

## 直接相互作用近似の成立条件および Reynolds 数逆展開との関係

総合研究大学院大学 後藤 晋 ( SUSUMU GOTO )  
核融合科学研究所 木田 重雄 ( SHIGEO KIDA )

直接相互作用近似の成立条件を Navier-Stokes 方程式とよく似た性質をもつモデル方程式に対して詳しく調べる。その結果、この近似は系の自由度が十分大きく、かつ非線形結合の強さが一様等方乱流場の程度に弱い場合によく成り立つことが示される。さらに、Reynolds 数逆展開と、直接相互作用近似との関係を明確にする。これら 2 つの近似理論は、いくつかの力学系に対して同一のクロージャー方程式系を導くが、両者は全く異なる概念に基づく近似法であり、明確に区別される必要がある。

### 1 はじめに

直接相互作用近似 (direct-interaction approximation, DIA) は Kraichnan [1] により導入されたクロージャー理論 (§3.1 参照) であるが、その理論の本質はしばしば誤解されているように思われる。本研究においては、この近似の意味を明らかにした上で、その適用限界を詳しく調べる。このとき Navier-Stokes 方程式のような大規模な非線形系を扱うことはいたずらに労力を大きくし、全体を不透明で分かりづらなものとする可能性がある。そこで、本研究では特に直接相互作用という概念に注目して Navier-Stokes 方程式とよく似た性質をもつモデル方程式を構築し、その統計的な性質を詳しく調べることにより、上記の目的を達成する。

なお、本稿は、文献 [2] の内容に基づくもので、詳しい計算はこの文献にゆずることにし、以下では、より簡明な解説を試みたい。

### 2 モデル方程式

まず、参考のために、非圧縮性流体の支配方程式を考える。この系は運動方程式である Navier-Stokes 方程式および連続の式に支配される。流体が一辺  $L$  の立方体の中に閉じ込められているとし、周期境界条件を課すと、これらの方程式より、速度場の Fourier 成分  $\tilde{u}_i(\mathbf{k}, t)$  ( $\mathbf{k}$  は波数) の支配方程式として、

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right] \tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) = -\frac{i}{2} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 \tilde{P}_{ijm}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}} \tilde{u}_j(-\mathbf{p}, t) \tilde{u}_m(-\mathbf{q}, t) \quad (2.1)$$

$(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0})$

を得る。以下、これを Navier-Stokes 方程式とよぶことにする。ただし  $\tilde{P}_{ijm}(\mathbf{k}) = k_m \tilde{P}_{ij}(\mathbf{k}) + k_j \tilde{P}_{im}(\mathbf{k})$ ,  $\tilde{P}_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ , そして  $\nu$  は流体の動粘性係数である。ここで、式 (2.1) の右辺の非線形項に注目されたい。この項は、 $\tilde{u}_j(\mathbf{p}) \tilde{u}_m(\mathbf{q})$  の  $\mathbf{p}$  および  $\mathbf{q}$  についての和として表されているが、実際には、すべての波数  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  についての和を取っているのではなく、 $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$  を満足する項のみの和となって

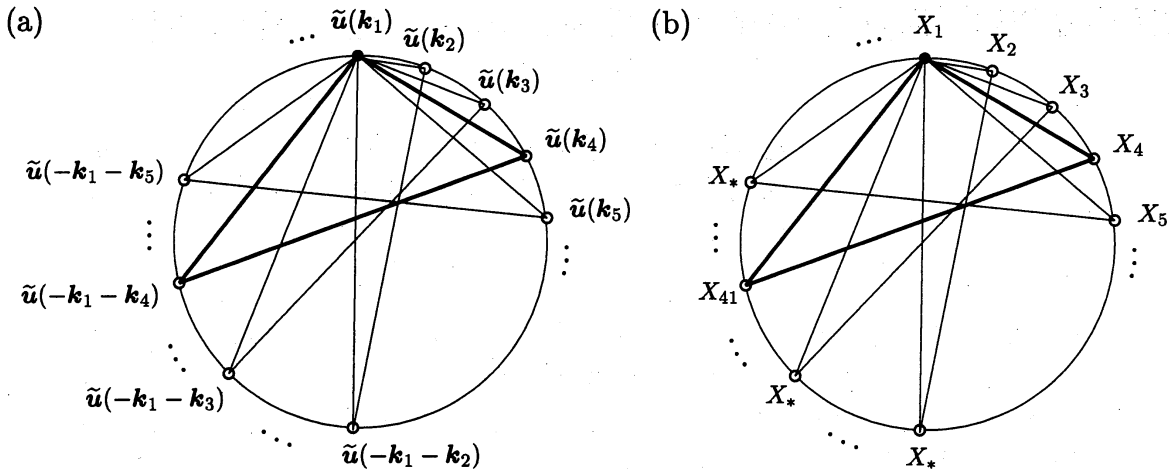


図 1: 直接相互作用 (a) Navier-Stokes 方程式 (2.1) において  $\tilde{u}(k_1)$  と他のモードとの直接相互作用を模式的に表す. 便宜上描いた円周上に Fourier モードを並べ, 直接相互作用を三角形で表す. 方程式の性質から, たとえば, 2つのモード  $\tilde{u}(k_1)$  および  $\tilde{u}(k_4)$  の間には  $\tilde{u}(-k_1 - k_4)$  のモードを介したただひとつの直接相互作用しか存在しない. この性質は任意の2つのモード間において成り立つので, この系の非線形の結合は弱いと言える. (b) モデル方程式の直接相互作用を表す. (a) の場合と似た性質をもたせるために, 任意の2つモード間の直接相互作用の数は, 高々ひとつしかないように係数  $C_{ijk}$  は構築される.

