

非粘性乱流場における微細渦構造

航技研 跡部 隆 (Takashi Atobe)

1 はじめに

近年における計算機の性能向上にともない、十分発達した乱流場の統計的な性質はかなり解明されてきた¹⁻⁶⁾。これらの結果はコルモゴロフの予言を支持するものであり、実験的にも矛盾がない。

しかし乱流の発達段階においては、いまだに普遍的な現象は明確に示されてはいない。そこで本研究はこの初期段階に着目し、乱流場の生成過程における力学的性質を明らかにすることを目標に、支配方程式を直接解く、直接数値シミュレーション (DNS) によりこれを解析した。

ただしこの解析には以下のような問題点もある。つまり統計的に平衡と見なせる完全発達段階とは違い、初期条件への依存度がはっきりしない発達過程の解析にどれほどの意味があるか、というものである。初期の記憶を完全に失うためには、代表的な大きさを持つ渦が数回転するくらいの時間が必要だと考えられるのに、この種の解析はこれを完全に無視して行うのである。

そこで本研究はこのような状況を踏まえた上で、初期条件として統計的にランダムな量を設定することによってより普遍的な性質が得られる、という立場で解析を進めた。

また十分初期においては流れの構造がまだ散逸スケールまで到達しないであろうと考え、基礎方程式を $N-S$ 方程式でなく、オイラー方程式として DNS を行った。

2 オイラー方程式のDNS

本研究における数値計算は、次のような基礎方程式について一様性、等方性の仮定を課して行われた。まず基礎方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

ここで \mathbf{u} は速度、 ρ は密度、そして p は圧力を表す。境界条件は、一様性、等方性の仮定から、周期境界条件を採用した。初期条件は、計算結果の普遍性を期待するため、まず与えるエネルギーをフーリエ空間におけるのスペクトルの形が以下のような典型的な形状を持つように設定した。

$$E(k, 0) = Ak^4 \exp[-2k^2], \quad (A: \text{定数}). \quad (3)$$

ここで、 $E(k, t)$ は、

$$E(k, t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{k}|=k} |\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)|^2, \quad (4)$$

で定義され、 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ は速度のフーリエ成分であり、その位相を乱数によって正規分布で与えることにより、ある意味で初期条件の特殊性を打ち消している。

次に数値計算法について説明する。まず空間積分に関しては、空間構造の周期性に着目しフーリエ・スペクトル法を用いた。このときのフーリエモード数（格子点数）は 256^3 個とし、FFTに伴うエイリアジングエラーについては 3/2 則を併用した。

時間積分に関しては、4次精度のルンゲ・クッタ法を用いた。またこのときの時間きざみは 0.001 で、これは十分な精度を保證する値であることを予備計算で確認している。

3 数値計算

図1にエネルギーとエンストロフィーの時間発展の様子を示す。数値計算の精度を反映して、エネルギーについてはその値にほとんど変化がみられない。エンストロフィーは $t = 4$ を超えると急激に増大するが、これはオイラー方程式の解の爆発との関連も含め興味深いものである。またこのことは、渦度場の発達がかなり急激であることを意味している。

