

## 2次元乱流系における秩序構造形成と動的スケーリング則

渡邊 威 (Takeshi Watanabe) (九州大学理学部物理学科)  
岩山 隆寛 (Takahiro Iwayama) (神戸大学大学院自然科学研究科地球環境科学専攻)  
藤坂 博一 (Hirokazu Fujisaka) (京都大学大学院情報学研究科複雑系科学専攻)  
岡本 壽夫 (Hisao Okamoto) (高知大学理学部情報科学科)

### 1 はじめに

近年の2次元乱流の理論的, 数値的研究を通して, 実空間における秩序渦が2次元乱流のダイナミクスやその統計性に果たしている役割が注目されており, 特に2次元減衰性 Navier-Stokes(NS) 乱流の時間発展を通して詳しく調べられている [1, 2, 3]. この時間発展において, 秩序渦の集団が系の動力学を支配しているいわゆる第2ステージでは, 秩序渦は2次元渦糸系のハミルトニアン動力学によって近似的に記述される相互移流を起こし, 同符号の循環を持った渦は臨界距離以内に近付くと合併し, より大きな渦へと発展していく. この過程における秩序渦集団の時間発展は, 秩序渦の諸量を用いて表現されるスケーリング理論 [4, 5, 6] で非常に良く特徴づけられることが DNS や point vortex model を用いた数値計算で確かめられており, スケーリング理論を特徴づけるスケーリング指数も理論的に導出されている [7].

最近 Charney-Hasegawa-Mima(CHM) 方程式で記述される2次元乱流の研究が理論的, 数値的に活発に行なわれている. この方程式は一様で強い磁場がプラズマ中に印加されている時, 磁場に垂直な面内における静電ポテンシャルの2次元的な変動を記述したものであり [8], また惑星大気において地衡流平衡にある流れの時間発展を近似的に記述する方程式で, 準地衡流渦位方程式と呼ばれていて [9], 波の効果が無視できる強い乱流状態では次のように書ける:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\phi, q) = 0, \quad q(\mathbf{r}, t) = (\nabla^2 - \lambda^2)\phi(\mathbf{r}, t). \quad (1)$$

ここで  $q(\mathbf{r}, t)$  はポテンシャル渦度を表し,  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $J(a, b) = a_x b_y - a_y b_x$  はヤコビアンを表す. また  $\phi$  はプラズマ中の静電ポテンシャル, あるいは準地衡流流れ関数を表し,  $\lambda$  はシステムサイズ  $L$  とイオンラモア半径, または大気中のロスビー半径との比を表す. (1) 式は2次元 Euler 方程式から導かれる渦度方程式に類似しており,  $\lambda \rightarrow 0$  の極限で両者は完全に一致する.  $\lambda \neq 0$  の場合, この方程式には特徴的な空間スケール  $\lambda^{-1}$  が存在し, 2次元 Euler 方程式とは異なる振舞いを示す.

CHM 方程式における乱流の研究に関しては, 減衰性乱流ではパラメーター  $\lambda$  の大きさに対する乱流場の統計的性質の依存性が数値的に詳しく調べられている [10]. また強制乱流に関しては, 小さなスケールで加えられる外力によって乱流が発達していく過程で, 十分な時間発展の後, ポテンシャル渦度場は渦による格子状のパターンを形成することが報告されており, 「vortical quasicrystallization」と呼ばれている [11, 12]. またこの形成過程における渦の動的性質が [12] の中で詳しく調べられており, エネルギー逆カスケード過程との対応から動的スケーリング則が導かれている. さらに (1) 式を基礎にしたモデルを使って, コヒーレント構造のダイナミクスに関する研究が強制, 減衰両方の場合に行なわれており [13], エネルギー逆カスケードの抑制効果とコヒーレント構造との関連が詳しく調べられている.

本研究で我々は (1) 式に弱い散逸を加えたモデルの直接数値シミュレーションにより,  $\lambda \gg k$  の場合, つまりドリフト・ロスビー波乱流を特徴づける領域に対し, コヒーレントな渦のダイナミクスを統計的な視点から調べた. コヒーレントな渦の構造は, 強制乱流よりむしろランダム強制力がない減衰性乱流の方がその個性が顕著に現れると考えられるため, 減衰性乱流の場合を詳しく調べた.

