ε が決められる. シェル モデル ヘリシティーの定義式を以下に示す.

$$H = \sum_{n=1}^{n_{max}} \sum_{\alpha=-J}^{J} (-1)^n k_n |u_n^{\alpha}|^2 \quad (16)$$

この式を見ると先ほどのエネルギーの場合の式に $(-1)^n k_n$ を掛ければ良いことが容易に分かる. であるから

$$\frac{d}{dt}H(t) = \frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{n_{max}} \sum_{\alpha=-J}^{J} (-1)^n k_n u_n^{\alpha} \cdot u_n^{\alpha *}$$

$$= i \sum_{n=1}^{n_{max}} (-1)^n k_n^2 \sum_{\beta,\gamma=-J}^{J} W_N^{\alpha\beta\gamma}[u_{n+1}^{\beta} u_{n+2}^{\gamma} u_n^{\alpha}$$

$$- \frac{\varepsilon}{2} u_{n-1}^{\beta} u_{n+1}^{\gamma} u_n^{\alpha} - \frac{(1-\varepsilon)}{4} u_{n-1}^{\beta} u_{n-2}^{\gamma} u_n^{\alpha}]^* \quad (17)$$

となる． この式も素直に計算すれば確かめられ, 保存するときの ε の値は 1/2 となる． またエネルギー, ヘリシティーの両方とも $\sum_{\beta,\gamma=-J}^{J}$ の和の中では β , γ の添字が付いているので複雑に見えるが, 例えば $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,-1,0)$ と $(\alpha,\beta,\gamma)=(-1,1,0)$ での値同士がうまく打ち消し合うようになっているので簡単に確かめられることが分かるであろう． これもすべて Clebsch-Gordan 係数の対称性, 速度の対称性からくるものである． ここで (10) 式を見てみると $J=0\,(N=1)$ の時, シェル モデルとまったく同じ式になるのがわかるであろう ($W_1^{\alpha\beta\gamma=0}=1$)． これにより $J=0$ のときは乱流の特徴的性質を示し, $J\to$ 大 に増加させるほどK 41 scaling に漸近していくことが推測できるであろう．

3 Time advance and run parameters

今研究においては (11), (12) 式の $n_{max}\times N$ 階連立常微分方程式を修正 4 次ルンゲ・クッタ法を用いて数値計算していく． また (11), (12) 式に対して以下のように各パラメターを決める．

ε に対してはヘリシティー $H=\displaystyle\int(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}))\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}$ に似たシェル モデル

ヘリシティー $H=\displaystyle\sum_{n=1}^{n_{max}}\sum_{\alpha=-J}^{J}(-1)^n k_n|u_n^{\alpha}|^2$ が不変量となるため $\varepsilon=\frac{1}{2}$ とする．

初期波数: $k_0=0.0625$

波数: $q=2$　　$k_n=0.0625\cdot 2^n$

外力: $f\cdot\delta_{n,1}=5\ 10^3(1+i)$

粘性: $\nu=10^{-6}$

表 1: run パラメータ

	J	N	n_{max}	dt	ステップ数
run1	0	1	19	10^{-4}	10^8
run2	2	5	19	10^{-4}	6×10^7
run3	4	9	19	10^{-4}	2.5×10^7
run4	8	17	19	10^{-4}	2.5×10^7

4 Results

4.1 1 点統計

トータル エネルギー : $E(t)$, トータル エンストロフィー : $Q(t)$, スキューネス : $S_3(t)$, エネルギー散逸率 : ϵ の確率密度関数 (以下, PDF と書く) を J とともに見ていくことにする．

$Q(t)$ を図 1, 図 2 に示す． ここで $Q(t)$ の縦軸は, 初期値で割ってあり横軸は時間である． 図 1 と図 2 を見ると明らかに揺らぎが J を増加させるとともに小さくなっていくのが分かる． 同様に $E(t)$, $S_3(t)$ についても揺らぎが小さくなる． また定量的に表 2 に $E(t)$, $Q(t)$ の平均値を示す．