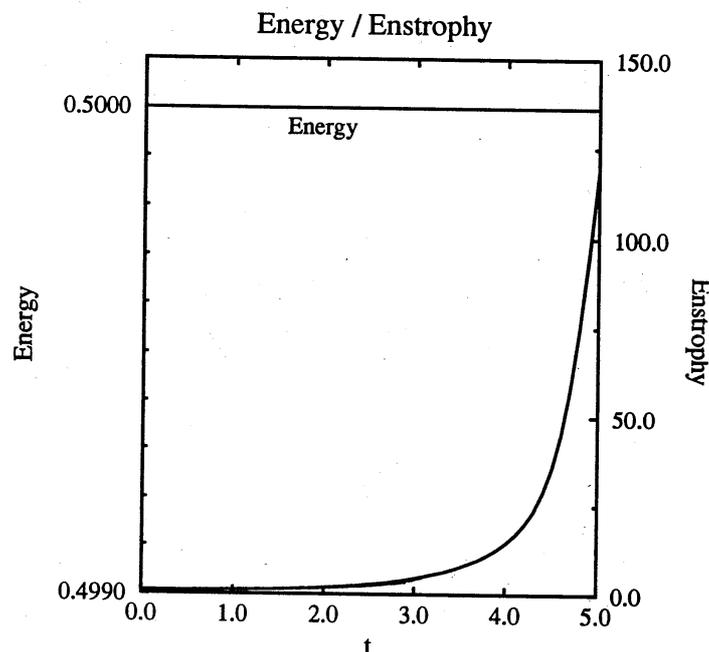


図1

この時期におけるエネルギーの時間発展について、フーリエ空間で調べたものを図2に示す。この図を見ると、初期に低波数側に集中していたエネルギーが、時間とともに高波数側に移動していく様子がわかる。ただしこのエネルギーの波数空間でのカスケードは、エネルギーが本計算の最大有効波数 ($k \approx 85$) まで達すると低波数側に逆カスケードを起こし、高波数側のスペクトルに逆勾配を持つ領域を作っている。このスペクトルの逆勾配は、数値計算の自由度の中でエネルギーの当分配を起こしていることを示している。これは本来の物理現象とは矛

盾するものであり、数値計算の限界を示している。したがって今回の計算において信頼できる時間領域は約 $t \simeq 4$ までの範囲である、ということが図2から読み取れる。

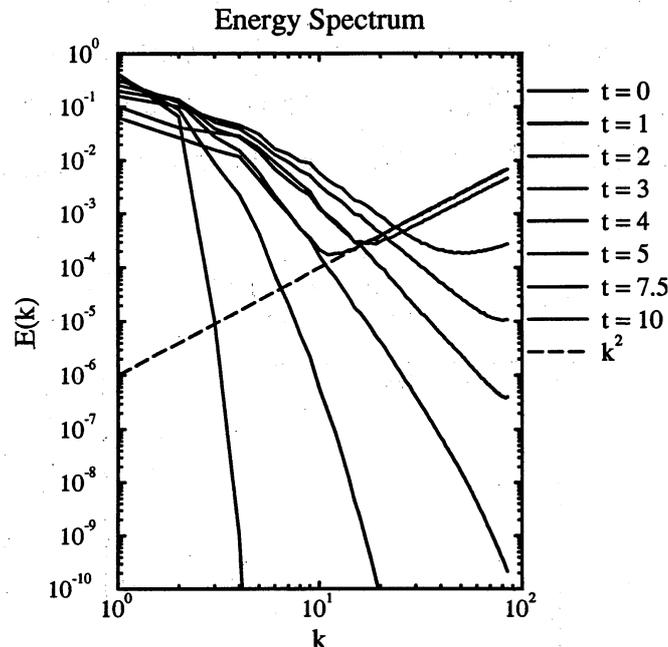


図2

しかしながら、より精密に有効範囲を調べるためにはアナリティシテイストリップを議論しなければならない⁷⁻⁹⁾。これは、解析対象の最小スケールを表すものと理解されるもので、エネルギースペクトルの高波数領域でフィッティングされるある関数の中に現れるものである。具体的には以下の関数中の $\delta(t)$ がこれに対応している。

$$E(k, t) = c(t)k^{-n(t)}e^{-2\delta(t)k}. \quad (5)$$

ここで $c(t), n(t)$ は任意関数である。

粘性流の場合、対応するレイノルズ数から必要最低限の計算格子数(自由度の大きさ)を算定することができるが、レイノルズ数が定義できない非粘性流についてはこの $\delta(t)$ を一つの指標とするのである。つまりこの $\delta(t)$ が数値計算の最小メッシュ以上であれば計算結果が有効であると考えるのである。

図3はこの $\delta(t)$ の時間発展を示したもので (×印), 図中点線が最小メッシュスケール (Δx), 波線が $2\Delta x$ を表している. この図を見ると, 時間とともに系のスケールは急速に減少していくことがわかる. そして $t \simeq 2$ で本 DNS の最小メッシュのスケールまで到達する. つまり, この計算での有効な領域は $t \simeq 2$ までの範囲であると考えることができる.

