数理解析研究所講究録
1052 巻 1998 年 1-9



# $S$-Hardy-Littlewood homogeneous spaces and its application

森下昌紀 (Masanori Morishita) (金沢大理)
渡部隆夫 (Takao Watanabe) (阪大理)

アファイン代数多様体上の整数点の漸近的な分布の状況を特徴付ける性質として, Borovoi と Rudnick([B-R]) は Hardy-Littlewood 多様体の概念を導入した. "$S$-Hardy-Littlewood homogeneous space"はその概念をアファイン等質空間の場合に $S$-整数点まで拡張したものである. 等質空間の場合に限定した理由は, ある種の等質性がなければ $S$-整数点の分布関数の一意性を示すことが困難であり, また分布関数を記述する式も簡単なものにはなりえないと考えたからである. この論説では, $S$-Hardy-Littlewood 等質空間の定義と基本的な性質, 主結果, その応用を与える. "Hardy-Littlewood"という名前が用いられた理由や, 幾つかの代表的な例, 主結果の証明のアウトラインについては [M-W2] を参照してください.

## 1. 定義と基本的性質.

以下 $k$ を有限次代数体として, $\mathcal{O}$ をその整数環とする. $k$ の素点全体の集合を $\mathcal{V}$ とする. また $\mathcal{V}_\infty$ で無限素点全体をあらわし, $\mathcal{V}_f$ で有限素点全体をあらわす. 各素点 $v \in \mathcal{V}$ に対して, $k_v$ は $k$ の $v$ での完備化とし, $|\cdot|_v$ は $k_v$ の正規化された付値をあらわす. もし $v$ が有限素点ならば $\mathcal{O}_v$ は $k_v$ の整数環とする. $\mathbb{A}$ は $k$ のアデール環をあらわすとし, その無限部分を $k_\infty$, 有限部分を $\mathbb{A}_f$ とかく. $k$ 上定義されたスムースな代数多様体 $X$ が与えられたとき, そのアデール化を $X(\mathbb{A})$ であらわす. $X(\mathbb{A})$ は直積 $X(\mathbb{A}) = X(k_\infty) \times X(\mathbb{A}_f)$ に分解される. $G$ が $k$ 上定義されたアファイン連結代数群のとき, $G(\mathbb{A})$ 上の玉河測度を $\omega_{\mathbb{A}}^G$ で, 玉河数を $\tau(G)$ であらわす. また $G$ の $k$-有理指標のなす $\mathbb{Z}$-自由加群を $X_k^*(G)$ であらわす.

さて $G$ は $k$ 上定義されたユニモジュラーアファイン連結代数群で, $X$ は $G$ が右から作用するアファイン等質空間とする. $G$ の作用と $X$ は共に $k$ 上定義されているとする. 以下次を仮定する.

(1.1) $X$ は $k$-有理点 $x_0 \in X(k)$ を持つ.

(1.2) $x_0$ の $G$ での固定化群を $H = H_{x_0}$ とするとき, $H$ は連結ユニモジュラーである.

このとき, $X(\mathbb{A})$ 上の $G(\mathbb{A})$ 不変測度で $\omega_{\mathbb{A}}^G$, $\omega_{\mathbb{A}}^H$ とマッチするものが唯一つある. それを $\omega_{\mathbb{A}}^X$ であらわす. $S$-Hardy-Littlewood 性を定義するために, 次のデータを固定しておく.

(1.3) $\mathcal{V}$ の有限部分集合 $S$.

(1.4) $G$ の右作用を持つ $k$-アファイン空間 $W$ と $k$ 上定義された $G$-同値な埋め込み $\iota : X \to W$.

(1.5) 各素点 $v \in S$ に対し, $k_v$-ベクトル空間 $W(k_v)$ 上のノルム $||\cdot||_v$.