いる. このことは, たとえば, 2つのモード  $\tilde{u}(k_1)$  および  $\tilde{u}(k_2)$  間には  $\tilde{u}(-k_1 - k_2)$  を介してただひとつの直接相互作用しか存在しないことを意味する. (支配方程式に直接現れる非線形相互作用のことを直接相互作用とよぶ.) これを模式的に表現したのが 図 1(a) である. 任意の2つのモード間の直接相互作用がただひとつしかないという系のこの性質を『非線形の結合が弱い』と表現することにする.

ここで, 非線形性の強さと非線形結合の強さとの区別に注意する. 前者は, 支配方程式における非線形項の線形項に対する寄与の大きさを表すものである. たとえば, 発達した乱流場では, これは非常に強い. しかし, そのような十分発達した乱流場であっても, その支配方程式が (2.1) で表されるような場合 (つまり一様等方乱流のように, 周期境界条件を課して Fourier 変換することが許されるような場合) なら, 系の非線形の結合は弱いと言える.

以上の考察に基づき, Navier-Stokes 方程式 (2.1) の重要な性質を保存したモデル方程式

$$\left[ \frac{d}{dt} + \nu \right] X_i(t) = \sum_j \sum_k C_{ijk} X_j(t) X_k(t) + F_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.2)$$

を導入する. ここで  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) が式 (2.1) における速度場  $\tilde{u}$  の役割を果たし,  $\nu$  はその類推で粘性係数とよばれ,  $F_i$  は平均値ゼロ, 分散  $2\nu/(N\Delta t)$  ( $\Delta t$  は外力を一定に保つ時間間隔) で, 時間方向もモード間もともに無相関な正規乱数外力である. このモデル方程式の統計的性質は定係数  $C_{ijk}$  の性質に強く依存するが, 基本的な性質として,

$$C_{ijk} = C_{ikj} \quad (2.3)$$

および

$$C_{ijk} + C_{jki} + C_{kij} = 0 \quad (2.4)$$

の2つを満足するものとする. 前者は適当な変数変換により必ず満足されるものである. 一方, 後者はエネルギーの詳細つりあい, つまり  $\{X_i, X_j, X_k\}$  間の直接相互作用がそれらのモードのもつエネルギー

ギーの総和  $X_i^2 + X_j^2 + X_k^2$  を変化させないという性質を保証するものである。さらに、第3の条件として「弱い非線形結合」の条件を課すことにする。ここで、図 1(b) を参照されたい。この図は、 $X_1$  のモードが他のどのモードと直接相互作用をもつかという情報を表すものである。たとえば、 $X_1$  と  $X_4$  とは、 $X_{41}$  を介してのみ直接相互作用をもつことになる。このように、任意の2つのモード  $\{X_i, X_j\}$  間には高々ひとつの直接相互作用しかないように係数  $C_{ijk}$  を構築する。以上の3つの条件に加えて、変数  $\{X_i\}$  が  $i$  について統計的に一様であるという対称性をもつような係数  $C_{ijk}$  を考えることにする。(係数の具体的な構築方法に関しては文献 [2] を参照されたい。)

### 3 直接相互作用近似

#### 3.1 クロージャーの目的

我々は非線形方程式 (2.2) に支配される力学系の統計的な性質を調べたい。このとき、最も基本的な統計量のひとつは、変数  $X_i$  の相関関数、

$$V_{ij}(t, t') = \overline{X_i(t) X_j(t')} \quad (t \geq t') \quad (3.1)$$

である。ここで  $\overline{\quad}$  は統計平均 (数値計算においては長時間平均) を表す。実際、基礎方程式 (2.2) より、相関関数  $V_{ij}$  の支配方程式

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \nu \right] V_{in}(t, t') = \sum_j \sum_k C_{ijk} \overline{X_j(t) X_k(t) X_n(t')} \quad (t > t'), \quad (3.2)$$

$$\left[ \frac{d}{dt} + 2\nu \right] V_{in}(t, t) = \sum_j \sum_k C_{ijk} \overline{X_j(t) X_k(t) X_n(t)} + \overline{F_i(t) X_n(t)} + (i \leftrightarrow n) \quad (3.3)$$

を導くことができる。しかし、ここでモーメントの無限連鎖の問題に遭遇する。つまり、ある次数の相関関数の支配方程式にはより高次の相関関数が現れるので、何らかの仮定を設けない限り閉じた方程式は得られない。これがいわゆるクロージャーの問題である。

Navier-Stokes 乱流の場合には、このような2次の相関関数を基礎方程式系から評価するという試みは非常に興味深い。よく知られているように、非圧縮性流体の一様等方乱流の2点相関関数は小さな長さスケールにおいては、流れ場の種類や系の境界条件によらず普遍的であることが Kolmogorov [3] によって現象論的に予言され、実験的にも支持されている [4]。ところが、この現象論は相関関数が普遍形をもつことを予言できても、その関数形を具体的に評価することはできない。一方で、我々はこの系の支配方程式系を知っているのだから、これらの普遍関数形を基礎方程式系から評価しようとする試みは非常に素直であろう。