表 2 から $E(t)$, $Q(t)$ の平均値は, J を増加させるとともに増加していく． また $S_3(t)$ の平均値については J とともに減少していくことが分かった． エネルギー散逸率については $\ln\epsilon$ で扱う． そこで $\ln\epsilon$ についての PDF を図 3, 図 4 に示す． 横軸は $(\ln\epsilon-\overline{\ln\epsilon})/\sigma$ でとってある． σ は分散であり $\sigma^2=(\ln\epsilon)^2-\overline{(\ln\epsilon)^2}$ としている． 図から比較的 J を増加させても同じ形をしている． この形は正規

表 2: $E(t)$ と $Q(t)$ の平均値

	$E(t)$		$Q(t)$	
	平均	$\frac{1}{2J+1}$	平均	$\frac{1}{2J+1}$
J=0	0.2029	-	1.464×10^3	-
J=2	1.4000	0.28	1.135×10^4	2.27×10^3
J=4	2.8830	0.32	2.287×10^4	2.54×10^3
J=8	5.7230	0.34	4.659×10^4	2.74×10^3

分布 (Gauss 分布) の形といっしょである. ただ J が小さいと形が右に傾いている. この傾き加減も J とともに小さくなると思われる. またエネルギー散逸率の平均値 $\overline{\ln\epsilon}$ と分散を表 3 に示す.

表 3: $\ln\epsilon$ の平均と分散

	$\overline{\ln\epsilon}$	σ
J=0	-7.957	2.2
J=2	-4.286	0.998
J=4	-3.325	0.708
J=8	-2.467	0.505

表 3 から J を増加させるとともに平均値は増加していき, 分散は減少していく. これらのことにより ϵ の PDF は対数正規分布に近く, J についてもあまり依存していないことが分かる. この結果は, Praskovski & Oncley [9] (1997) による実験と比較できよう. 即ち実験ではレイノルズ数があまり高くないときには ($R_\lambda \cong 3200$), ϵ の PDF は対数正規分布に近いが R_λ が大きくなる ($R_\lambda \cong 12700$) と ϵ の PDF は対数正規分布からずれてくる. 従って, より高いレイノルズ数 (より小さい ν) で本モデルを数値積分する必要があろう.

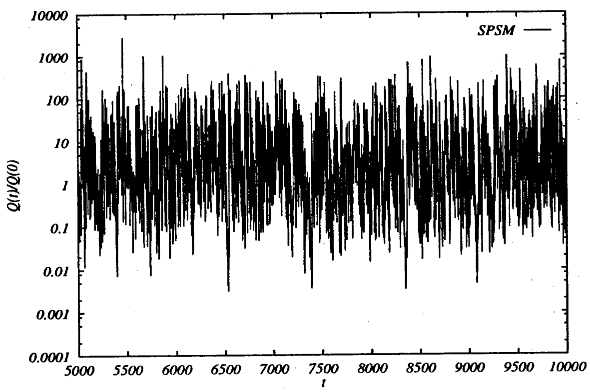

図 1. トータル エンストロフィー ($J=0$)

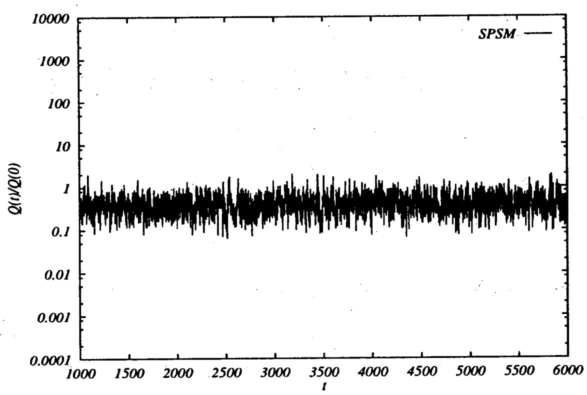

図 2. トータル エンストロフィー ($J=8$)