ここで (1.4) のような埋め込みは Chevalley の定理により常に存在する. 上で固定した $S$ にしたがって

$$X(k_S) = \prod_{v \in S} X(k_v), \qquad X(\mathbb{A}^S) = \prod_{v \in \mathcal{V} \setminus S}' X(k_v)$$

とおくことにより, $X(\mathbb{A})$ は $X(\mathbb{A}) = X(k_S) \times X(\mathbb{A}^S)$ と分解する. さらに

$$X(k_{\mathcal{V}_\infty \setminus S}) = \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty \setminus S} X(k_v), \qquad X(\mathbb{A}^{\mathcal{V}_\infty \cup S}) = \prod_{v \in \mathcal{V}_f \setminus S}' X(k_v)$$

とおけば, $X(\mathbb{A}) = X(k_S) \times X(k_{\mathcal{V}_\infty \setminus S}) \times X(\mathbb{A}^{\mathcal{V}_\infty \cup S})$ と分解する. この分解に応じて, $X(\mathbb{A})$ の部分集合 $B = B_S \times B_{\mathcal{V}_\infty \setminus S} \times B^{\mathcal{V}_\infty \cup S}$ を次の条件が充たされるようにとる.

(1.6) $B_S = \prod_{v \in S} B_v$ は $X(k_S)$ の中の $G(k_S)$-軌道である.

(1.7) $B_{\mathcal{V}_\infty \setminus S}$ はユークリッド空間 $W(k_{\mathcal{V}_\infty \setminus S})$ の有界凸集合と $X(k_{\mathcal{V}_\infty \setminus S})$ との交わりである.

(1.8) $B^{\mathcal{V}_\infty \cup S}$ は $X(\mathbb{A}^{\mathcal{V}_\infty \cup S})$ の開コンパクト集合である.

正の実数 $T$ をとり,

$$B_S(T) = \{(x_v) \in B_S\colon \text{任意の } v \in S \text{ について } ||x_v||_v \leq T\}$$
$$B(T) = B_S(T) \times B_{\mathcal{V}_\infty \setminus S} \times B^{\mathcal{V}_\infty \cup S}$$

とおく. $B(T)$ は $X(\mathbb{A})$ の相対コンパクトな部分集合である. したがって各 $g \in G(\mathbb{A})$ に対して

$$N_S(T, X, B, g) = \sharp(X(k)g \cap B(T))$$

は有限である.

定義. $X$ は上記の仮定 (1.1),(1.2) を充たす $G$-等質空間とする. 以下に述べる 2 条件を充たす恒等的に 0 でない関数 $\delta\colon X(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在するとき, $X$ は $S$-Hardy-Littlewood 等質空間であるという.

(S-HL1) $\delta$ は局所定値で, $G(k_S)$-不変である.

(S-HL2) 上記の (1.6),(1.7),(1.8) を充たす $X(\mathbb{A})$ の任意の部分集合 $B$ と任意の $g \in G(\mathbb{A})$ に対し

$$N_S(T, X, B, g) \sim \int_{B(T)} \delta(xg^{-1}) d\omega_{\mathbb{A}}^X(x) \quad (T \to \infty)$$

が成り立つ.

(ここで実変数 $T$ の 2 つの非減少非負関数 $f_1(T), f_2(T)$ に対して, $f_1(T) \sim f_2(T)$ $(T \to \infty)$ は, $f_2$ が恒等的に 0 でなければ $\lim_{T\to\infty} f_1(T)/f_2(T) = 1$ であり, $f_2$ が恒等的に 0 ならば $f_1$ も恒等的に 0 であることを意味する.)

このとき $\delta$ を密度関数という.

注 1. 上の定義は埋め込み (1.4) とノルムの取り方 (1.5) に依存するが, 記述を簡単にするため混乱がなければ明記しない.

注 2. $S = \mathcal{V}_\infty$ とする. $G$ が半単純かつ単連結ならば $G(k_S)$ は位相的に連結になるから, $X(k_S)$ の中の $G(k_S)$-軌道も位相的に連結になる. したがってこの場合 (S-HL1) の中の $\delta$ の $G(k_S)$-不変性の条件は $\delta$ の局所定値の条件から従う. 特にこのとき (S-HL1) は [B-R, Definition 2.3] の条件と一致する.

注 3. (S-HL2) は $X(k_S)$ が非コンパクトの場合に意味を持つ.