#### 3.2 直接相互作用分解

まず DIA の骨子を説明する。この近似は2つの仮定の上に構成される。第1の仮定として、ある特定のモード  $\{X_i, X_j\}$  間の相関はその間の直接相互作用によって生み出されるとする。言い換えると、仮にそのモード間の直接相互作用を人為的に取り除いた場合、これらは統計的に独立になるとする。こ

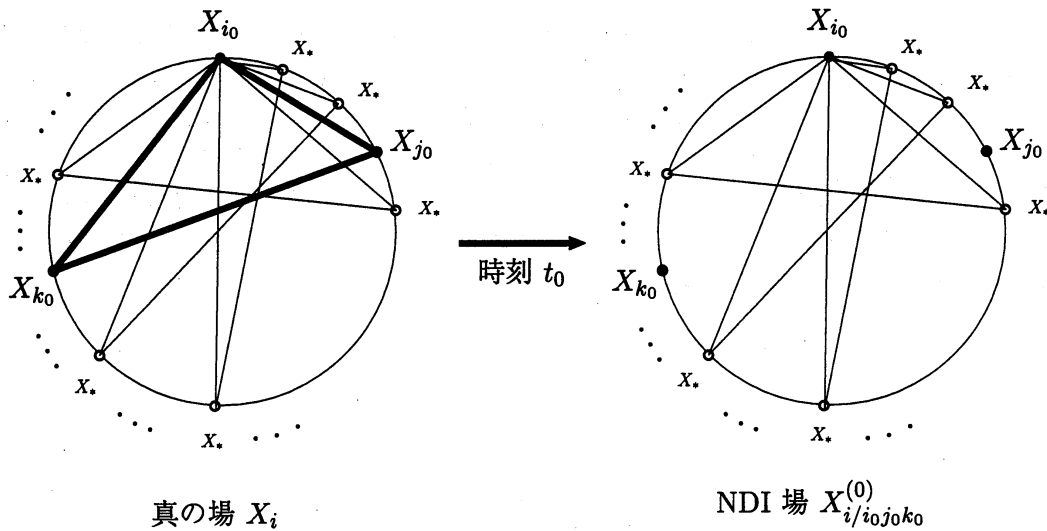


図 2: 直接相互作用分解 時刻  $t_0$  において特定の 3つのモード  $X_{i_0}$ ,  $X_{j_0}$ ,  $X_{k_0}$  の間の直接相互作用を人為的に抜き去ることによって作られるのが NDI 場  $X_{i/i_0j_0k_0}^{(0)}$  である. この 1つの直接相互作用を消去することにより, これら 3つのモード間には, ひとつも直接相互作用がないことに注意されたい. これは系のもつ『弱い非線形結合』の性質による.

ここで, 前章で説明した『弱い非線形結合』を想起されたい. つまり, これら 2つのモード間には高々ひとつの直接相互作用しか存在しないので, 人為的に抜き去る直接相互作用も高々ひとつでよい. 第2の仮定は, 多数ある直接相互作用のうち高々ひとつの直接相互作用を抜き去ったことの全体に対する影響は小さいとする.

これら 2つの仮定を定式化するために, 直接相互作用分解を導入する (図 2). つまり,  $X_i$  を時刻  $t_0$  において

$$X_i(t) = X_{i/i_0j_0k_0}^{(0)}(t|t_0) + X_{i/i_0j_0k_0}^{(1)}(t|t_0) \quad (t \geq t_0) \quad (3.4)$$

と分解する. ここで  $X_{i/i_0j_0k_0}^{(0)}(t|t_0)$  は特定の 3つのモード  $X_{i_0}$ ,  $X_{j_0}$  および  $X_{k_0}$  間の直接相互作用を人為的に抜き去ることによって作られる仮想的な場で, 無直接相互作用 (non-direct-interaction, NDI) 場とよぶことにする. 一方,  $X_{i/i_0j_0k_0}^{(1)}$  は直接相互作用 (direct-interaction, DI) 場とよばれる. ところで NDI 場の支配方程式は式 (2.2) より,

$$\left[ \frac{d}{dt} + \nu \right] X_{i/i_0j_0k_0}^{(0)}(t|t_0) = \sum_{j, k} \sum_{\{i, j, k\} \neq \{i_0, j_0, k_0\}} C_{ijk} X_{j/i_0j_0k_0}^{(0)}(t|t_0) X_{k/i_0j_0k_0}^{(0)}(t|t_0) + F_i(t) \quad (3.5)$$

と表される. この分解を用いると, の直接相互作用の 2つの仮定は次のように定式化される.

[DIA 仮定 1]  $\{ X_{i_0/i_0j_0k_0}^{(0)}, X_{j_0/i_0j_0k_0}^{(0)}, X_{k_0/i_0j_0k_0}^{(0)} \}$  の 3つのモード間には直接相互作用がないので, これらは統計的に独立である.

[DIA 仮定 2]  $X_{i/i_0j_0k_0}^{(1)}$  の大きさは  $X_{i/i_0j_0k_0}^{(0)}$  の大きさと比べて十分小さい.