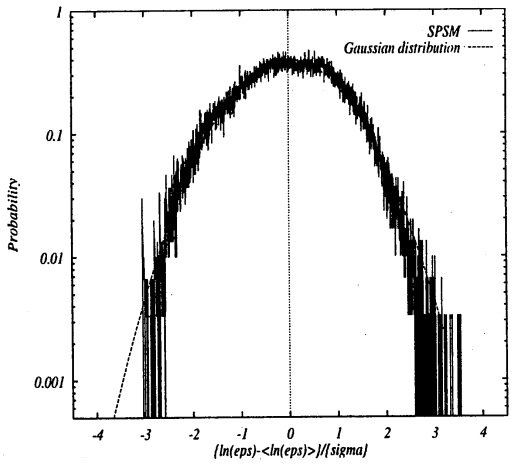

図 3. エネルギー散逸率 ($J = 0$)

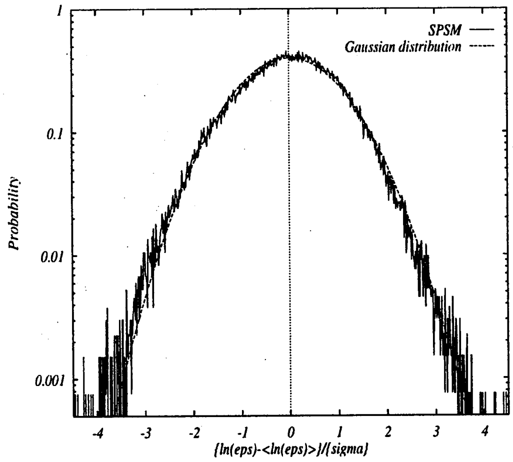

図 4. エネルギー散逸率 ($J = 8$)

4.2 2 点統計

ここではエネルギースペクトル : $E(k_n)$, Kolmogorov 定数 : K, 構造関数 : S_n^p, 速度の PDF : x_n, エネルギー流束関数 : $\Pi(k_n)$ を J を増加させるとともに見ていくことにする.

まず $E(k_n)$ から見ていこう. J について比較するためまず $E(k_n)$ を規格化することから始める. その手順を以下に示す.

$$k_d = \bar{\epsilon}^{1/4}\nu^{-3/4} \tag{18}$$

$$E(k_n/k_d) = \frac{E(k_n)}{\bar{\epsilon}^{1/4}\nu^{5/4}} \tag{19}$$

ここで k_d は Kolmogorov 波数とよばれる. この規格化された $E(k_n/k_d)$ を横軸 k_n/k_d として図 5 に示す. また $J = 0 \sim 8$ との比較として Kolmogorov の $-5/3$ 乗の傾きをもつ直線も示した. 図 5 からエネルギースペクトルは $-5/3$ 乗の傾きをもつとみなせるだろう. また高波数域で J を増加させる程エネルギースペクトルの落ちが急激になっているのが見てとれる. 図 5 からは $-5/3$ 乗と見てとれるが, 拡大してみたら本当に $-5/3$ 乗になっているのか疑問である. そこで $E(k_n/k_d)$ に $k_n^{5/3}$ を掛けると直線になるか見てみた. 実際は

$$K' = \bar{\epsilon}^{-2/3}k_n^{5/3}E(k_n) \tag{20}$$

をしている. この K' が定数となれば $-5/3$ 乗になっていることを表す. しかし K' は定数とならず, 平行線から傾き δ をもっているように思える. そこで

$$E(k_n) = K\bar{\epsilon}^{2/3}k_n^{-5/3}(k_n\eta)^{-\delta} \tag{21}$$

$$K = \bar{\epsilon}^{-2/3}k_n^{5/3}(k_n\eta)^{\delta}E(k_n) \tag{22}$$

と考えて δ と K を数値計算した結果を表 4 にまとめた.
この表 4 から J を増加させるとともに $-5/3$ 乗に漸近していく様子が分かる. K は J とともに増加していく. しかし $\delta = 0$ になったとき K はある有限な値に収束することが期待される.

