

# 乱流中の渦度とパッシブベクターの伸長過程について

京大 数理研 大木谷 耕司

## I. はじめに

乱流における渦伸長は非線形の過程である。この研究のねらいは、その過程で重要な渦伸長を線形過程であるパッシブベクターの伸長と比較してその相違点を違いを明らかにすることで渦度のストレインとの相関を特徴づけることにある。ここでは一様等方性乱流を取り扱う。この最も簡単な場合の乱流を数値計算によって研究した例は極めて多い。エネルギースペクトルの巾法則や、種々の統計量の時間発展、速度や渦度の分布関数などが詳細に調べられている。ここでは、より基本的な立場から上に述べた問題をとりあげる。

## II. 基礎方程式

非圧縮性 3 次元 Navier-Stokes 方程式を、標準的な記号を用いて

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \omega, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \omega = 0, \quad \omega = \nabla \times \mathbf{u}$$

の渦度方程式の形で書く。これと連立させる パッシブベクター  $\delta l$  の方程式は

$$\frac{\partial \delta l}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta l = (\delta l \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \delta l, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \delta l = 0$$

と書ける。

方程式 (1) と (2) は同じ形をしているが、(1) が非線形であるのに対して (2) は線形である。粘性率がゼロの時、(1) はエネルギー

$$\left\langle \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right\rangle$$

とともにヘリシティーと呼ばれる保存量

$$\langle \mathbf{u} \cdot \omega \rangle$$

を持つことは良く知られている ( $\langle \rangle =$  空間平均)。一方  $\nu = 0$  のとき  $\delta l$  の積分曲線が物質線なので (2) はヘリシティーに似た

$$\langle \mathbf{u} \cdot \delta l \rangle$$

を保存量として持つ。

(2) はエネルギーに相当する保存量を持たないことに注意が必要である。実際  $\nu = 0$  のとき (2) は

$$\frac{\partial \delta l}{\partial t} + \nabla \times (\delta l \times \mathbf{u}) = 0$$

と書くことができるが、これに  $\nabla \times$  の逆演算を施せば、あるスカラー  $q$  を用いて

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \delta l \times \mathbf{u} = -\nabla q$$

となる。ここで、 $\delta l = \nabla \times U$  である。これより

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{|U|^2}{2} \right\rangle = \langle \delta l \cdot (U \times \mathbf{u}) \rangle$$

となるが、この右辺は一般にはゼロにならないので  $\left\langle \frac{|U|^2}{2} \right\rangle$  は保存しない。

もし、初期条件  $\omega(\mathbf{x}, 0)$  と  $\delta l(\mathbf{x}, 0)$  が全く等しいなら渦度方程式の解の一意性\*からこれらの後の時刻での振舞いも全く同じである。本稿では次の問題に注目する：

初期条件は等しくはないが、それらのエネルギースペクトルが等しいとき、その後の発展はどのように異なるだろうか？ より正確に言うと2乗ノルムで各々のピーク値を比べるとすれば、どちらがより強く増加するか、という問題を考える。この問には原理的には3種類の答えが考えられる。

1. 一意性の議論を考慮し、スペクトルが共通のときも両者の時間発展には大差がないだろうという予想。
2. 非線形性の方が潜在的に強いことから  $\omega$  の方が強く引き伸ばされるという予想。
3. むしろ非線形性が引き伸ばしの効果を弱める働きをするという予想。

この問題にアプリオリに答えるのは難しいので数値的にとり扱う。

### III. 数値計算

標準的なフーリエ擬スペクトル法による周期境界条件の下での数値計算（格子点  $128^3$ ）を行なった。アライアス・エラーを2/3則で除去した。時間発展は2次のルンゲ・クッタ法に

---

\*滑らかな初期値から発展する3次元 Navier-Stokes 方程式の滑らかな解が後の時刻で存在し続けるかどうか数学的には不明だが、そのような解があれば1個しかないことは分かっている。

よった。この規模の程度の数値計算では、取り扱い得るレイノルズ数は制限されるが、それに関わらず両者の時間発展に大きな違いが見ることができる。

$\omega$  と  $\delta l$  の初期条件は、低波数のいくつかのモードのみがゼロでない値をもつもので、フーリエスペクトルが同じであるがフーリエ係数（複素数）の振幅および位相は、疑似乱数を用いて全く異なるようにした（位相のみ異なる計算も行なったが、結果に定性的な違いは見られなかった。）