ただし, 第2の仮定は直接相互作用を抜き去った時刻から無限の時間で成り立つはずがなく,  $t - t_0$  が

$X_i$  の自己相関時間の時間尺度で成り立つとする。この制限は DIA の定式化において  $t_0$  が消滅するための条件として意味をもつ。

### 3.3 DIA-RRE 方程式

前節でまとめた DIA の仮定に基づき、2 体相関関数の支配方程式 (3.2), (3.3) に現れる 3 次相関の項を書き直す。その際、

$$G_{ij}(t|t') = \frac{\delta X_i(t)}{\delta X_j(t')} \quad (t \geq t') \quad (3.6)$$

で定義される応答関数と呼ばれる量を導入しておくことと便利である。ここに  $\delta$  は汎関数微分で、 $G_{ij}$  の支配方程式は式 (2.2) を  $X_j$  で汎関数微分することによって得られる。紙面の都合上、ここでは DIA の詳しい計算は省略し、手順だけを示す。

- [a]  $X_i$  と同様、 $G_{ij}$  についても直接相互作用分解を行う。
- [b] DI 場  $X_i^{(1)}$  および  $G_{ij}^{(1)}$  を NDI 場を用いて表現する。
- [c] 式 (3.2), (3.3) の右辺に直接相互作用分解 (3.4) を代入し、 $X_i^{(1)}$  の 1 次の項まで打ち切る [DIA 仮定 2]。
- [d] 手順 [c] により残った項に手順 [b] の表現を代入し、[DIA 仮定 1] を用いてこれを  $V_{ij}$  と  $\bar{G}_{ij}$  とによって書き直す。
- [e]  $G_{ij}$  の式の統計平均を考え、その非線形項も手順 [c], [d] と同様にして処理する。以上により、相関関数  $V_{ij}$  および 応答関数の統計平均  $\bar{G}_{ij}$  についての閉じた方程式系を得る。

ところで、いま、系は統計的に一様 (つまり  $X_i$  の統計的性質が  $i$  によらない) かつ定常であるので、自己相関関数  $V_{ii}$  は、

$$V_{ii}(t, t') = \nu(t - t') \quad (3.7)$$

と表され、手順 [a] ~ [e] により得られる方程式系は、最終的に、

$$\left[ \frac{d}{d\tau} + \nu \right] \nu(\tau) = -\frac{2c_1}{\nu(0)} \int_0^\tau d\tau' \left[ \nu(\tau') \right]^2 \nu(\tau - \tau') \quad (3.8)$$

となる。ここで  $c_1 = \sum_j \sum_k (C_{ijk})^2$  である。以下では、この方程式を DIA-RRE 方程式とよぶことにする。(このようによぶ理由は、次章で明らかとなる。)

## 4 Reynolds 数逆展開

本章では、基礎方程式 (2.2) の非線形項を摂動として扱う近似方法、Reynolds 数逆展開 (Reynolds-number reversed expansion, RRE) について述べる。そのために、時間を

$$\tilde{t} = \nu t \quad (4.1)$$

のように尺度変換して  $\tilde{X}_i(\tilde{t}) = X_i(t)$  の支配方程式を

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{X}_i(\tilde{t}) = \lambda \sum_j \sum_k C_{ijk} \tilde{X}_j(\tilde{t}) \tilde{X}_k(\tilde{t}) - \tilde{X}_i(\tilde{t}) + \tilde{F}_i(\tilde{t}) \quad (4.2)$$

と書き表し、これを出発点とする。ただし  $\lambda = 1/\nu$  である。これを Navier-Stokes 方程式の場合の類推で Reynolds 数とよぶことにする。さて、 $\lambda \ll 1$  の仮定のもとで  $\tilde{X}_i$  を

$$\tilde{X}_i(t) = \tilde{X}_i^{(0)}(t) + \lambda \tilde{X}_i^{(1)}(t) + O(\lambda^2) \quad (4.3)$$

のように  $\lambda$  の巾級数に展開する。この展開を  $\tilde{X}_i$  の支配方程式 (4.2) に代入し、 $\lambda$  についてのオーダーを比較することにより、 $\tilde{X}_i^{(0)}$  が

$$\frac{d}{dt} \tilde{X}_i^{(0)}(t) = -\tilde{X}_i^{(0)}(t) + \tilde{F}_i(t) \quad (4.4)$$

に支配されることが分かる。同様に  $\tilde{X}_i^{(1)}$  についての式も得られる。さらに、応答関数  $\tilde{G}_{ij} = \delta \tilde{X}_i / \delta \tilde{X}_j$  を導入する。これも  $\tilde{X}_i$  と同様に Reynolds 数展開し、 $\tilde{G}_{ij}^{(0)}$  および  $\tilde{G}_{ij}^{(1)}$  の方程式を書き下す。以後の詳しい計算は、文献 [2] を参照していただきたい。計算の重要な部分は、 $\tilde{X}_i^{(0)}$  が正規乱数外力によって駆動される線形方程式 (4.4) に支配されることから、その統計が無相関の結合正規分布に従い、乱流の統計理論でよく用いられる 4 次キュムラントがゼロになるという性質を用いて 2 次の相関関数と応答関数についての閉じた方程式系を得ることができるところである。