## 2 直接数値シミュレーション

我々は CHM 方程式で記述される乱流場でのコヒーレントな渦の発生とそのダイナミクスを調べるため、(1) 式の右辺に  $D = -\nu \nabla^4 (\nabla^2 \phi)$  の散逸項を加えた方程式を、擬スペクトル法 [15] を用い直接数値的に解いた。システムサイズは  $L = 2\pi$  で  $\lambda = 40$  に固定し、超粘性係数は  $\nu = 3.0 \times 10^{-8}$  とした。また空間解像度は  $256 \times 256$  で切断波数は 85 である。数値積分は  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$  の時間間隔で 4 次のルンゲ・クッタ法を用いた。計算は倍精度で行った。

初期条件は  $\phi$  の各フーリエ成分に平均値 0 の正規乱数を与えた。ただし波数空間における初期のエネルギースペクトル  $E(k)$  を

$$E(k) \sim \frac{k^{30}}{(k + k_0)^{60}} \quad (2)$$

で与えた。これは [10] の中で使われている初期条件と同じもので、 $k_0$  を中心とした非常に狭い波数バンド領域のスペクトルである。我々は  $k_0 > \lambda$  となるように  $k_0 = 50$  を選んだ。つまり初期状態において系のエネルギーはほとんど  $k > \lambda$  に集中していることになる。この初期条件の設定はコヒーレントな渦の構造が小さいスケールからどのように発展していくかを調べるに對し適当なものである。さらに初期状態における単位面積当りの全エネルギー、

$$E = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \frac{1}{2} [(\nabla \phi)^2 + \lambda^2 \phi^2] dx dy, \quad (3)$$

は 0.5 に規格化した。

ポテンシャル渦度場  $q(\mathbf{r}, t)$  の時間発展の様子を Fig.1 に示す。それぞれ (a)  $t = 10$ , (b)  $t = 100$  の時刻に對するものである。ランダムな初期状態から、渦度場はコヒーレントな渦の集団に向けて自己組織化を起こす。コヒーレントな渦は時間発展に伴い、そのサイズは大きくなっていき、個数はだんだん減っていく。これは乱流場において比較的距離が近い同符号の渦同士が相互移流を通して合併し、より大きい渦へと変化していくためである。このコヒーレントな渦は十分時間が経過した後はほとんど動かず、ポテンシャル渦度  $q$  の単極構造の集団になり、準定常的な状態に落ち着いていると考えられる。これは 2 次元減衰性 NS 乱流で良く知られているようなコヒーレントな渦のダイナミクス、つまりコヒーレントな渦の集団が相互移流と合併を通して乱流場を激しく動き回るものとは大きく異なっている。

## 3 ポテンシャル渦度場の波数空間における統計性と動的スケーリング則

ポテンシャル渦度場  $q$  の動的な統計的性質を詳しく調べるために、 $q$  の構造関数

$$S(k, t) = \left\langle \left| \int q(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right|^2 \right\rangle \quad (4)$$

を各時間に対し計算する。 $\langle \dots \rangle$  は波数空間における角度方向の平均を表す。構造関数が鋭いシングルピークを持つならば、ポテンシャル渦度場には特徴的な波数  $\bar{k}(t)$  が存在することになり、 $\bar{k}(t)$  の時間発展を調べることで、ポテンシャル渦度場における特徴的なスケール  $l = 2\pi/\bar{k}(t)$  の動的性質を調べることができる。ここで  $l$  はポテンシャル渦度場において、同符号のコヒーレントな渦の中心間の平均的距離と考えられる。 $\bar{k}(t)$  を構造関数を用いて次のように定義する：

$$\bar{k}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{\lambda} k S(k, t)}{\sum_{k=0}^{\lambda} S(k, t)}. \quad (5)$$

我々が考えている波数の領域は  $k \ll \lambda$  であるので、(5) 式の波数の上限は  $\lambda$  とした。さらに構造関数のシングルピークの高さを  $S_{max}(t)$  と置き、 $S_{max}(t)$  の時間発展も調べる。コヒーレントな渦の個数  $N$  は合併に伴って減少するので、渦間距離  $l$  (特徴的波数  $\bar{k}(t)$ ) は時間と共に増加 (減少) することが予想される。

Fig.2 に  $\bar{k}(t)$  と  $S_{max}(t)$  の時間発展の様子を示す。予想される通り  $\bar{k}(t)$  は時間発展と共に減少していくことがわかる。これはエネルギーの逆カスケード過程と密接につながっていると考えられる。一方  $S_{max}(t)$  は時間発展と共に増大する。図から  $\bar{k}(t), S_{max}(t)$  の両方とも時間  $t$  のべき乗に従って時間発展すると考えられ、 $\bar{k}(t) \sim t^{-0.2}, S_{max}(t) \sim t^{0.4}$  程度であると見積もられる。

エネルギー逆カスケード過程との対応を考えると、 $\bar{k}(t)$  と  $S_{max}(t)$  のべきの値は、次元解析の考察から次の様に見積もることができる。  $\lambda \gg k$  のとき、CHM 方程式の次元解析的スケーリングから、エネルギー輸送率は

$$\epsilon \sim E/t \sim \lambda^6 k^{-8} t^{-3} \quad (6)$$

で与えられる。いま考察している高 Reynolds 数の減衰性乱流では、十分時間が経過した後  $E$  は保存量とみなせる、即ち  $E \sim t^0$ 。この場合ある時刻  $t$  で消散する eddy の特徴的な波数  $k_t$  の時間に関するスケーリング則は

$$k_t \sim E^{-1/8} \lambda^{3/4} t^{-1/4} \quad (7)$$

で与えられる。

次に構造関数のスケーリング則は  $E \sim t^0$  として、 $\lambda \gg k$  の時を考慮すると、 $S(k, t) \sim E \lambda^2 k^{-2}$  が導ける。ここで  $\bar{k}(t) \sim k_t$  を仮定し、 $S_{max}(t) \approx S(\bar{k}(t), t)$  と見つめるなら、直ちに

$$S_{max}(t) \sim E^{5/4} \lambda^{1/2} t^{1/2} \quad (8)$$

が得られる。 $\bar{k}(t) \sim t^{-1/4}, S_{max}(t) \sim t^{1/2}$  は Fig.2 の数値計算の結果と良く一致していることがわかる。