Fig.1 に  $\nu = 0.005$  の場合のエンストロフィー  $\langle |\omega|^2/2 \rangle$  およびパッシブベクターの分散  $\langle |\delta l|^2/2 \rangle$  の時間発展を示す。この図から非線形の渦伸長過程のノルムの増加は線形の過程の方よりもピーク値での比較で 2.7 倍も大きいことがわかる。念のため別の疑似乱数による他の初期条件を用いた計算でも、やはり  $\langle |\omega|^2/2 \rangle$  より  $\langle |\delta l|^2/2 \rangle$  の方の増加が著しいという結果が得られている。したがって上の問題の答えは、今のレイノルズ数に関する限り 3. となる。以下でこの結果のメカニズムを検討しその意味を考える。

#### A. アラインメントの統計性質

渦度およびパッシブベクターに対する伸長項の働きは、それぞれ

$$\omega \cdot S \cdot \omega, \quad \delta l \cdot S \cdot \delta l$$

という同じ形で表される。ここで  $S$  はストレインテンソル（速度勾配の対称成分）である。これは対角化可能で、その 3 つの固有値の和は非圧縮性によりゼロである。その固有ベクトルに各々のベクトルが並ぶことをアラインメントと呼び、対応する固有値がプラス（マイナス）の時、伸長（圧縮）が起きる。すなわち伸長の度合は  $S$  の主軸系に関してとる幾何学的な配置のみによって決定される。

そこでストレインテンソルについてのアラインメントの統計を吟味する。乱流が発達した時刻  $t = 4$  で  $S$  の固有値問題を各点で数値的に解き  $\omega$  と各固有ベクトルとのなす角の余弦の PDF を Fig.2a にまた  $\delta l$  に対するものを Fig.2b に示した。ここで  $e_1, e_2$  および  $e_3$  は規格化されたストレインテンソルの固有ベクトルで、それぞれ最大、中間、最小の固有値に対応する。これらの図から、それぞれの固有ベクトルごとの統計の特徴を列挙すると以下のようにまとめることができる。（このうち渦度の性質は周知のものである。例えば、最近の総合報告的な論文として Tsinober *et al.* (1997) を参照。）

1. 特徴が著しい  $e_2$  と並ぶ傾向は  $\omega$  の方が  $\delta l$  より強い。
2.  $\omega$  は  $\delta l$  よりも圧縮される方向  $e_3$  と直交する傾向がやや強い。
3. もっとも伸長される方向  $e_1$  へ並ぶ傾向は  $\omega$  より  $\delta l$  のわずかに強い。

以上の 2. からはむしろ  $\delta l$  の方が圧縮されやすいことが結論される。残る 2つの性質 1., 2. の内、渦度とパッシブベクターで大きな差異が見られるのは 1. である。そこで本稿では  $\delta l$  の方が引き伸ばされやすいことを説明するために 1. 中間の固有値に対する固有ベクトルのアラインメントに注目する。この点については、以下の D. でさらに検討する。

M.-J. Huang (1996) によって、減衰を始めた後の乱流に物質線要素 ((2) 式で拡散項を持たないもの) をばらまくことによって、その伸長率が数値的に評価されている。彼の計算では、物質線要素はむしろ  $e_1$  に並ぶ傾向があることが報告されている。本計算との結果の違いは、彼が乱流が充分発達し減衰し始めてから、物質線要素の計算を行なっているのに対し、ここでは、流れもパッシブベクターも共に滑らかな状態から計算していることに起因すると考えられる。実際、Fig.2 はエンストロフィーが最大値を取った直後のものであるが、ずっと後の減衰終期では  $e_1$  および  $e_2$  に関する分布関数は、 $\pm 1$  で弱いピークをもつほとんど同じ形をもつようになる。この意味で今の結果は、定性的には彼の結果と consistent なものとなっている。