注 4. ([M-W2, Theorem 2.2] の訂正) 以前に書かれたノート [M-W2] では (S-HL2) の条件は $g$ が単位元の場合の漸近挙動のみを記述していたが, これだけでは以下に述べる 定理 A (5),(6) を示すことができないので上のように変更した. とくに [M-W2, Theorem 2.2] は [M-W2, Definition 2.1] ではなくここで述べた定義の下で正しい. ただしこの定義の変更は主結果には影響しない. 即ち [M-W2, Theorems 3.1, 3.2] はここで述べた定義の下でも正しい.

定義から密度関数 $\delta$ は次に述べるような性質を持つことがわかる.

定理 A. $X$ は密度関数 $\delta$ をもつ $S$-Hardy-Littlewood 等質空間とする. このとき

(1) $\delta$ は条件 (S-HL1),(S-HL2) で一意的に決まる.

(2) $\delta$ は $G(k)$-不変で $\operatorname{supp}\delta \subset X(k)G(\mathbb{A})$ である.

(3) $S \cup \mathcal{V}_\infty$ を含む素点の有限集合 $S_1$ を適当に取れば, $X$ の $S_1$-整数点の集合 $X(\mathcal{O}_{S_1})$ は $\prod_{v\in\mathcal{V}\setminus S_1} X(\mathcal{O}_v)$ の中で稠密である.

(4) $G$ が $S$ に関して強近似定理を充たす (即ち $G(k)$ は $G(\mathbb{A}^S)$ の中で稠密) ならば, $\delta$ は $G(\mathbb{A})$-不変で $\operatorname{supp}\delta = X(k)G(\mathbb{A})$ である.

(5) $X_k^*(G) = X_k^*(H) = 0$ とする. このとき

$$\frac{1}{\tau(G)}\int_{G(\mathbb{A})/G(k)} \delta(xg)d\omega_{\mathbb{A}}^G(g) = \begin{cases} \tau(G,X)^{-1} & (x \in X(k)G(\mathbb{A})) \\ 0 & (x \notin X(k)G(\mathbb{A})) \end{cases}$$

となる. ここで $\tau(G,X)$ は $X$ の玉河数である.

(6) $G$ が $S$ に関して強近似定理を充たしかつ $X_k^*(G) = X_k^*(H) = 0$ とする. このとき

$$\delta(x) = \begin{cases} \tau(G,X)^{-1} & (x \in X(k)G(\mathbb{A})) \\ 0 & (x \notin X(k)G(\mathbb{A})) \end{cases}$$

である．更に $\tau(G,X)=1$ ならば $\delta$ は $X(\mathbb{A})$ 上恒等的に 1 になる．

(7) $\delta$ が $X(\mathbb{A})$ 上恒等的に 1 ならば, $X(k)$ は $X(\mathbb{A}^S)$ の中で稠密である．

注 4. $N_G$ を $G$ のべき単根基とする．このとき Kneser, Platonov の定理から, $G$ が $S$ に関して強近似定理を充たすための必要充分条件は 2 条件

(i) $G/N_G$ は半単純かつ単連結である．

(ii) $G/N_G$ の任意の単純 $k$-因子 $G_i$ について, $G_i(k_S)$ は非コンパクトである

が成り立つことである．

注 5. $G$ が $S$ に関して強近似定理を充たしているとき, $X(k)$ が $X(\mathbb{A}^S)$ の中で稠密になるための必要充分条件は $X(\mathbb{A}^S)=X(k)G(\mathbb{A}^S)$ となることである．

注 6. $X_k^*(G)=X_k^*(H)=0$ のとき

$$\tau(G,X)=\frac{\tau(G)}{\tau(H)|\ker(\ker^1(k,H)\to\ker^1(k,G))|}$$

が成り立つ．ここで $\ker^1(k,G)=\ker(H^1(k,G)\to\prod_{v\in\mathcal{V}}H^1(k_v,G))$ とする．さらに $G/N_G$ が半単純かつ単連結ならば $\tau(G,X)=\sharp\mathrm{Pic}(H)$ となる．

注 7. (6) において, $\delta$ の公式の中には $S$ は現れない．この意味で $\delta$ は"$S$ に関して一様"である．しかしながら, $S$ を含む素点の有限集合 $S'$ をとったときに, "$X$ が $S$-Hardy-Littlewood ならば $X$ は $S'$-Hardy-Littlewood になる" かどうかは一般にはわからない．