さらに我々は時間発展に伴う構造関数  $S(k, t)$  の変化を調べるために、各時刻における  $S(k, t)/S_{max}(t)$  を  $k/\bar{k}(t)$  の関数としてスケーリングプロットした (Fig.3)。この図は、 $q$  の構造関数が次のような動的スケーリング則を満たしていることを示している：

$$\frac{S(k, t)}{S_{max}(t)} = G\left(\frac{k}{\bar{k}(t)}\right), \quad G(x) \sim x^{-\gamma} \quad (x > 1), \quad x^\delta \quad (x < 1). \quad (9)$$

ここで  $G(x)$  は universal なスケーリング関数で、べきの値は  $\gamma \approx 7, \delta \approx 3$  程度である。以前の論文 [12] で我々は強制力が加わった CHM 方程式において乱れが発達していく過程において  $\lambda$  より低波数側で動的スケーリング則が成立することを数値的に示し、スケーリング指数を理論的に求めた。ここで展開した議論は [12] と同様のものであり、減衰乱流の場合でも動的スケーリング則が成立していることがわかる。ただしスケーリング指数の値やスケーリング関数の関数形は強制乱流と減衰乱流の場合では異なっている。

## 4 実空間における秩序渦構造とその特性

前節では波数空間の時間発展に対し動的スケーリング則を議論したが、実空間においてはランダムな初期条件からコヒーレントな渦が自己組織化し、渦は相互移流を通して合併し、より大きな渦へと発展していく。このコヒーレントな渦のダイナミクスを議論するため、まずコヒーレントな渦の領域をポテンシャル渦度場から抜きだすことを考える。

我々は与えられたポテンシャル渦度場からコヒーレントな領域を取り出すために、 $\phi$  のガウシアン曲率  $Q$

$$Q = \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right), \quad (10)$$

が負になり、かつポテンシャル渦度の絶対値の平均  $\langle |q| \rangle$  よりも大きいポテンシャル渦度を持つ領域をコヒーレントな領域として定義した。なぜならコヒーレントな領域は安定な領域であり、 $Q$  は Lagrange 的粒子の安定性に関する目安になり [2, 6]、またコヒーレントな領域はポテンシャル渦度の絶対値が大きな領域

であると考えられるからである。Fig.4 に (a) $t = 10$ , (b) $t = 100$  のそれぞれの時刻において上記の条件によって取り出されたコヒーレント領域を示す。Fig.1 において得られたポテンシャル渦度場と比較すると、軸対称な渦の領域がほぼ取り出せていることがわかる。Fig.5 にコヒーレントな領域が全体に占める割合の時間変化の様子を示す。秩序渦が形成された後の時刻でこの割合は一定の値をとり、本論文で用いた初期条件に対しては 20% 程度である。これはコヒーレントな渦の領域の面積が時間変化に対し保存することを示しており、 $\lambda \gg k$  に対して、CHM 方程式が持つ重要な性質の一つであることが後に示される。

次にこのコヒーレントな渦の集団におけるエネルギーとポテンシャルエンストロフィーの振舞いについて考察する。2次元減衰性 NS 乱流中に出現するコヒーレントな渦の集団に対し、2つのエネルギー密度の表式  $v^2/2$  と  $-(\phi\omega)/2$  のコヒーレントな領域に渡る積分は全く異なる量であり、渦糸系のハミルトニアン力学との類推から後者の量がコヒーレントな渦の集団系のハミルトニアンで、根本的な保存量であることが理論的、数値的に示されている [6]。従って 2次元 NS 系との類推から今考察している系では  $-(\phi q)/2$  のコヒーレントな領域にわたる積分が秩序渦集団のハミルトニアンになると予想される。Fig.6 に我々のシミュレーションで得られたコヒーレントな渦の集団に対して、2つのエネルギー密度の表式  $-(\phi q)/2$  と  $[(\nabla\phi)^2 + \lambda^2\phi^2]/2$  のコヒーレントな領域  $S_{coh}$  に渡る積分、

$$E_1 = \frac{1}{L^2} \int_{S_{coh}} -\frac{1}{2}\phi q \, d\mathbf{r} = \frac{1}{L^2} \int_{S_{coh}} -\frac{1}{2}\phi(\nabla^2\phi - \lambda^2\phi) \, d\mathbf{r}, \quad (11)$$

$$E_2 = \frac{1}{L^2} \int_{S_{coh}} \frac{1}{2}[(\nabla\phi)^2 + \lambda^2\phi^2] \, d\mathbf{r}, \quad (12)$$