## B. レイノルズ数依存性

興味があるのはレイノルズ数を大きくするとき、上で観察された差が広がるかどうかである。これを調べるために、同じ計算を粘性率を半分の  $\nu = 0.0025$  として行なった。2つの粘性率について、Fig.3a にエネルギー散逸率

$$\epsilon(t) = \nu \langle |\omega|^2 \rangle$$

を、Fig.3b には

$$\nu \langle |\delta l|^2 \rangle$$

という量の時間発展を示した。方程式 (2) がエネルギーのような保存量を持たないため、後者はいかなる散逸率というような物理的な意味をもつ訳ではない。ここでは単にそのレイノルズ数についてのスケーリングのみを考える。

発達した乱流最も基本的な性質の 1つに、エネルギー散逸率がレイノルズ数の大きな極限でも有限となることがよく知られている。このことに対応して  $\nu \langle |\omega|^2 \rangle$  は  $\nu$  に依らない様な時間発展を示している。しかしパッシブベクターにおける対応する量  $\nu \langle |\delta l|^2 \rangle$  は  $\nu$  が小さくなると  $\nu$  に依らない一定の振舞いに近づくどころか、むしろ増加する傾向があることが注目に値する。このことは、レイノルズ数が大きくなるにつれ、ますます線形過程の引き伸ばし効果の方が非線形のものに凌駕することを示唆している。

### C. $\omega$ と $\delta l$ の分布関数

上で触れた  $\nu \rightarrow 0$  のとき  $\nu \langle |\delta l|^2 \rangle$  が増加するという観測から、渦度場よりパッシブベクターの方により小さなスケールの構造が多く励起されていることが考えられる。そこでこれらの成分の確率分布関数を乱流が充分発達した段階で Fig4.a に linear-linear で Fig4.b には log-linear でプロットした。(分布関数は分散 1 に規格化してある。) Fig.4a から  $\delta l$  は原点近傍で  $\omega$  より大きなピークを持つことがわかり、これは  $\delta l$  の方が圧縮されやすいことと合致する。一方 Fig4.b から  $\delta l$  のテールは  $\omega$  の指数関数的なテールより長く、確かに  $\delta l$  には稀な大振幅の現象が  $\omega$  より含まれていることが分かる。

物理空間における構造を 3 次元的な可視化によって調べたところ、高渦度領域でさえ、渦度の構造 ( $|\omega|$  の等値面) とパッシブベクトルの構造が特徴をもつ領域は必ずしも一致してはいないことがわかった。なお、このことと合致して今の計算では、両者の規格化された相関係数

$$\frac{\langle \omega \cdot \delta l \rangle}{\sqrt{\langle |\omega|^2 \rangle \langle |\delta l|^2 \rangle}}$$

は、計算された時間帯を通じて数パーセントと小さい。

### D. 中間の固有ベクトルへのアラインメント

$\omega$  と  $\delta l$  の伸長の違いをそれぞれのベクトルの  $e_2$  に関するアラインメントにのの違いから検討する。

中間の固有値は正にも負にもなり得る。乱流が発達した段階で  $\langle \sqrt{|\omega|^2} \rangle$  で無次元化された 3 つの固有値の PDF を Fig5.a には linear-linear で、Fig5.b には linear-log で示した。Fig5.a より  $\lambda_2$  のピーク値は確かに正だが、負のものも多く含まれていることが分かる。なお Fig5.b よりいずれの固有値の分布関数も指数的であることが分かる。

そこで、中間の固有値に対応する固有ベクトルへのアラインメントを調べるため  $\lambda_2$  の符号で条件をつけた  $\omega$  (ないし  $\delta l$ ) と  $e_2$  のなす角の余弦の確率分布を描いた。

Fig.6a から、 $\lambda_2 > 0$  の条件下の PDF (鎖線) は無条件のもの (実線) とほとんど変わらないことがわかる。一方、 $\lambda_2 \leq 0$  の条件下の PDF (点線) は  $\pm 1$  (平行・反平行) でのピークの値が無条件のもとと比べると半分ほどであるが、無条件のピークが大きいため  $\lambda_2 \leq 0$  のピークも 1.2 ぐらいあり、一様分布の値 .5 よりはかなり大きい。他方、 $\delta l$  と  $e_2$  の PDF も、 $\lambda_2 > 0$  の条件下の PDF と無条件のものはほとんど差がない。ところが  $\lambda_2 \leq 0$  の条件のものは (無条件の場合の半分より大きな値を持つものの) ピークでも 0.6 程度であり、一様分布の値と同じ程度に小さくなっている。