つぎに構造関数 : S_p^n について見ていく. S_p^n は Pierotti の論文の中の定義式を用いる. その式を以下に示す.

$$\Delta_n(N) = \sum_{\alpha\beta\gamma=-J}^{J} W_N^{\alpha\beta\gamma}$$
$$\times \left[x_n^\alpha\left(x_{n+1}^\beta y_{n-1}^\gamma + y_{n+1}^\beta x_{n-1}^\gamma\right) + y_n^\alpha\left(x_{n+1}^\beta x_{n-1}^\gamma - y_{n+1}^\beta y_{n-1}^\gamma\right)\right] \tag{23}$$

表 4: δ と K

	δ	K
J=0	-0.0386	0.8397
J=2	-0.0296	0.8818
J=4	-0.0123	0.9162
J=8	-0.0045	0.9378

$$\Pi_n(N) = -Real\left(\Delta_{n+1}(N) + \frac{1-\varepsilon}{2}\Delta_n(N)\right) \tag{24}$$

$$\sum_p^n(N) = \left\langle |\Pi_n(N)|^{p/3} \right\rangle \tag{25}$$

$\sum_p^n(N)$ を S_p^n の代わりに使う. なぜ代用できるか簡単に確かめてみる.

$$\begin{aligned} S_p(r) &= \langle |\delta_{\boldsymbol{r}} u|^p \rangle \\ &\sim r^{\zeta_p} \qquad\qquad r \sim \frac{1}{k} \\ &\sim k^{-\zeta_p} \end{aligned} \tag{26}$$

今回使う構造関数については

$$\begin{aligned} \sum_p^n(N) &= \left\langle |\Pi_n(N)|^{p/3} \right\rangle \sim \langle |x_n|^p \rangle \\ &\sim k_n^{-\zeta_p(N)} \end{aligned} \tag{27}$$

となり, 粗く確かめられる. ここで Kolmogorov の理論では $\zeta_p = p/3$ となる. Eyink により j を増加させていくと K 41 scaling に漸近することが示唆されているので, 実際にそうなるのか確かめてみる. その結果を図 6 に示す. 縦軸は ζ_p, 横軸は p としている. 図 6 から明らかなように j を増加させると $p/3$ 乗に漸近していくことが分かる.

つぎに速度の PDF について見てみよう. 散逸領域 ($n = 16$) についての PDF を図 7, 図 8 に示す. 横軸はどちらとも x_n/σ である. ここで $\sigma^2 = x_n^2 - \langle x_n^2 \rangle$ である. それぞれの図に Gauss 分布を重ねてある. 慣性領域, 散逸領域ともにいえることだが, J を増加させるとともに Gauss 分布に漸近していく様子が分かる. 散逸領域については明らかに $J = 0$ のとき乱流の特徴的性質を示すのに $J \to$ 大にするに従い Gauss 分布に漸近している.

最後に $\Pi(k_n)$ の PDF について見ていく. 慣性領域 ($n = 7$) についての PDF を図 9, 図 10 に示す. 横軸はどちらとも $\Pi(k_n)/\sigma$ である. ここで $\sigma^2 = \Pi(k_n)^2 - \langle \Pi(k_n)^2 \rangle$ である. 図 9, 図 10 を見ると J を増加させると図の負の値の頻度が増してくる. このことは, ある波数をよぎるエネルギーが大きな波数へいく順輸送だけでなく逆輸送 (小さな波数へ) も起こってくることを表している. また $\Pi(k_n)/\sigma = 0$ あたりでの尖り具合が J とともに鈍ってくる様子が見られる. 散逸領域では, 大きな波数への順輸送ばかりである. ここでも慣性領域同様, 尖り具合が鈍る.