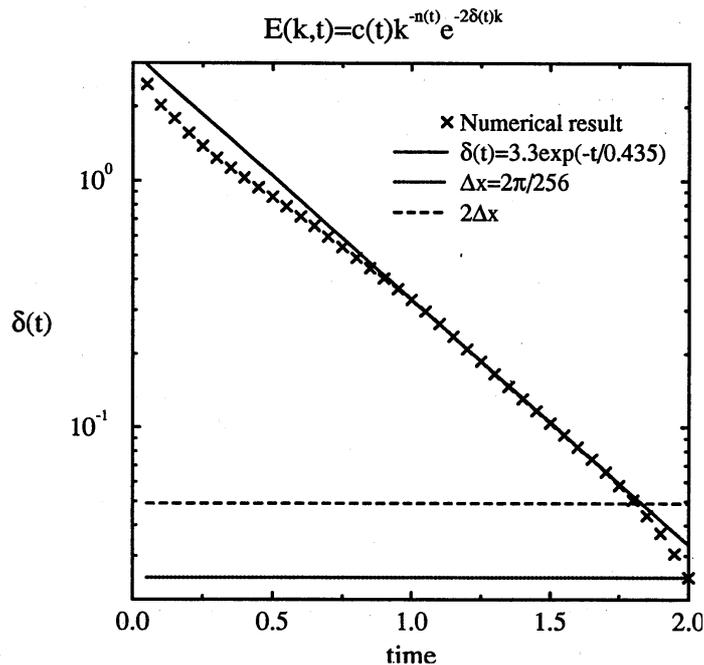


図3

4 渦度とストレインテンソル

以上のことを踏まえた上で, 渦度場の時間発展を解析する. ここでは特に各瞬間に最大の渦度を持つ点に注目し, そこでの性質を解析した. これは最大の渦度を持つ領域が, 系全体の性質を代表すると考えるからである.

図4は渦度が最大値を持つ点でのストレインテンソル S_{ij} の大きさについての時間発展の様子を示したものである. また図中の α, β, γ はそれぞれ S_{ij} の第一, 第二, 第三固有値を示す. これを見ると, α, γ の