以上から、 $\omega$  と  $\delta l$  の伸長の違いについて次の解釈が得られる;  $\omega$  と中間の固有ベクトル  $e_2$  とのアラインメントは、 $\lambda_2$  の符号に関わらず強いため、伸長のみならず圧縮にも貢献す

る。一方  $\delta l$  では、 $\lambda_2 < 0$  の部分からのアラインメントが弱いいため、 $\lambda_2 > 0$  の部分から寄与が生き残りやすい。

#### IV. もう1つの線形方程式

方程式 (1) と (2) は確かに類似している。しかし、渦度方程式の伸長項においては、渦度は速度勾配の対称成分とのみ相互作用する。この点が (2) とは異なる。

そこで、別のベクトル場  $\delta m$  を取り上げ、恒等式

$$(\delta m \cdot \nabla) u = S \cdot \delta m + \frac{1}{2} \omega \times \delta m$$

の中で、第2項をゼロとおいた次の線形方程式を考えることにする：

$$\frac{\partial \delta m}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \delta m = S \cdot \delta m + \nu \Delta \delta m \quad (3)$$

(3) の方程式は、伸長項の対称成分のみ効くと言う意味では (2) より (1) に近い。ただし、このとき非圧縮性条件は必然的に放棄されなければならない。先ほどと同じ初期条件を用いた計算を行なったところ、 $\langle |\delta m|^2 \rangle$  は  $\langle |\delta l|^2 \rangle$  よりもさらに激しく増加することがわかった；したがって当然  $\langle |\omega|^2 \rangle$  よりも強く増加する (Fig.7)。この結果は、上の恒等式の右辺の渦度に関する項は、 $\delta m$  の局所的回転をもたらすことから予想できることだが、(1) と (2) の発展の違いが、渦度に関する項の有無ではなく、線形/非線形の違いから来るものであることがはっきりした。

Fig8.a には  $\delta m$  と  $\delta l$  の分布関数を比較した。 $\delta m$  の分布は (2) 式のパッシブベクターのもの比べて、よりいっそう間欠性が強いことが明らかである。

また、Fig8.b には  $\delta m$  と各固有ベクトルとのなす角の余弦の PDF を示した。 $e_2$  はほぼ一様分布であり、 $e_1$  と  $e_3$  はそれぞれ、一様分布に関して対称的になっている点が注目される。言い替えると Fig.2b で見られる  $e_2$  についての分布の非対称性 (アラインメント) は  $\nabla u$  に含まれる渦度の効果の有無に起因することが明らかになった。

#### V. 非粘性の場合: ラグランジュ的な見方

再び (1) と (2) の比較にもどる。 $\omega$  と  $\delta l$  との発展の違いは伸長項からきているので、非粘性の場合でも同様な差異が見られると考えられる。精度上計算可能な時間帯で、このことを実際にオイラー方程式  $\nu = 0$  を用いた数値計算で確かめることができる (図省略)。やはり、 $\omega$  より  $\delta l$  の方が激しく増加する。さて、非粘性の場合には渦線は物質的なので、 $a$  をラグランジュ変数 ( $t=0$  で  $a=x$ ) とすると次のコーシーの公式が成り立つ：

$$\omega_i(a, t) = \omega_j(a, 0) \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \quad (i = 1, 2, 3).$$

同様の式は、パッシブベクターに対しても成り立つ：

$$\delta l_i(\mathbf{a}, t) = \delta l_j(\mathbf{a}, 0) \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \quad (i = 1, 2, 3).$$

従って、いずれも物理空間の座標とラグランジュ座標との間のヤコビ行列  $J_{ij}(\mathbf{a}, t) \equiv \frac{\partial x_i}{\partial a_j}(\mathbf{a}, t)$  がわかれば、初期条件との内積を作れば後の時刻のベクトル場がわかる。すなわち、非粘性流に関する限り、 $\omega$  および  $\delta l$  の時間発展は同じ現象の2つの異なる見方に過ぎない。実際には上で述べたように、渦度はパッシブベクターより増加が緩慢である。従って、オイラー方程式の解を1つの流体粒子に注目して見るとき、そのヤコビ行列  $J$  の時間発展は初期の渦度ベクトルとの内積が小さくなるようなものである事がわかる。すなわち、ラグランジュ的に見るとき、渦度の時間発展は初期値の影響を強く引きずっていることが示唆される。詳しく調べるには 正定値対称行列  $J^T J$  の固有値問題を考えることになるが、これについては別の機会に譲る。