以上から明らかなように、RRE は DIA とは、考えの根本が大きく異なっていることを強調したい。ところが驚くべきことに、RRE に基づいて得られた相関関数および応答関数についての閉じた方程式系は、前章で示した DIA によるものと完全に一致する。このことが DIA についての混乱の原因であるように思われる。つまり、これまでにしばしば、DIA の解説として、 $\lambda = 1$  なるパラメータを基礎方程式 (2.2) の非線形項の前に付加し、 $\lambda$  による展開を非自明な最低次で打ち切ることにより閉じた方程式系を導くという方法が紹介 (たとえば [5]) されているが、これは本章で述べた Reynolds 数展開そのものである。また Kraichnan [1] により導出された DIA 方程式は、以後、非線形項を摂動として扱ういくつかの方法 ([6,7] など) で、再導出されている。しかし、これらの方法は、たとえ同一の方程式が導かれたとしても DIA の本質とは関係がないものである。

最後に RRE の名前の由来について説明する。Reynolds 数逆展開の「逆」とは Kraichnan [6] による reversion という操作のことである。これは、Reynolds 数展開の任意次数の項が、原理的に最低次の関数として表現できるということに基づいている。上で紹介した方法は、非自明な最低次 (1 次) までの展開であり、より高次まで残す方法の可能性は存在するが、Reynolds 数の低い方からの精度を上げて、発達した乱流場の統計的性質を調べるという目的のためにはほとんど意味がないと思われる。また、この reversion という操作によって、打ち切った高次の項の効果が繰り込まれる (renormalization) と解釈する文献もあるが、その数学的根拠は不明である。

## 5 直接相互作用近似の成立条件

本章では DIA の成立条件について考察する。そのためには、DIA において課されている 2 つの仮定がいかなる場合によく成り立つ近似であるかを調べればよい。直観的には、これらは系の自由度  $N$  が十分大きいときに成り立つと期待される。なぜならば、仮定 1 に関しては、仮に自由度が小さいとすると間接的な相互作用の影響が残ってしまう可能性があるのに対し、自由度が大きい場合には間接的な相互作用の影響は乱数的になり、その相関に対する平均的な寄与は無視できると期待され、また、仮定 2 では、系の自由度が大きい場合の方が直接相互作用の総数が多いので、そのうちのただひとつを抜き去ることの影響は小さいと期待されるからである。これに対して、Reynolds 数逆展開がよい近似を与えるのは、Reynolds 数の低次の項での打ち切りが正当化される場合、つまり Reynolds 数が小さい場合