絶対値は時間発展とともに増加傾向にあるが、 β は0付近をほぼ一定の値で推移していることがわかる。

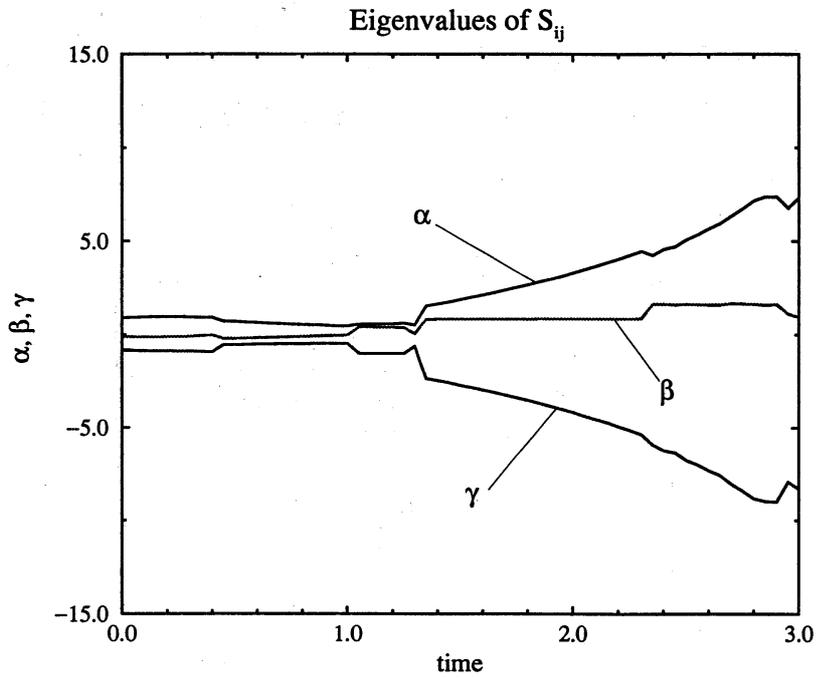


図 4

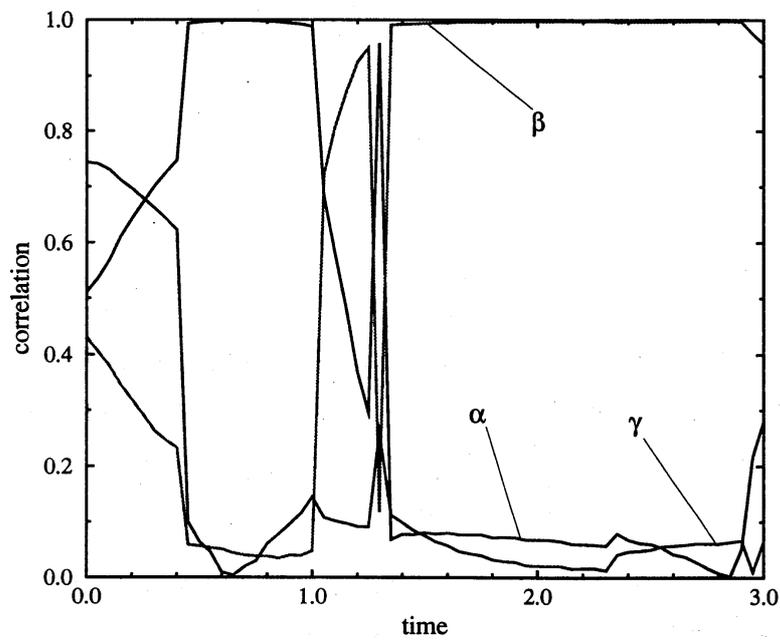


図 5

次に実際の渦度ベクトルとそれぞれの固有ベクトルがどのような位置関係にあるのかを調べたのが図5である。これは、それぞれのベクトルと渦度ベクトルとの内積の値を示したもので、渦度ベクトルがごく初期において ($t \approx 1$) β の方向に揃うことがわかる。

このことから言えることは、流体の渦運動がストレインテンソルの第一、第三固有ベクトルのはる平面内に拘束され、その運動がほぼ2次元的である、ということである。そこで、流体がその回転中心の周りでらせん運動をしている、と仮定し、そのようなモデルに対して渦度がどのように変化していくかを調べてみた。

5 らせん渦モデル

先に述べたように、ここでは流体の運動が回転軸の周りを2次元的にらせん運動をすると仮定する。ただしこの時、初めに想定した対象領域の半径は変化しないと考える。つまりゼンマイを巻き取っていく挙動に類似するもので、その概念図を図6に示す。

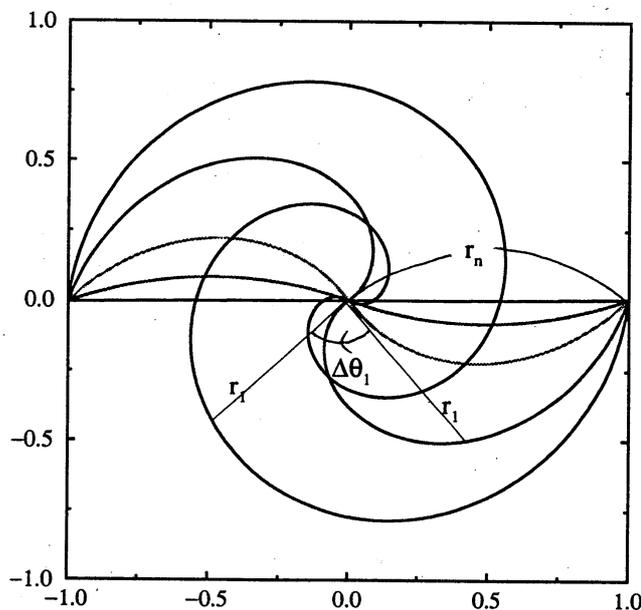


図6

またこの時のらせんの形状は以下のように定義される。

$$r = a\theta^k \quad (6)$$

ここで θ は巻き込み角を表す。(中心を0, 外側の固定点の巻き込み角を θ_n とする。) k は任意の定数であるが, ここでは $k = 0.5$ とした。また, 渦領域の半径を r_n に固定することにより, a は次のようになる。

$$a = \frac{r_n}{\sqrt{\theta_n}}. \quad (7)$$

したがって, 巻き込み角 θ_n のときに半径が r_n であるようならせんは次のように表される。

$$r = \frac{r_n}{\sqrt{\theta_n}}\sqrt{\theta}. \quad (8)$$

単位時間当たりの伸長率は S_{ij} の第一固有値 α に等しいので, 単位時間当たりの巻き込み角の増分は $\alpha\theta$ で表される。したがって, 巻き込み角 θ_1 の点での巻き込みの増分は,