## VI. おわりに

ここでは一様等方性乱流における渦度の伸長をパッシブベクターの線形過程による伸長と比較した。一般に物質線要素の伸長率が渦度の伸長率より大きいという従来の Huang(1996) による数値計算結果（ここでは拡散項は含まれていない）と矛盾しない結果が得られたのみならず、アラインメントの統計性質を詳しく調べた。また、 $\nu \langle |\delta l|^2 \rangle$  がレイノルズ数とともに増加する傾向が観察された。これは、エネルギー散逸率  $\nu \langle |\omega|^2 \rangle$  が一定の高レイノルズ数極限をもつことと大きな違いがある。すなわち、乱流で重要なパラメータであるエネルギー散逸率を一定に保つには、渦度の伸長のみならずその圧縮も大切な役割をしていることが分かった。単に引き伸ばしをするだけなら、線形過程の方が効率的に行なえる。

今後の課題としては、これらのベクトルの3次元構造を解析することで以上の観察を渦構造の形成と結び付けることがあげられる。また、渦構造の形成による非線形性の通減を理論的に説明 (c.f. P. Constantin et al. (1996)) することも残された課題である。

### 文献

Tsinober, A., Shtilman L., & Vaisburd, H. (1997), "A study of properties of vortex stretching and enstrophy generation in numerical and laboratory turbulence," *Fluid Dynamics Research*, 21, 477.

M.-J. Huang (1996) "Correlations of vorticity and material line elements with strain in decaying turbulence," *Phys. Fluids*, 8, 2203.

P. Constantin, C. Fefferman and A. J. Majda (1996), "Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3-D Euler equations," *Commun. in Partial Differential Equations*, 21, 559.

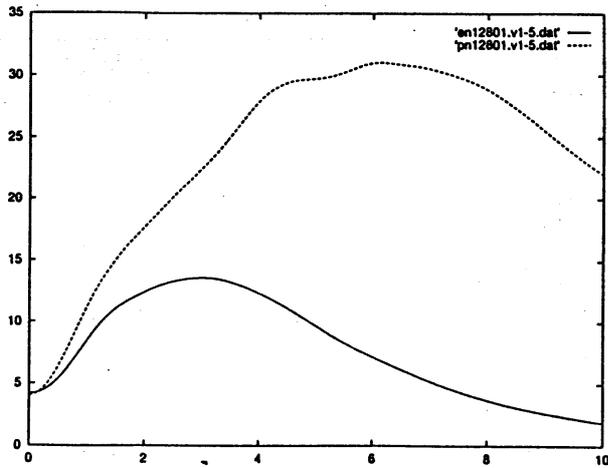


Fig.1 :  $\langle |\omega|^2/2 \rangle$  (実線) ,  $\langle |\delta l|^2/2 \rangle$  (破線)  
の時間発展.

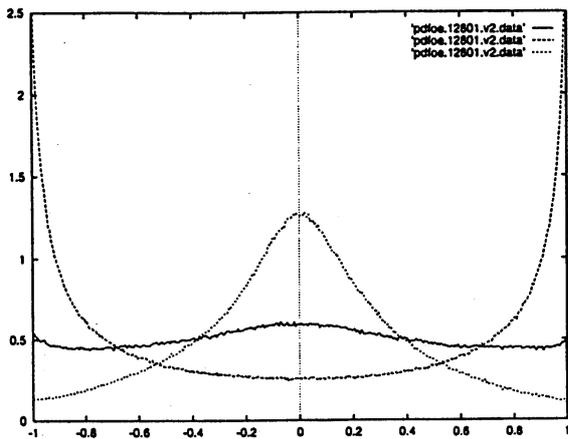


Fig.2a :  $\omega$  と  $e_1$  (実線),  $e_2$  (破線) &  $e_3$  (点線)  
のなす角の余弦の確率分布.