及び系全体の領域で積分されたエネルギー  $E$  の時間発展の様子を示す。 $E_1$  と  $E_2$  はもし全領域で積分されれば  $E$  と完全に一致するが、コヒーレントな領域で比べると異なっていることがわかる。これは、 $E_1$  と  $E_2$  の積分中に現れる  $(\nabla\phi)^2/2$  と  $-\phi(\nabla^2\phi)/2$  との違いである。ただし今我々は  $\lambda \gg k$  の場合を考えているので、これらの量は  $\lambda^2\phi^2/2$  をコヒーレントな領域で積分した量に比べると非常に小さく、十分時間が経過した後は  $E_1$  と  $E_2$  はほとんど同じになると考えられる。実際、Fig.6 では  $E_1$  と  $E_2$  の違いは時間発展するにつれて小さくなっていき、ほとんど同じオーダーで時間的にほぼ一定に落ち着いていくことがわかる。ただし  $E$  と  $E_1$  の時間に対する振舞い方がほとんど同じであることから、 $E_1$  がコヒーレントな領域では保存量になっていると考えるべきである。 $(\nabla\phi)^2/2$  と  $-\phi(\nabla^2\phi)/2$  との違いはエネルギーよりもむしろポテンシャルエンストロフィーの時間発展に顕著に現れる。

Fig.7 にコヒーレントな領域にわたる  $(\nabla^2\phi)q/2$  の積分、

$$U_1 = \frac{1}{L^2} \int_{S_{coh}} \frac{1}{2}(\nabla^2\phi)q \, d\mathbf{r} = \frac{1}{L^2} \int_{S_{coh}} \frac{1}{2}(\nabla^2\phi)(\nabla^2\phi - \lambda^2\phi) \, d\mathbf{r}, \quad (13)$$

とその領域にわたる  $[(\nabla^2\phi)^2 + \lambda^2(\nabla\phi)^2]/2$  の積分、

$$U_2 = \frac{1}{L^2} \int_{S_{coh}} \frac{1}{2}[(\nabla^2\phi)^2 + \lambda^2(\nabla\phi)^2] \, d\mathbf{r}, \quad (14)$$

そして全領域で積分されたポテンシャルエンストロフィー  $U$  の時間発展の様子を示す。 $U_1$  と  $U_2$  は全空間で積分された時  $U$  に一致することを注意しておく。 $U_1$  は  $U$  の大部分の量を占めており、時間発展も  $U$  とほとんど同じべき則を示し、図から  $U_1 \sim t^{-0.5}$  程度と見積もられる。ところが  $U_2$  は  $U$  や  $U_1$  に比べて非常に小さい量になっていて、減少の仕方も  $U$  や  $U_1$  より速く、 $U_2 \sim t^{-0.7}$  程度である。これは  $U_1$  と  $U_2$  の被積分関数の中に現れる  $-(\lambda^2\phi\nabla^2\phi)/2$  と  $[\lambda^2(\nabla\phi)^2]/2$  のコヒーレントな領域にわたる積分の違いが  $\lambda \gg k$  の場合には重要になってくるためである。 $\lambda$  が定数であることを考慮すると、この違いは  $E_1$  と  $E_2$  の被積分関数の第一項の違いと同じである。 $U_1$  と  $U_2$  は明らかに異なる量であることを考慮すると、コヒーレントな領域におけるポテンシャルエンストロフィーは  $U_1$  が  $U$  と同じオーダーで同様な時間発展を示すことから、 $U_1$  はコヒーレントな領域でのポテンシャルエンストロフィーであると考えられる。 $E_1$  や  $U_1$  は共に渦に付随した量をコヒーレントな領域で積分したものであり、コヒーレントな領域では  $E_2$  や  $U_2$  とは明らかに違う物理量になっていることに注意しなければならない。

## 5 秩序渦集団の物理量に対するスケーリング理論

本節では、コヒーレントな渦の集団のダイナミクスを現象論的に記述するために、2次元減衰性 NS 乱流の第二ステージで成立するような秩序渦の諸量、総数  $N$ 、渦の平均半径  $r_a$  等、が時間と共に代数的に発展するスケーリング理論 [4] と同様のスケーリング理論を考える。つまり我々のシミュレーションにおいて、ランダムな初期条件から自己組織化したコヒーレントな渦の集団が系のダイナミクスを支配していると考えて、これらに付随するエネルギー  $E_1$  とポテンシャルエンストロフィー  $U_1$  を渦の諸量を用いて次元解析的に表現する。