## 2. $S$-Hardy-Littlewood 性の必要条件

このセクションでは主結果を述べる．$G,X$ は (1.1), (1.2) を充たすものとし, (1.3), (1.4), (1.5) のデータは固定されているとする．更に以下では $G$ は簡約可能であると仮定する．各素点 $v\in\mathcal{V}$ に対して $K_v$ は $G(k_v)$ の極大コンパクト部分群とする．しばらくの間素点 $w\in S$ と $k$-有理点 $x\in X(k)$ を固定する．$H_x$ を $x$ の $G$ の中での固定化群とする．$H_x(k_w)\backslash G(k_w)$ 上の関数空間 $\mathcal{H}_{x,w}$ を

$$\mathcal{H}_{x,w}=\{f\colon H_x(k_w)\backslash G(k_w)\to\mathbb{C}\colon \text{スムースで, 更に } w\in\mathcal{V}_f \text{ ならば } K_w\text{-有限なもの}\}$$

で定義する．$G(k_w)$ は右移動 $\rho$ により $\mathcal{H}_{x,w}$ に作用する．各 $f\in\mathcal{H}_{x,w}$ に対して, $\pi_f$ を $\{\rho(g)f\colon g\in G(k_w)\}$ で張られた $\mathbb{C}$-ベクトル空間とする．$\pi_f$ は $\rho$ の部分表現を与える．$\mathcal{H}_{x,w}$ の部分集合 $\mathcal{H}_{x,w}^u$ を次で定義する．

$$\mathcal{H}_{x,w}^u=\{f\in\mathcal{H}_{x,w}\colon \pi_f \text{ は無限次元, 既約でかつ } G(k_w) \text{ のユニタリ表現に拡張できる.}\}$$

いま次に述べるような 2 つの条件 $(\mathrm{V}_{x,w})$, $(\mathrm{MF}_{x,w})$ をおく.

$(\mathrm{V}_{x,w})$ 任意の $f \in \mathcal{H}^u_{x,w}$ は無限遠で 0 になる. 即ち任意の実数 $\epsilon > 0$ に対し, $H_x(k_w)\backslash G(k_w)$ のコンパクト部分集合 $C_{f,\epsilon}$ で, $g \notin C_{f,\epsilon} \Longrightarrow |f(g)| < \epsilon$, となるものが取れる.

$(\mathrm{MF}_{x,w})$ 任意の $f \in \mathcal{H}^u_{x,w}$ に対して, $\pi_f$ の $\mathcal{H}_{x,w}$ の中での重複度は有限である.

条件 $(\mathrm{V}_{x,w})$ は Howe-Moore による無限次元既約ユニタリ表現の行列成分の無限遠方消滅定理の類似である. このとき主結果は次のように述べられる.

定理 B. $G, X$ は上のとおりとし, 更に $G$ は半単純かつ単連結で, $k$-anisotropic とする. また次の 2 条件が成り立つと仮定する.

(2.1) ある $v \in S$ において, $G$ は $k_v$-anisotropic な単純因子を持たない.

(2.2) ある $w \in S$ において, 条件 $(\mathrm{V}_{x,w})$, $(\mathrm{MF}_{x,w})$ がすべての $k$-有理点 $x \in X(k)$ で成り立つ.

さらにもし (2.2) を充たす $w$ が無限素点ならば, $W(k_w)$ 上のノルム $\|\cdot\|_w$ は $K_w$-不変であると仮定する. このとき $X$ は $S$-Hardy-Littlewood 等質空間である. また密度関数は

$$\delta(x) = \begin{cases} \tau(G,X)^{-1} & (x \in X(k)G(\mathbb{A})) \\ 0 & (x \notin X(k)G(\mathbb{A})) \end{cases}$$

となる.

証明方法は Kuga, Murase 及び Duke, Rudnick, Sarnak の論法の拡張である. アウトラインについては [M-W2] を参照のこと.

注 8. 仮定 (2.1) から $G$ は $S$ に関して強近似定理を充たす.

注 9. 仮定 (2.2) において, 条件 $(\mathrm{V}_{x,w})$, $(\mathrm{MF}_{x,w})$ は $X(k)$ の中の $G(k)$-軌道の代表系の元である $x$ に対して成立していればよい.