$$\Delta\theta_1 = -\alpha(\theta_n - \theta_1) \quad (9)$$

$$= -\alpha\left(\theta_n - \frac{r_1^2}{r_n^2}\theta_n\right) \quad (10)$$

$$= -\alpha\theta_n\left(1 - \frac{r_1^2}{r_n^2}\right) \quad (11)$$

となる。また, この $\Delta\theta_1$ は, 中心からの距離 r_1 での角速度に対応するので, 結局その点での速度の大きさ v_1 は以下のようなになる。

$$v_1 = r_1\Delta\theta_1 \quad (12)$$

$$= -\alpha\theta_n r_1\left(1 - \frac{r_1^2}{r_n^2}\right) \quad (13)$$

このようにして求まるらせん渦モデルの作る速度場から, 渦度を計算すると次のようになる。

$$\omega_1 = -2\alpha\theta_n\left(1 - 2\frac{r_1^2}{r_n^2}\right). \quad (14)$$

また仮定から,

$$\theta_n = \theta_0 e^{\alpha t}, \quad (15)$$

であることを考慮すると, 結局 ω_1 は

$$\omega_1 = -2\alpha\theta_0 \left(1 - 2\frac{r_1^2}{r_n^2}\right) e^{\alpha t}, \quad (16)$$

となる.

この結果が意味するのは, 渦度の時間発展が指数関数的な増大を示すということである. このことは, 少なくとも乱流場の発達初期の段階においては渦度は指数関数的にかなり急激に増大することを示す.

6 まとめ

本研究は, 渦度場の時間発展, 特に初期における発展の様子を数値的に調べたものである. このとき, ごく初期段階ではまだ粘性の影響が大きくないとして基礎方程式にはオイラー方程式を選び, また初期値による特殊性をなるべく消すためにランダムな初期渦度場を計算した.

渦度場の時間発展を解析した結果, 渦度の方向がごく初期においてストレインテンソルの第二固有値の方向に揃うことがわかった. このことから, 流体の運動が第一, 第三固有値のはる平面内で2次元的ならせん運動をすると仮定し, 適当なモデルを構築し, そのモデルにおける渦度の時間発展の様子を調べた. その結果, この2次元的ならせん渦モデルでは渦度の大きさが指数関数的に急激に増大することがわかった.

しかし本来の渦運動は, その回転軸方向への伸長があるためそれを考慮していない今回のモデルは不完全な結果しか表さない. 回転軸方向への運動を考慮した場合, あるいは渦度の有限時間内における発散を示唆する結果が得られる可能性もある. これについては今後追求するつもりである.

参考文献

- [1] R.M.Kerr "Higher-order derivative correlations and the alignment of small-scale structures in isotropic numerical turbulence" *J.Fluid Mech.* vol.153 (1985) 31
- [2] K.Yamamoto and I.Hosokawa "A decaying isotropic turbulence pursued by the spectral method" *J.Phys.Soc.Jpn* vol.57 (1988) 1532
- [3] A.Vincent and M.Meneguzzi "The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence" *J.Fluid Mech.* vol.225 (1991) 1
- [4] Z.-S.She "Physical model of intermittency in turbulence: near-dissipation-range non-Gaussian statistics" *Phys.Rev.Lett.* vol.66 (1991) 600
- [5] S.Chen, G.Doolen, R.H.Kraichnan and Z.-S.She "On statistical correlations between velocity increments and locally averaged dissipation in homogeneous turbulence" *Phys.Fluid A*5 (1993) 458
- [6] J.Jiménez, A.A.Wray, P.G.Saffman and R.S.Rogallo "The structure of intense vorticity in isotropic turbulence" *J.Fluid Mech.* vol.255 (1993) 65
- [7] J.T.Beale, T.Kato and A.Majda "Remarks on the Breakdown of Smooth Solutions," *Commun.Math.Phys.* vol.94 (1984) 61
- [8] K.R.Sreenivasan and C.Meneveau "Singularities of the equations of fluid motion," *Phys.Rev.A* vol.38 no.12 (1988) 6238
- [9] M.E.Brachet, M.Meneguzzi, A.Vincent, H.Politano and P.-L.Sulem "Numerical evidence of smooth self-similar dynamics and possibility of subsequent collapse for three-dimensional ideal flow," *Phys.Fluid A* 4 (1992) 2845