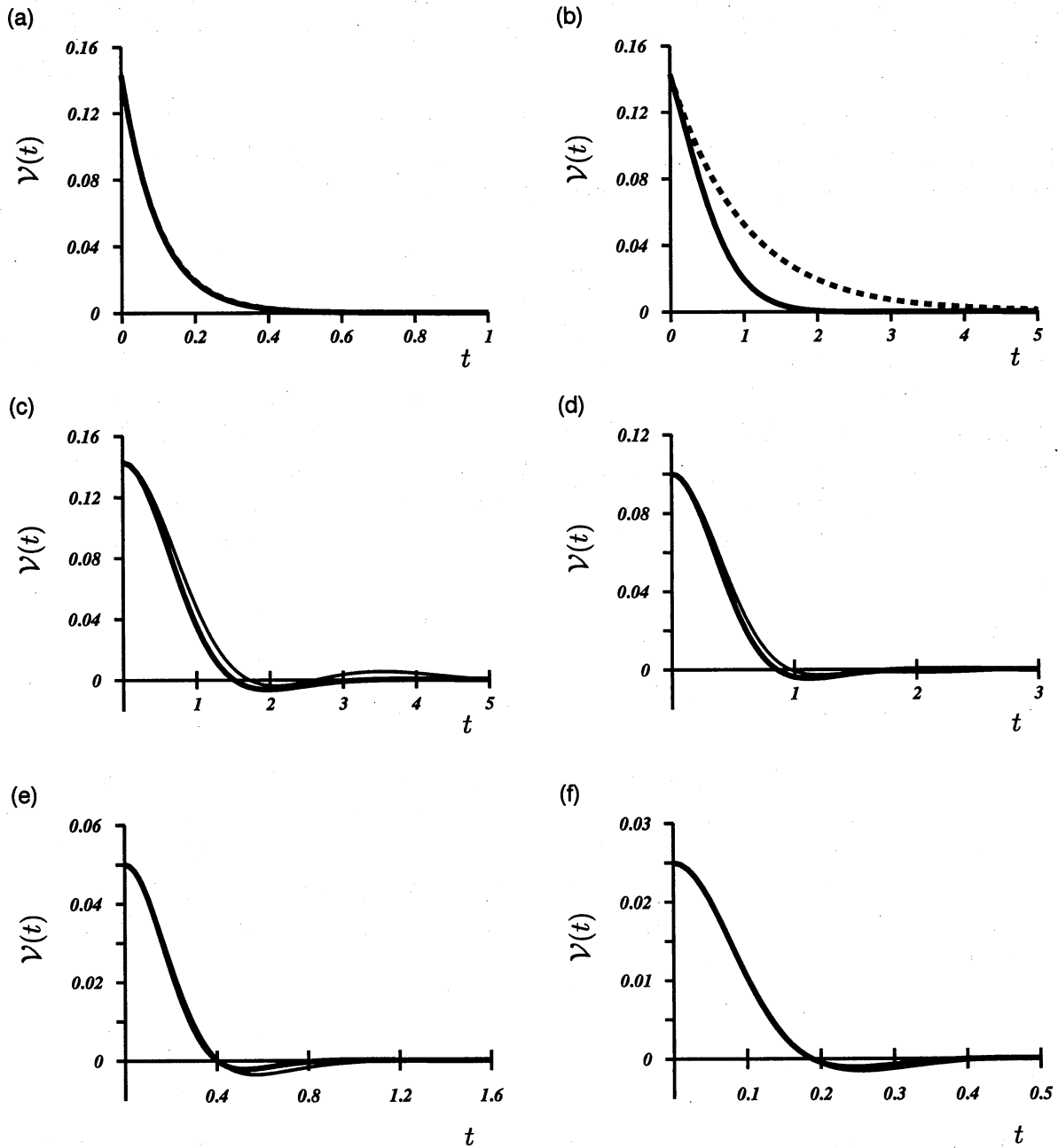


図 3: 自己相関関数 DIA-RRE 方程式 (3.8) の解を反復法を用いて求めた結果を太い実線で表す. 一方, 基礎方程式 (2.2) の初期値問題の数値解を長時間平均することによって評価した結果を細い実線で表す. (a),(b) においては, (3.2) の右辺の非線形項を無視した線形方程式の解を破線で示した. パラメータは, (a)  $(N, \nu) = (7, 10)$ , (b)  $(7, 1)$ , (c)  $(7, 0)$ , (d)  $(10, 0)$ , (e)  $(20, 0)$ , (f)  $(40, 0)$  である. 全体的に実線どうしの一致は非常によいが, 特に (c) と比べて, (a),(b) や (e),(f) の結果がよいことが分かる. つまり, DIA-RRE 方程式は  $\nu \gg 1$  および  $N \gg 1$  の場合により結果を与える.

( $\lambda \ll 1 \Leftrightarrow \nu \gg 1$ ) である。以上から、DIA-RRE 方程式がよい近似を与えるパラメータ領域は、 $N \gg 1$  および  $\nu \gg 1$  であると期待される。実際、DIA-RRE 方程式 (3.8) の解と基礎方程式 (2.2) の初期値問題の数値解の長時間平均とを、代表的な自由度  $N$  および粘性係数  $\nu$  に対して比較した結果 (図 3) はこれを支持する。つまり、全体的に理論の予測は素晴らしいが、よく見ると  $\nu \gg 1$  (RRE がよく成立する領域) および  $N \gg 1$  (DIA がよく成立する領域) においてよりよく一致していることが分かる。

さらに、DIA が自由度が大きな場合によく成り立つ近似であるということを確認する。そのためには §3.2 でまとめた 2 つの DIA の仮定自身が、 $N \gg 1$  でよく成り立つことを示せばよい。まず、仮定 1 を検証するために、 $\{X_i, X_j, X_k\}$  の間の相関の強さを表す 3 次相関関数

$$R_{ijk}(t-t') = \frac{\overline{X_i(t) X_j(t) X_k(t')}}{\sqrt{\overline{X_i(t)^2} \overline{X_j(t)^2} \overline{X_k(t)^2}}} \quad (5.1)$$

を定義する。この量が真の場  $X_i$  においては有意な値をもっているにもかかわらず、 $\{X_i, X_j, X_k\}$  の間の直接相互作用を抜き去った NDI 場  $X_{i/jk}^{(0)}$  においては、 $R_{ijk} \approx 0$  とできるというのが仮定 1 である。図 4 に  $R_{ijk}$  の数値結果を示した。細い実線が真の場、一方、太い実線が NDI 場に対応する。 $N = 7$  という極めて小自由度の場合には  $R_{ijk}$  の値は真の場に対しても NDI 場においても小さくない。一方で、 $N = 20$  という比較的大きな自由度においては、NDI 場における  $R_{ijk}$  の値は真の場のそれと比べて十分小さく、DIA の仮定 1 が妥当なものになっていることが分かる。より大きな自由度に関しても同様の結果が得られる。

次に、仮定 2 について考える。そのために、DI 場の大きさを表す

$$D(t-t_0) = \left\langle \sum_i \left[ X_{i/i_0j_0k_0}^{(1)}(t|t_0) \right]^2 \right\rangle \quad (5.2)$$

を定義する。ここで  $\langle \rangle$  は異なる初期値から始めた多数の計算結果の平均をとることを意味する。図 5(a) にいくつかの  $N$  に対する計算結果を示した。ただし、横軸の時間は自己相関関数の特徴的な時間尺度 (これは、DIA-RRE 方程式 (3.8) より  $T(N) = (c_1 \nu(0))^{-1/2}$  と評価できる) で規格化してある。実際、図 5(b) に示したように、この時間尺度は自己相関関数のそれを自由度  $N$  によらずよく表している。したがって、図 5(a) において自由度  $N$  が大きいほど  $D$  が小さいことは、DIA の仮定 2 が自由度が大きいほどよい仮定になっていることを示している。