注 10. $W(k_w)$ 上のノルム $\|\cdot\|_w$ が $K_w$ の部分群 $L_w$ で不変であるとする. $\mathcal{H}^u_{x,w}$ の要素で右 $L_w$-不変なもの全体のなす集合を $(\mathcal{H}^u_{x,w})^{L_w}$ とあらわす. このとき仮定 (2.2) の条件 $(\mathrm{V}_{x,w})$, $(\mathrm{MF}_{x,w})$ において $\mathcal{H}^u_{x,w}$ は $(\mathcal{H}^u_{x,w})^{L_w}$ で置き換えてよい. 特に $L_w = K_w$ の場合は $X(k_w)$ 上の球関数の条件に書き直すことができる.

注 11. $X$ がアファイン対称空間であるとする. 無限素点 $w \in \mathcal{V}_\infty$ において, $G$ が $k_w$-単純, $k_w$-isotropic ならば, 条件 $(\mathrm{V}_{x,w})$, $(\mathrm{MF}_{x,w})$ はすべての $x \in X(k)$ で充たされることが証明されている. ($(\mathrm{V}_{x,w})$ は Rudnick-Schlichtkrull による. $(\mathrm{MF}_{x,w})$ はより一般的な状況の下で Oshima により示されている.)

上の注から系として次が従う.

系. $G$ は半単純, 単連結で $k$-anisotorpic とし, $X$ はアファイン対称空間とする. またある無限素点 $w$ で $G$ は $k_w$-単純かつ $k_w$-isotropic とする. このとき $w \in S$ であるような素点の有限集合 $S$ について, $X$ は $S$-Hardy-Littlewood 等質空間になる.

注 12. Borovoi-Rudnick は [B-R] で彼らの主結果の系として次のことを示した.
$G$ は半単純, 単連結で $\mathcal{V}_\infty$ に関して強近似定理を充たすとし, $X$ はアファイン対称空間とする. また $X_k^*(H) = 0$ とする. このとき $X$ は $\mathcal{V}_\infty$-Hardy-Littlewood 等質空間である.

3. 応用

このセクションでは, まず 3 変数 2 次形式から定義される 2 次曲面が適当な $S$ について $S$-Hardy-Littlewood 等質空間になることを解説し, その応用として, ある特別な場合に, 2 次曲面上の $S$-整数点の漸近的分布が一様であることを示す.

以下このセクションを通して $W$ を $k$ 上定義された 3 次元ベクトル空間とし, $Q(x)$ は $W$ 上の非退化 2 次形式とする. $W(k)$ の基底 $e_1, e_2, e_3$ に関して $Q(x)$ に対応する対称行列は整数環 $\mathcal{O}$ に成分を持つと仮定し, その行列式の値を $d(Q)$ とおく. 各素点 $v \in \mathcal{V}$ に対して, $W(k_v)$ 上のノルムを

$$||x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3||_v = \begin{cases} (|x_1|_v^2 + |x_2|_v^2 + |x_3|_v^2)^{1/2} & (v\text{ が実素点の場合}) \\ |x_1|_v + |x_2|_v + |x_3|_v & (v\text{ が複素素点の場合}) \\ \sup(|x_1|_v, |x_2|_v, |x_3|_v) & (v\text{ が有限素点の場合}) \end{cases}$$

で定義する. さて, 定数 $a \in k^\times$ を固定し, $W$ の中の 2 次曲面 $X = \{x \in W \colon Q(x) = a\}$ を考える. $X$ は $G = SO(Q)$ または $\widetilde{G} = Spin(Q)$ の等質空間である. 以下 $X$ は $k$-有理点 $x_0 \in X(k)$ を持つと仮定する.

定理 C. $Q(x)$ は $k$-anisotropic であると仮定する. $k$ の素点の有限集合 $S$ は次に述べる条件の少なくとも 1 つは充たしているとする.
(3.1) 無限素点 $w \in S$ で, $Q(x)$ は $k_w$-isotropic となるものがある.
(3.2) 有限素点 $v \in S$ で, $v \not| 2d(Q)$ かつ $Q(x)$ は $k_v$-isotropic となるものがある.
このとき $X$ は $S$-Hardy-Littlewood 等質空間で, その密度関数は

$$\delta(x) = \begin{cases} 2 & (x \in X(k)\widetilde{G}(\mathbb{A})) \\ 0 & (x \notin X(k)\widetilde{G}(\mathbb{A})) \end{cases}$$

となる.