我々は  $\lambda \gg k$  の場合を考えているので、ポテンシャル渦度  $q$  は  $q = \nabla^2 \phi - \lambda^2 \phi \approx -\lambda^2 \phi$  で書けると仮定し、 $E_1$  と  $U_1$  をコヒーレントな渦の個数  $N$ 、その平均半径  $r_a$ 、渦の中心における  $q$  の平均値  $q_a$  を用いて次のように表現する：

$$E_1 \approx \frac{1}{L^2} \int_{S_{coh}} \frac{1}{2} \lambda^2 \phi^2 d\mathbf{r} \sim N \lambda^{-2} q_a^2 r_a^2, \quad (15)$$

$$U_1 \approx -\frac{1}{L^2} \int_{S_{coh}} \frac{1}{2} \lambda^2 \phi \nabla^2 \phi d\mathbf{r} \sim N \lambda^{-2} q_a^2. \quad (16)$$

$E_1$  と  $q_a$  は高レイノルズ数の極限で系の保存量であることを考慮すると、

$$N r_a^2 \sim t^0 \quad (17)$$

となる。これは系全体に対してコヒーレントな領域が占める割合が時間変化に対し、一定であることをいっているに外ならず、Fig.5 の結果からも支持できるものである。

もし渦の個数が

$$N(t) \sim t^{-\chi} \quad (18)$$

に従って振舞うならば、(15), (16), (18) 式から

$$r_a(t) \sim t^{\chi/2}, \quad U_1(t) \sim t^{-\chi}, \quad l_a(t) \sim \frac{1}{\sqrt{N(t)}} \sim t^{\chi/2}, \quad (19)$$

が導ける。 $l_a$  は渦間の平均距離を表す。即ち、渦の諸量の動的スケーリング指数は全て  $\chi$  によって表現できる。

我々は3節で  $q$  の構造関数のピーク位置に相当する波数の時間発展を DNS の結果から計算して求め、これが次元解析から得られた結果  $\bar{k}(t) \sim E^{-1/8} \lambda^{3/4} t^{-1/4}$  と良く一致していることを示した。 $\bar{k}(t)$  の逆数は、同符号渦間の平均距離でありここでは  $l_a$  に相当すると考えられる。この時  $l_a$  のスケーリング則は

$$l_a(t) \sim \frac{1}{\bar{k}(t)} \sim t^{1/4} \quad (20)$$

となり、独立なスケーリング指数  $\chi$ 、

$$\chi = \frac{1}{2} \quad (21)$$

が決定される。したがって他の渦の諸量の動的スケーリングは、

$$N(t) \sim t^{-1/2}, \quad r_a(t) \sim t^{1/4}, \quad U_1(t) \sim t^{-1/2}, \quad (22)$$

と求められる。ここでただちに比較できるのは  $U_1(t)$  のべき値である。Fig.7 から  $U_1(t) \sim t^{-1/2}$  は計算結果に対し少し小さい傾向にあるが、良く一致している。

ここでは渦の平均半径  $r_a(t)$  の時間発展  $r_a(t) \sim t^{1/4}$  が、渦間平均距離のそれ  $l_a(t) \sim t^{1/4}$  と同じスケーリングにしたがっていることに付いて考察する。実空間におけるコヒーレントな渦は、同符号の渦は合併し、より大きな領域を占める渦の集団へと変化していくが、コヒーレントな領域の面積は一定に保たれなが

ら渦の数はしだいに減少していき, 同符号渦間距離は増大していく. この過程で  $r_a(t)$  と  $l_a(t)$  の増大する割合が同じであるということは, ポテンシャル渦度場  $q$  は時間変化に対し自己相似的に発展していくと考えることができる. このことは  $q$  の構造関数が動的スケーリング則を満たしているという 3 節の結果からも結論づけることができる.

## 6 ハミルトン動学的移流の考察によるスケーリング指数 $\chi$ の現象論的導出

2次元減衰性 NS 乱流において, その第 2 ステージにおけるコヒーレントな渦の集団のダイナミクスはいわゆる point vortex model

$$\Gamma_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \Gamma_i \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (23)$$

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j \log(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (24)$$

に良く従い [2], 渦の合併を考慮にいたした modified point vortex model でもスケーリング理論が成立することが確認されている [5]. 一方, CHM 方程式に対しても point potential vortex model が考案されていて [16, 17], 盛んに研究が行なわれている. 今の場合, (23) 式のハミルトニアン  $H$  が

$$H = \frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j K_0(\lambda |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (25)$$

に変わるだけである. このハミルトニアンに従う point potential vortex のダイナミクスが CHM 方程式で記述される乱流中のコヒーレントな渦の集団のダイナミクスを記述していると考えられる.