## 6 むすび

第 2 章において導入した Navier-Stokes 方程式とよく似た性質をもつモデル方程式を用いて、DIA についての詳しい議論を行った。DIA は §3.2 にまとめた 2 つの仮定のもとに構築された近似理論であり、§4 で紹介したような Reynolds 数逆展開 (RRE) とは区別されるべきものである。このモデル方程式に限らず、DIA と RRE とが、同一のクロージャー方程式を導くことに起因する混乱を解消することが本研究の目的のひとつであった。これに関連して、DIA の成立条件を明らかにした。非圧縮性流体の一樣等方乱流のような弱い非線形結合をもつ系に対しては、DIA は自由度が十分大きな場合によく成り立つ近似である。

最後に今後の課題について述べる。まず、系の非線形結合が強い場合には DIA は適用可能であるかという問題がある。直観的には、DIA の本質からそれは一般に難しいと想像される。文献 [2] ではこの近似を非常に強い非線形結合を持つ系に単純に適用した場合、その結果が不適切であるということのみが



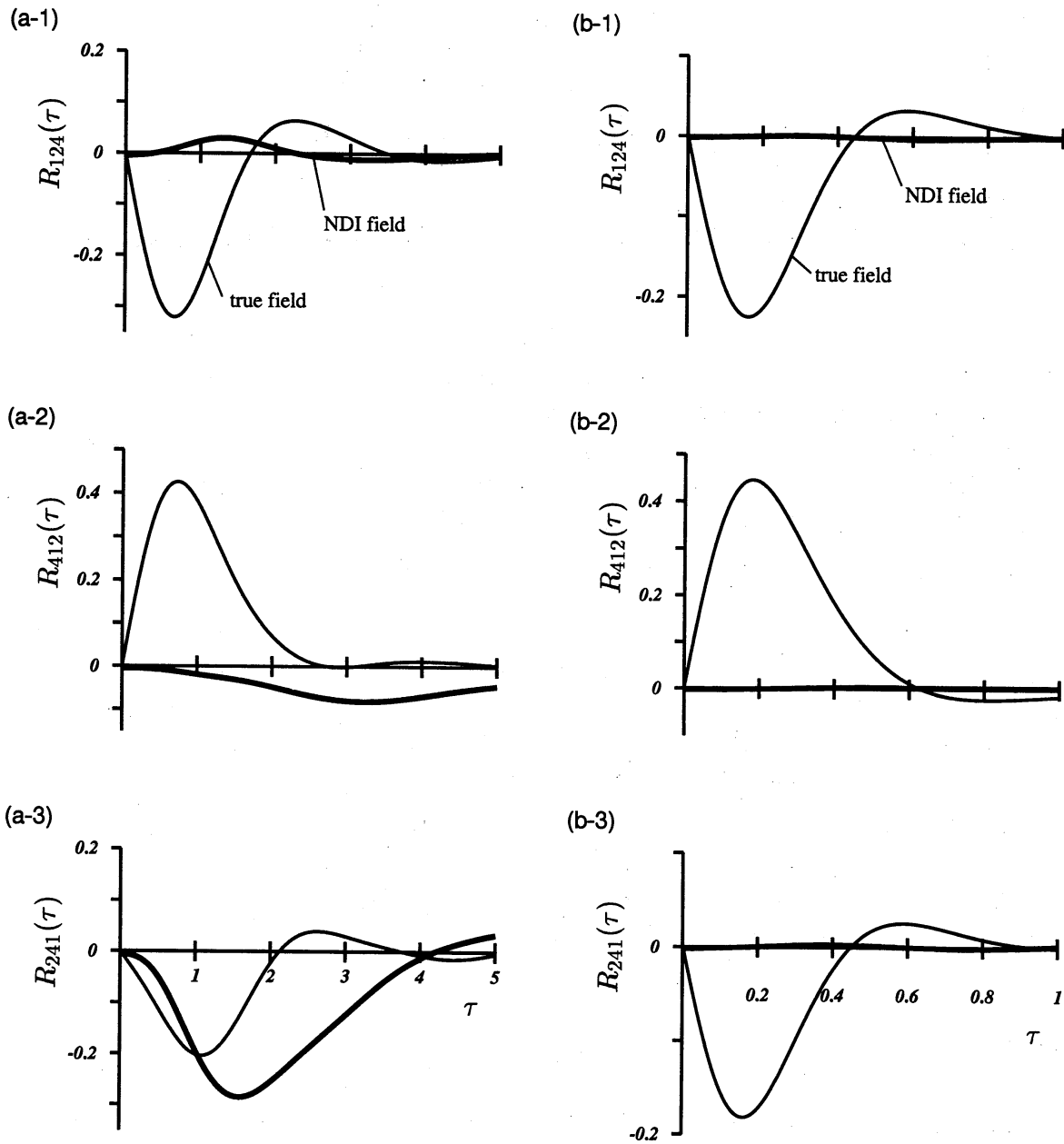


図 4: DIA 仮定 1 の検証式 (5.1) で定義される 3 次相関関数  $R_{ijk}$  を数値的に評価した結果である ( $\{i, j, k\} = \{1, 2, 4\}$ ). 太い実線は真の場  $X_i$ , 細い実線は  $\{X_1, X_2, X_4\}$  の間の直接相互作用が不在の NDI 場  $X_{i/124}^{(0)}$  における評価を表す. パラメータは (a)  $(N, \nu) = (7, 0)$ , (b)  $(N, \nu) = (20, 0)$  である. NDI 場において  $R \approx 0$  を要求する DIA の仮定 1 は  $N = 7$  に対しては満たされていないが,  $N = 20$  に対してはよく満たされていることが分かる.