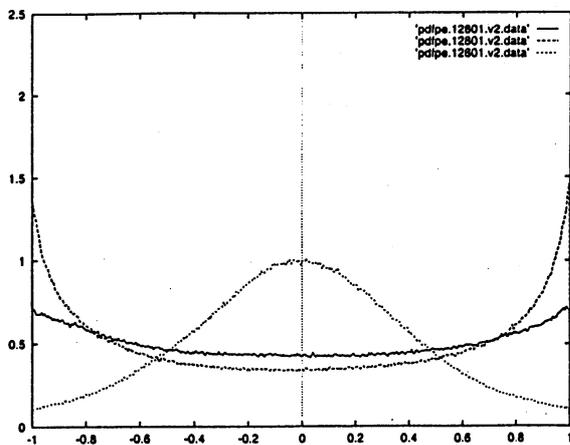


Fig.2b :  $\delta l$  についての同様の図.

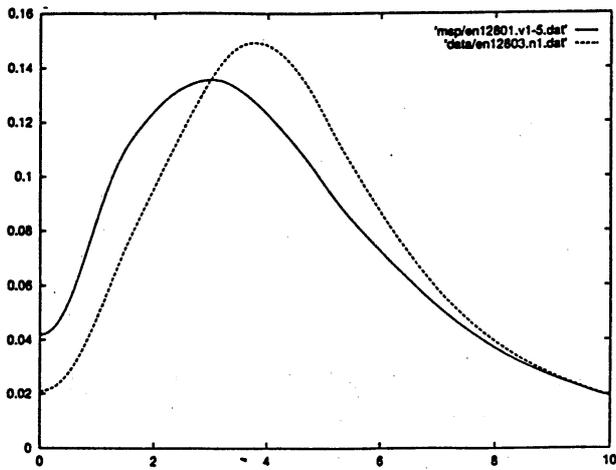


Fig.3a : エネルギー散逸率  $\nu \langle |\omega|^2 \rangle$  の時間発展  
(実線 :  $\nu = 0.005$ , 鎖線 :  $\nu = 0.0025$ ).

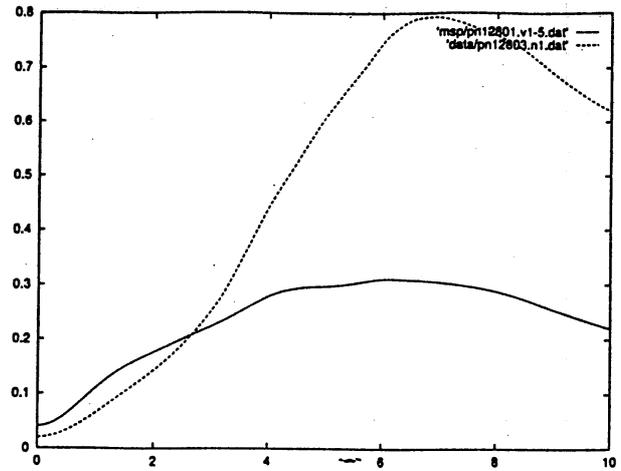


Fig.3b :  $\nu \langle |\delta l|^2 \rangle$  の時間発展  
(実線 :  $\nu = 0.005$ , 鎖線 :  $\nu = 0.0025$ ).

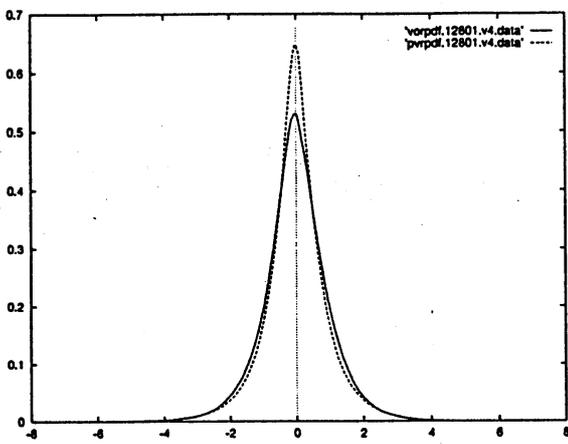


Fig.4a :  $\omega$  と  $\delta l$  の確率分布 (1成分, linear-linear).  
(実線 :  $\omega$ , 点線 :  $\delta l$ ).