ここで, 渦のハミルトン動学的移流の考察からスケーリング指数  $\chi$  の導出を行う. 渦の中心の移流速度  $u_a$  は (23) 式から

$$u_a \sim \frac{H}{\Gamma_a l_a} \quad (26)$$

でスケールされると考える. 2次元減衰性 NS 乱流ではハミルトニアン  $H \sim N r_a^4 \omega_a^2$  と  $\omega_a$  が保存量である.  $l_a \sim t^{\xi/2}$ ,  $\Gamma_a \sim t^{\xi/2}$ , (26) 式から  $u_a \sim t^{-\xi}$  が, さらに渦の混合が十分に起こり, 流れ場が等方的になるとこれが渦の移流の相対速度  $u_a \sim dl_a/dt$  に等しくなると考えて  $\xi = 2/3$  が導かれる [7]. CHM 方程式では  $E_1$  を CHM 方程式に特徴的な秩序渦集団のハミルトニアン  $H$  と仮定すると, (15) 式から  $H \sim N r_a^2 \lambda^{-2} q_a^2$  と表される. (19) 式から  $\Gamma_a \sim t^\chi$ ,  $l_a \sim t^{\chi/2}$  を (26) 式に代入すると,

$$u_a \sim t^{-3\chi/2} \quad (27)$$

が導かれる. これは時間発展に伴い, 渦の移流速度が遅くなることを表しており, シミュレーションの結果からも支持できると考えられる. さらに秩序渦の移流速度が渦間距離の時間変化, すなわち渦の相対速度に等しいと仮定すると,

$$u_a \sim \frac{dl_a}{dt} \sim \frac{l_a}{t}, \quad (28)$$

(19), (27), (28) 式から

$$\chi = \frac{1}{2} \quad (29)$$

が導かれる. つまり波数空間におけるエネルギー逆カスケードのスケーリング理論から得た値 ((21) 式) と実空間での渦の諸量を用いたスケーリング理論から渦の移流速度をスケールして求めた指数が完全に一致することになる.

## 7 まとめ

我々は CHM 方程式で記述される減衰性乱流において、コヒーレントな渦が自己組織化し、時間発展していく際に、波数空間内の  $\lambda \gg k$  の領域での統計的性質と、実空間におけるコヒーレントな領域での動的性質を調べた。その結果をまとめると次のようである。

1) 波数空間の時間発展に対し、ポテンシャル渦度の構造関数は動的スケーリング則を満足することを見出し、数値計算の結果と良く一致することがわかった。

2) 実空間における秩序渦集団の時間発展に対しスケーリング理論を構築し、2次元減衰性 NS 乱流との類推から考察し、DNS の結果から得られた解析結果と良く一致していることを示した。特に重要な結果は、コヒーレントな渦の領域が渦の合併が盛んな時間領域においてでさえ、一定に保たれていることである。

3) スケーリング理論を特徴づけるスケーリング指数  $\chi$  の値が  $\chi = 1/2$  になることを波数空間のスケーリングの考察と、実空間の渦の動力学的移流の考察という全く異なる考察から同じ値がそれぞれ独立に導きだせた。またこの値が数値計算の結果とよく一致していることがわかった。

## 参考文献

- [1] J. C. McWilliams, *J. Fluid Mech.* **146**, 21 (1984).
- [2] R. Benzi, S. Patarnello and P. Santangelo, *J. Phys. A:Math. Gen.* **21**, 1221 (1988).
- [3] J. C. McWilliams, *Phys. Fluids A* **2**, 547 (1990).
- [4] G. C. Carnevale, J. C. McWilliams, Y. Pomeau, J. B. Weiss and W. R. Young, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2735 (1991).
- [5] J. B. Weiss and J. C. McWilliams, *Phys. Fluids A* **5**, 608 (1993).
- [6] T. Iwayama and H. Okamoto, *Prog. Theor. Phys.* **96**, 1061 (1996).
- [7] T. Iwayama, H. Fujisaka and H. Okamoto, *Prog. Theor. Phys.* **98**, 1219 (1997).
- [8] A. Hasegawa and K. Mima, *Phys. Fluids* **21**, 87 (1978).
- [9] J. Pedlosky, *Geophysical fluid dynamics* (Springer-Verlag, New York, 1987).
- [10] V. D. Larichev and J. C. McWilliams, *Phys. Fluids A* **3**, 938(1991).
- [11] N. Kukharkin, S. A. Orszag, and V. Yakhot, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2486(1995).
- [12] T. Watanabe, H. Fujisaka and T. Iwayama, *Phys. Rev. E* **55**, 5575 (1997).
- [13] C. Ferro Fontan and A. Verga, *Phys. Rev. E* **52**, 6717 (1995).
- [14] M. Ottaviani and J. Krommes, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2923 (1992).
- [15] S. A. Orszag, *Stud. Appl. Math.* **100**, 293 (1971).
- [16] M. Kono and W. Horton, *Phys. Fluids B* **3**, 3255 (1991).
- [17] N. J. Zabusky and J. C. McWilliams, *Phys. Fluids* **25** (1982).