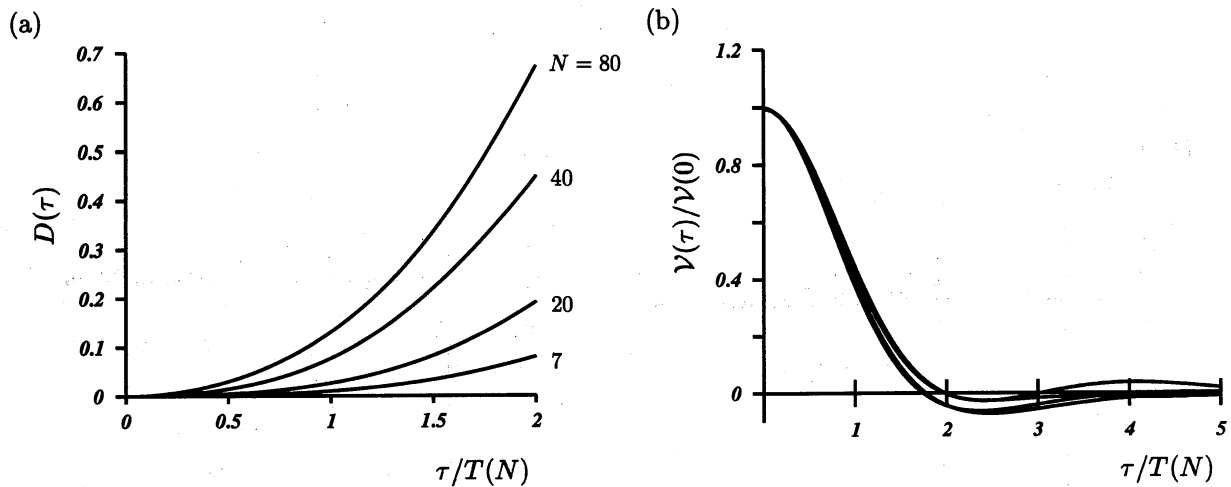


図 5: DIA 仮定 2 の検証 (a) には, 式 (5.2) により定義された DI 場の大きさを示した. この図から,  $\tau = t - t_0$  が自己相関関数の時間尺度で DI 場が NDI 場 (大きさ 1) と比べて小さいという仮定が, 自由度  $N$  が大きいほどよく成り立つということが理解できる. (b) には, 時間を (a) と同様に規格化した場合の自己相関関数を異なるいくつかの自由度 ( $N = 7, 10, 20, 40$ ) について示した. この規格化が妥当なものであることが分かる. ただし (a), (b) ともに  $\nu = 0$  である.

示されている. 現在, どの程度非線形結合が強ければこの近似が破綻するか, あるいは, この近似理論を改良して, より強い非線形結合をもつ系に適用する方法があるかという問題を考えている. 次に, 乱流の統計理論における非常に重要な問題がある. よく知られているように Kraichnan [1] によるこの近似理論の Navier-Stokes 乱流の Eulerian 速度の相関関数および応答関数に対する適用は, Kolmogorov スペクトルの表現に失敗したという意味で不成功に終わった. 一方で, その後 DIA を Lagrangian 速度の相関関数および応答関数に対して適用することによって Navier-Stokes 乱流においても成功を収めている [8-10]. ところが, 我々は, なぜ Eulerian 速度では不適切で, Lagrangian 速度であればよいのかという問題については明確に理解しているとは言えない. この問題に関しても, 式 (2.2) のような簡単なモデル方程式を用いて詳しい考察ができれば興味深いと考えている.

## 参考文献

- [1] R. H. Kraichnan, "The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds number," J. Fluid Mech. **5**, 497-543 (1959).
- [2] S. Goto and S. Kida, "Direct-interaction approximation and Reynolds-number reversed expansion for a dynamical system," Physica D (1998), in press.
- [3] A. N. Kolmogorov, "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers," Dokl. Akad. Nauk SSSR **30**, 301-305 (1941), English translation in Proc. R. Soc. London, Ser.A **434**, 9-13 (1991).
- [4] K. R. Sreenivasan, "On the universality of the Kolmogorov constant," Phys. Fluids **7**, 2778-2784 (1995).

- [5] D. C. Leslie, *Developments in the theory of turbulence* (Clarendon Press, Oxford, 1973).
- [6] R. H. Kraichnan, "Eulerian and Lagrangian renormalization in turbulent theory," *J. Fluid Mech.* **83**, 349–374 (1977).
- [7] J. H. W. Wyld, "Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid," *Ann. Phys., N.Y.* **14**, 143–165 (1961).
- [8] R. H. Kraichnan, "Lagrangian-history closure approximation for turbulence," *Phys. Fluids* **8**, 575–598 (1965), (erratum 1966, *ibid.*, 1884).
- [9] Y. Kaneda, "Renormalized expansions in the theory of turbulence with the use of the Lagrangian position function," *J. Fluid Mech.* **107**, 131–145 (1981).
- [10] S. Kida and S. Goto, "A Lagrangian direct-interaction approximation for homogeneous isotropic turbulence," *J. Fluid Mech.* **345**, 307–346 (1997).