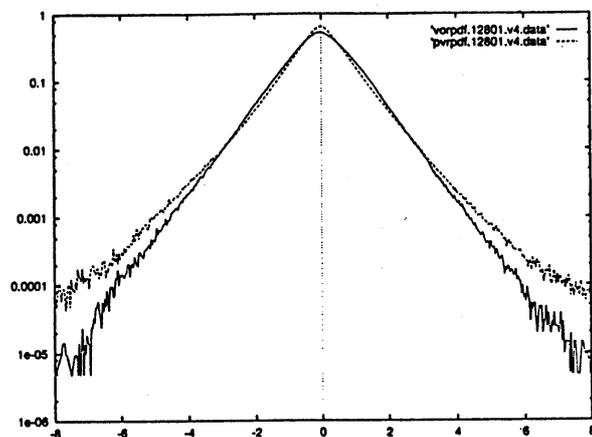


Fig.4b : その log-linear プロット.

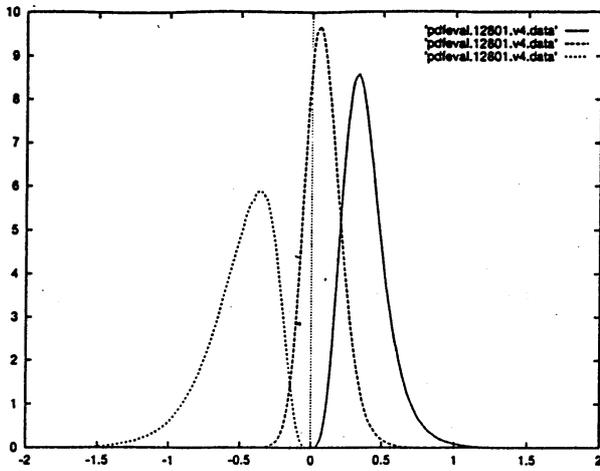


Fig.5a :  $S$  の固有値の確率分布 (実線 :  $\lambda_1$ , 点線 :  $\lambda_2$ , 鎖線 :  $\lambda_3$ ).

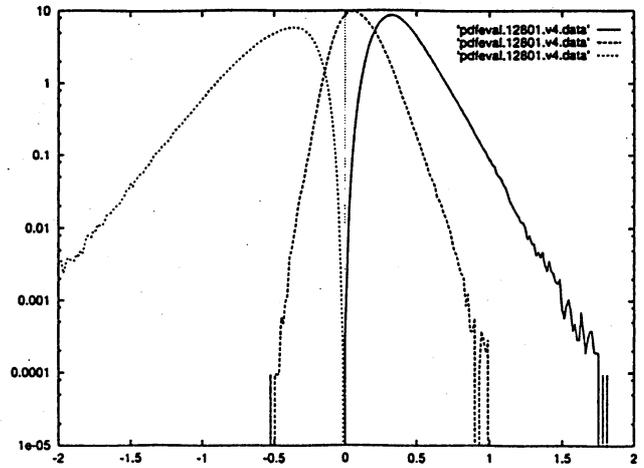


Fig.5b : その log-linear プロット.

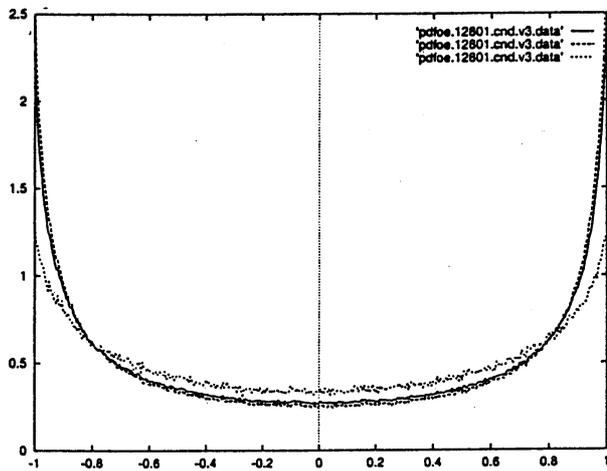


Fig.6a :  $\omega$  と  $e_2$  のなす角の余弦の確率分布 (実線 : 無条件, 鎖線 :  $\lambda_2 \geq 0$ , 点線 :  $\lambda_2 < 0$ ).