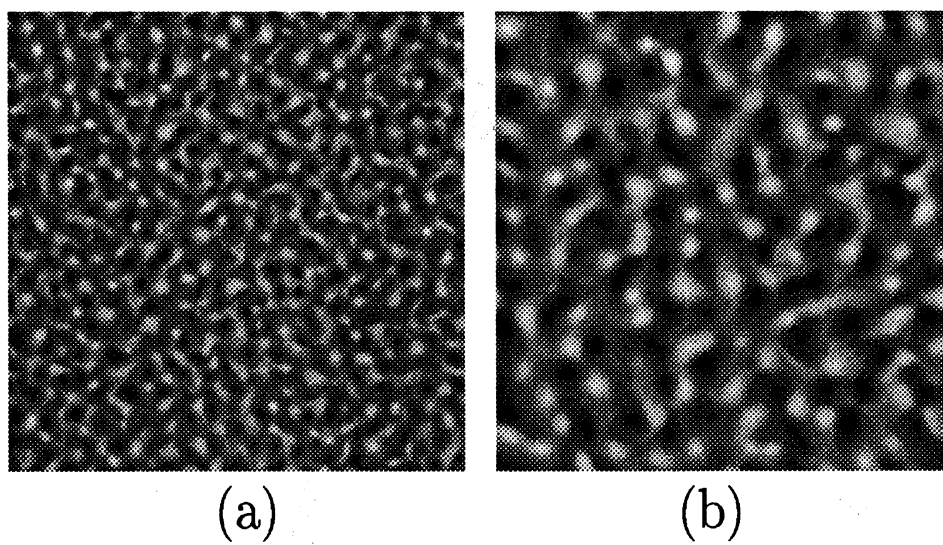


Fig.1

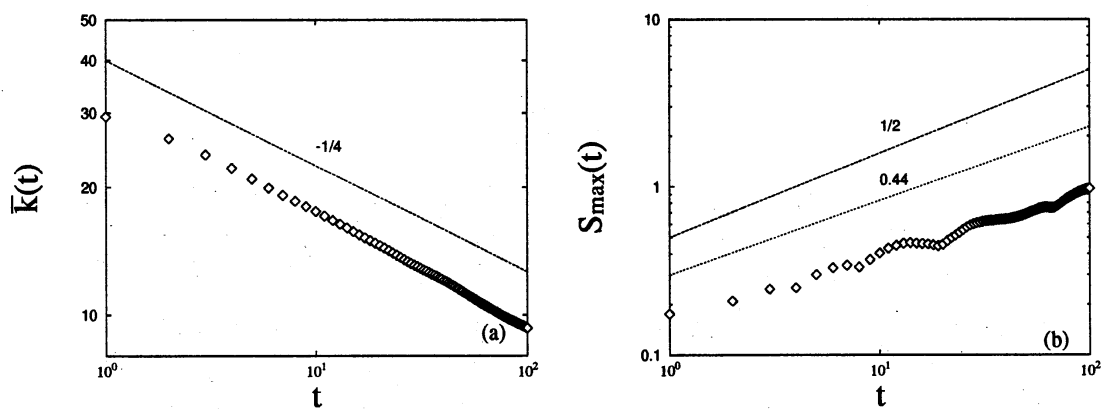


Fig.2



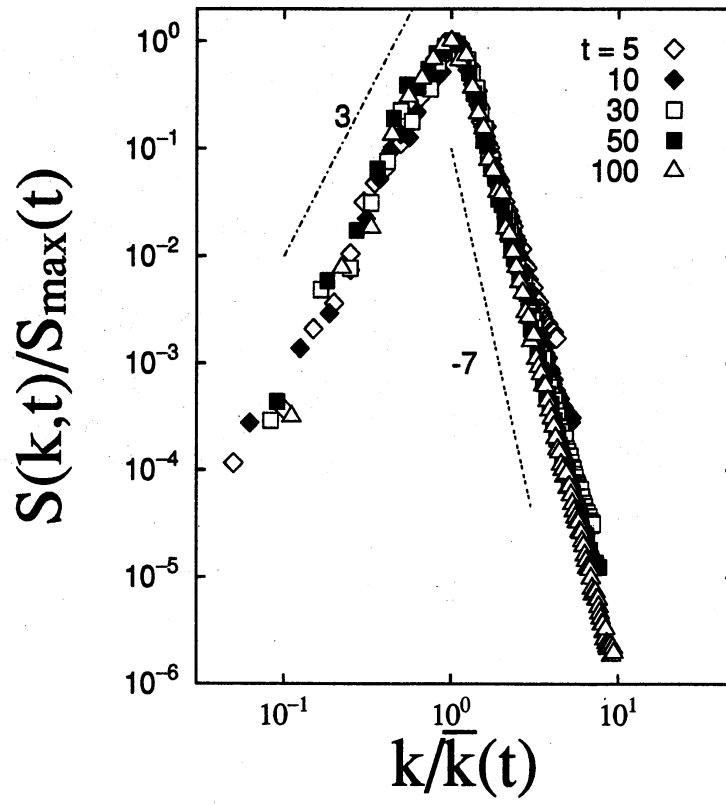
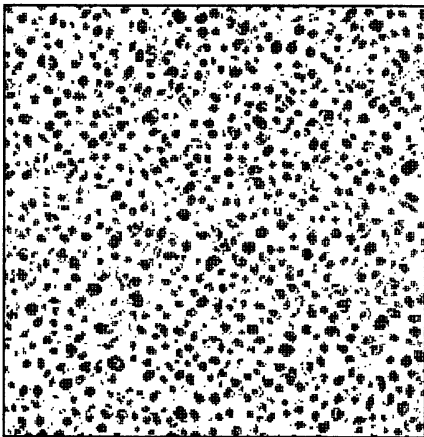
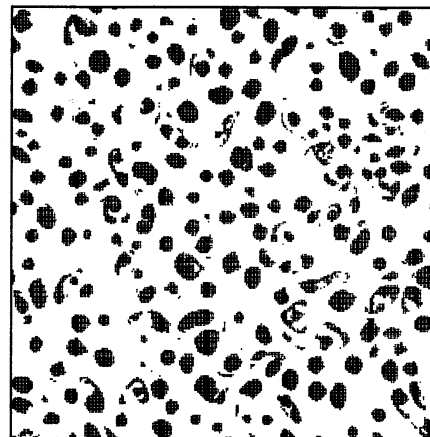