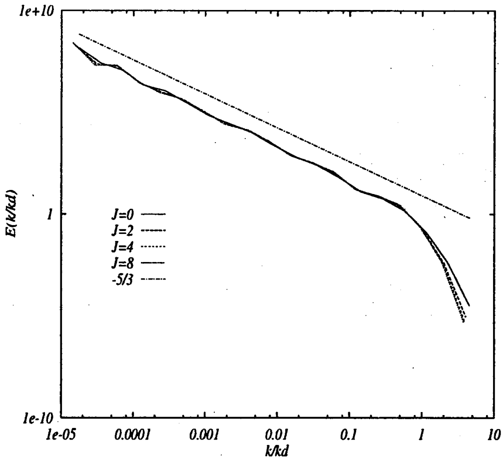

図 5. エネルギースペクトルの比較

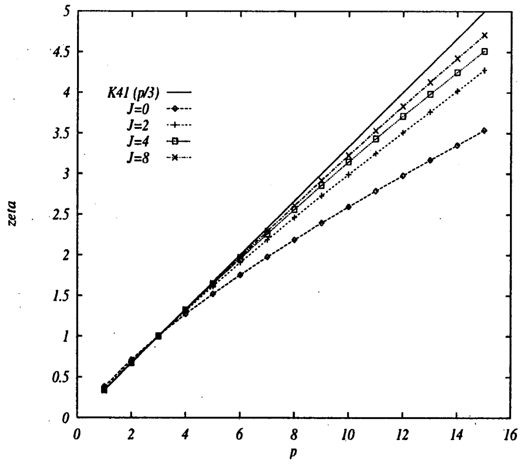

図 6. $p/3$ 乗と $\zeta_p(N)$ の比較

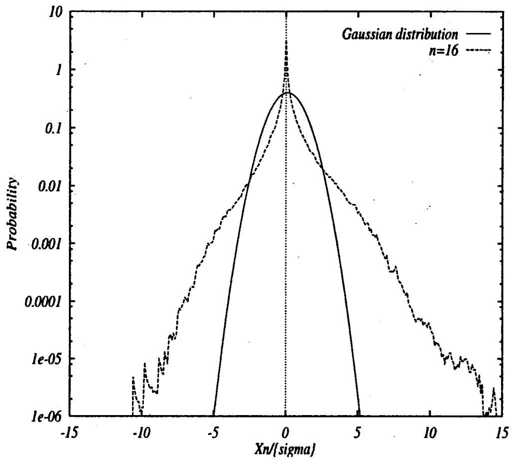

図 7. 散逸領域 ($n = 16$) での速度の PDF ($J = 0$)

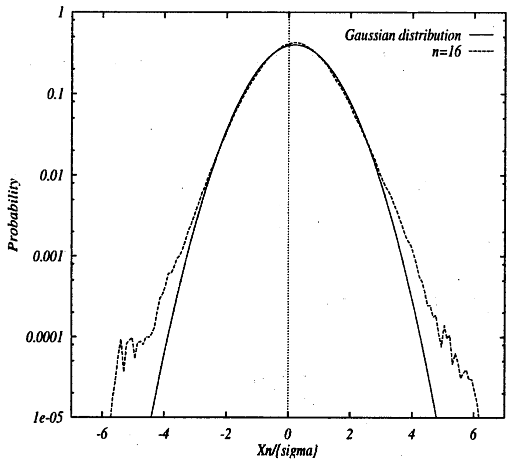

図 8. 散逸領域 ($n = 16$) での速度の PDF ($J = 8$)

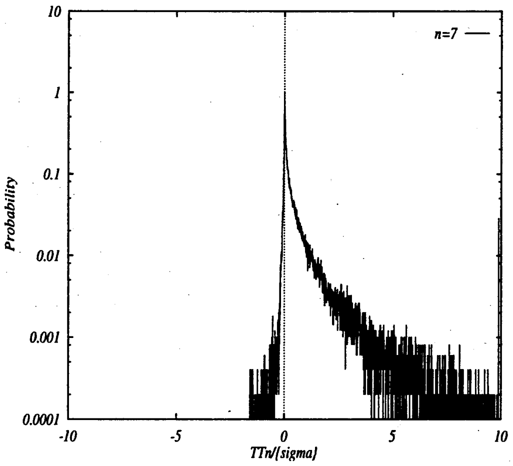

図 9. 慣性領域 ($n = 7$) でのエネルギー流束関数の PDF($J = 0$)