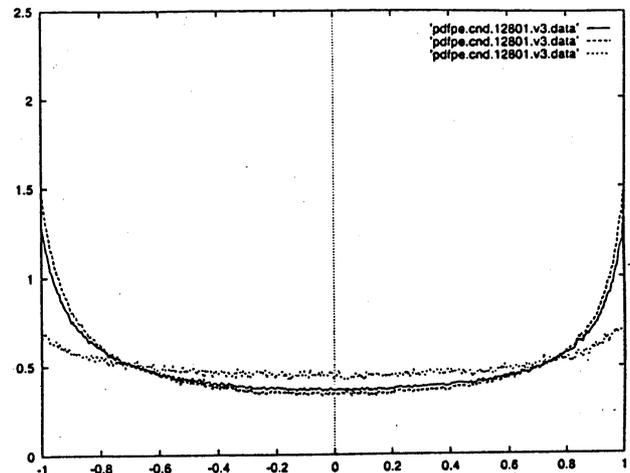


Fig.6b :  $\delta l$  と  $e_2$  のなす角の余弦の確率分布 (実線 : 無条件, 鎖線 :  $\lambda_2 \geq 0$ , 点線 :  $\lambda_2 < 0$ ).

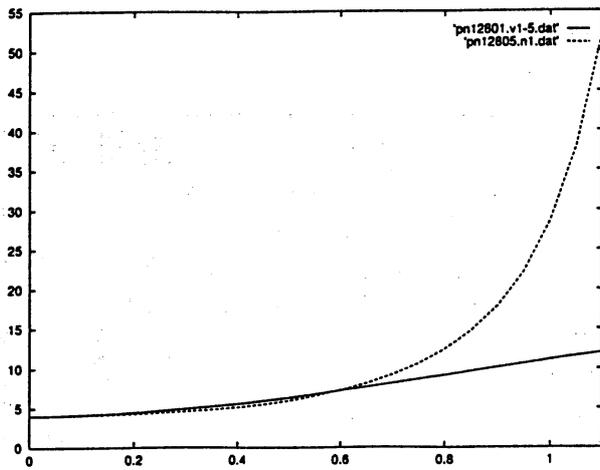


Fig.7 :  $\langle |\delta l|^2/2 \rangle$  (実線) と  $\langle |\delta m|^2/2 \rangle$  (破線) の時間発展.

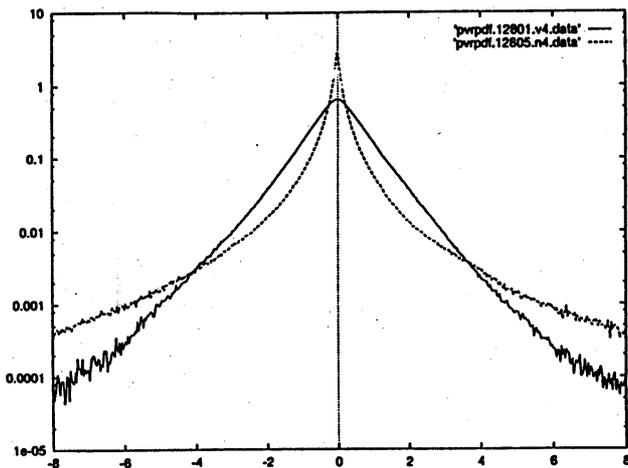


Fig.8a :  $\omega$  と  $\delta m$  の確率分布 (1成分, log-linear).

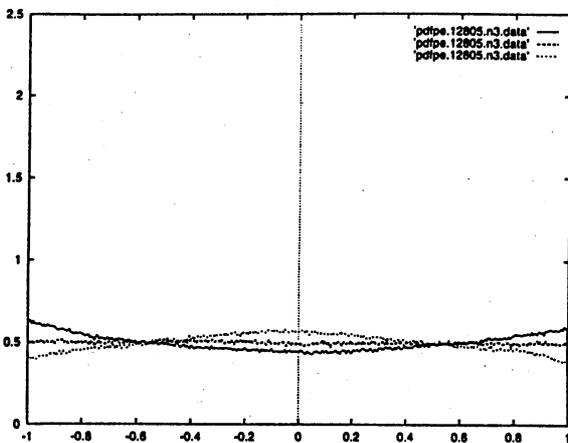


Fig.8b :  $\delta m$  と  $e_1$  (実線),  $e_2$  (破線) &  $e_3$  (点線) のなす角の余弦の確率分布.