Fig.3



(a)



(b)

Fig.4

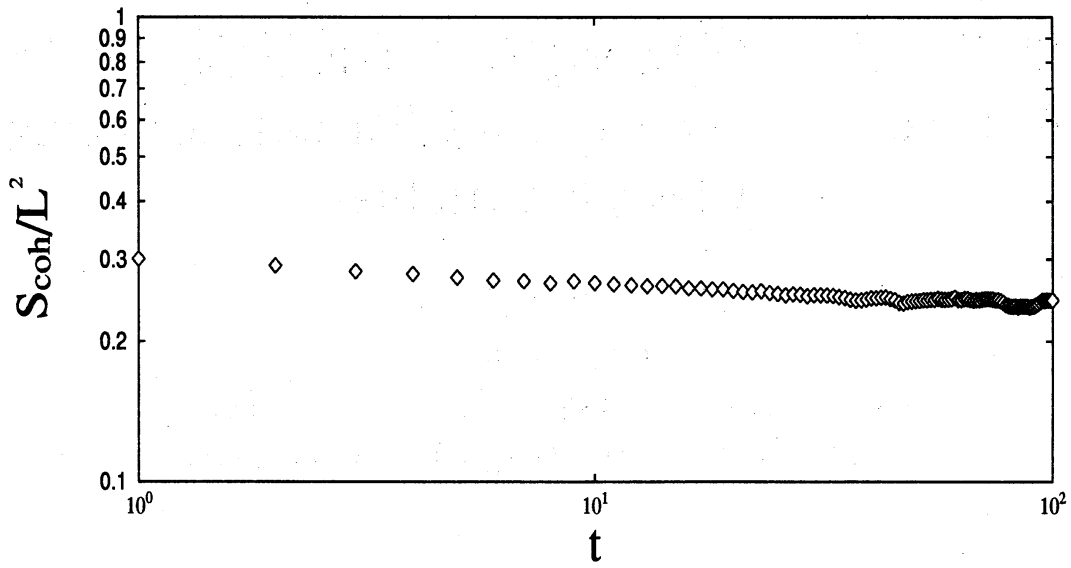


Fig.5

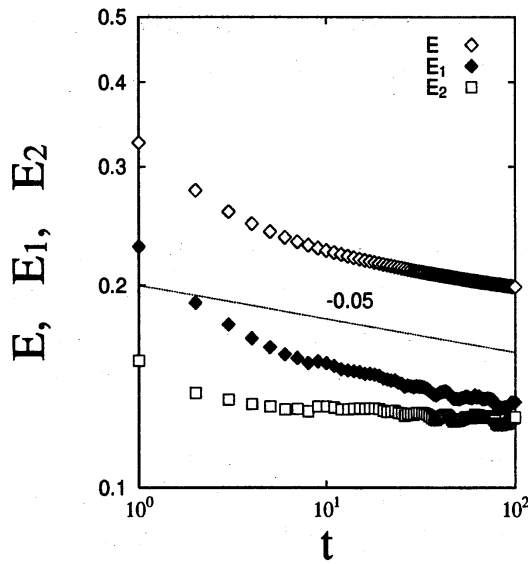


Fig.6

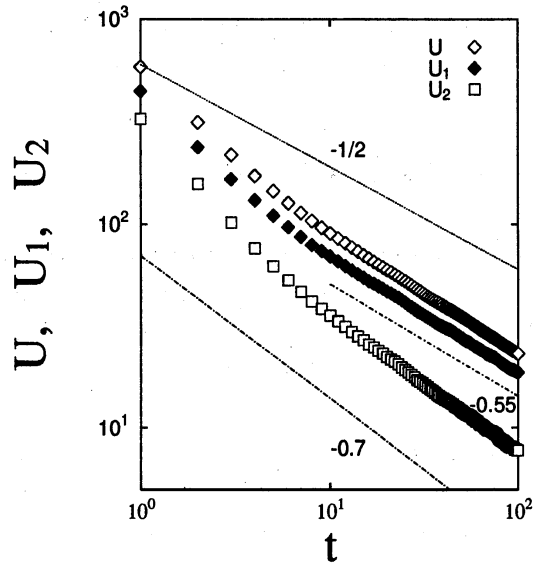


Fig.7