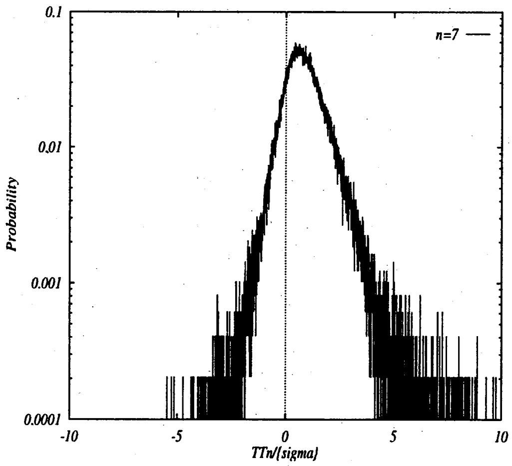

図 10. 慣性領域 ($n = 7$) でのエネルギー流束関数の PDF($J = 8$)

5 Conclusions

結果を以下にまとめる。
· 1 点統計について

トータル エネルギーとトータル エンストロフィー

- J とともに平均値が増加していく.
- J とともに揺らぎが減少していく.

スキューネス

- J とともに平均値が減少していく.
- J とともに揺らぎが減少していく.

エネルギー散逸率の PDF

- J とともに平均値が増加していく.
- J とともに分散が減少していく.
- 今研究においては,J によらず lognormal に近い.

· 2 点統計について

エネルギースペクトルと Kolmogorov 定数

- J を増加させると K 41 scaling に漸近する.
- 今研究の J の範囲では Kolmogorov 定数は J とともに増加している.

構造関数

- J を増加させると K 41 scaling に漸近する.

速度の PDF

- 慣性領域・散逸領域とも J とともに K 41 scaling に漸近していく.

エネルギー流束関数の PDF

- 慣性領域において J を増加させると逆輸送が起こる.

全体を通して言えることは, $J \to$ 大にもっていくと確かに 2 点統計をみると K 41 の理論に漸近することが確かめられた.

今後の展望として, Kolmogorov 定数 K が J をどのくらい増加させると収束するのかを見ていくことに興味がある.

参考文献

[1] E. B. Gledzer 1973 *"System of hydrodynamic type admitting two quadratic integrals of motion."* Sov. Phys. Dokl. **18,** 216-217.

[2] M. Yamada & K. Ohkitani 1987 *"Lyapunov Spectrum of a Chaotic Model of Three-Dimensional Turbulence."* Journal of the Physical Society of Japan **56,** 4210-4213.

[3] R. H. Kraichnan 1959 *J. Fluid Mech.* **5,** 32.

[4] R. H. Kraichnan 1961 *J. Math. Phys.* **2,** 124.

[5] ランダウ＝リフシッツ．好村滋洋 訳 1970 "量子力学 *2*"

[6] C.-Y. Mou & P. B. Weichman 1993 *"Spherical Model for Turbulence."* Phys. Rev. Lett. **70,** 1101-1104.

[7] Gregory L. Eyink 1994 *"Large-N limit of the "spherical model" of turbulence."* Phys. Rev. **E49,** 3990-4002.

[8] D. Pierotti 1994 *"Intermittency in the large N-limit of a spherical shell model for turbulence."* Department of Physics, University of L' Aquila.

[9] Praskovski & Oncley 1997 *Fluid Dyn. Res.*

[10] 後藤俊幸 1995 "乱流理論の基礎知識." ながれ. **14,** 4 号.

[11] 後藤俊幸 1995 "乱流の統計理論の基礎知識." ながれ. **14,** 5 号.