証明は (3.1) が充たされる場合は定理 B の系から従う．(3.2) が充たされる場合は, Bump-Furusawa-Friedberg による $G(k_v)$ の球 Bessel-Novodvorski 関数の明示公式から条件 $(\mathrm{V}_{x,v})$ が導かれることから従う．

以後 $k$ は $\mathbb{Q}$ 上 $n$ 次の総実代数体で $Q(x)$ は総正定値であると仮定する．また $X=\{x\in W\colon Q(x)=1\}$ とする．正の整数 $N$ を固定して, $S$ は $N$ を割る $k$ の有限素点の集合とする．これから考えるのは 2 次曲面の直積 $X(k_\infty)$ の中の $S$-整数点の漸近的分布である．より正確に, $k$ の実素点を $w_1,\cdots,w_n$ であらわし, 実数体への埋め込みと同一視する．各自然数 $m$ について, $X_Q^m=\{x\in W\colon Q(x)=N^{2m}\}$ とおく．そして $X(k_\infty)=\prod_i X(k_{w_i})$ の任意の凸領域 $B_\infty$ に対して数え上げ関数

$$N_m(Q,B_\infty)=\sharp\{x\in X_Q^m(\mathcal{O})\colon (N^{-m}w_1(x),\cdots,N^{-m}w_n(x))\in B_\infty\}$$

の $m\to\infty$ での漸近挙動を考察する．$S$-整数点が存在しないと意味がないので, ある自然数 $m_0$ について, $X_Q^{m_0}(\mathcal{O})$ は空集合ではないと仮定しておく．まず Siegel の定理から, $X_Q^m$ の整数点の個数については次のことがわかる．いま $Q$ を含む種を $\mathcal{G}$ で表し, $\mathcal{G}$ の中の類の完全代表系を $Q_1,\cdots,Q_h$ とする．これから

$$N_m(\mathcal{G})=\left(\sum_{i=1}^{h}\frac{1}{|O(Q_i)(\mathcal{O})|}\right)^{-1}\sum_{i=1}^{h}\frac{|X_{Q_i}^m(\mathcal{O})|}{|O(Q_i)(\mathcal{O})|}$$

とおくと

$$N_m(\mathcal{G})=\omega_\infty^X(X(k_\infty))\prod_{v\in\mathcal{V}_f}\omega_v^X(X(N^{-m}\mathcal{O}_v))$$

である．ここで $\omega_v^X$ は $X$ 上の $k$-上定義された $G$-不変ゲージ形式から導かれる $X(k_v)$ 上の測度で, また

$$X(N^{-m}\mathcal{O}_v)=\{x\in X(k_v)\colon ||x||_v\le|N^{-m}|_v\}$$

とする．この公式と定理 C をあわせることにより次を得る．

定理 D. $k,Q,N$ は上のとおりとして, 更に次を仮定する．

(3.3) $N$ は 2 のべきではない．

(3.4) $d(Q)=1$

(3.5) $N$ を割る有限素点 $v$ で, $v\nmid 2$ かつ $Q(x)$ は $k_v$-isotropic となるものがある．

(3.6) 2 次拡大 $k(\sqrt{-1})/k$ は不分岐ではない．(即ち分岐する有限素点がある)

これらが充たされるとき, $X(k_\infty)$ の任意の凸領域 $B_\infty$ に対して

$$N_m(Q, B_\infty) \sim \frac{\omega_\infty^X(B_\infty)}{\omega_\infty^X(X(k_\infty))} N_m(\mathcal{G}) \quad (m \to \infty)$$

が成り 立つ.

証明はおおよそ次のとおり である. $S$ は $N$ を割る $k$ の有限素点の集合であった. (3.4),(3.5) と定理 C から $X$ は $S$-Hardy-Littewood 等質空間になる. したがって $X(\mathbb{A})$ の部分集合 $B(m)$ を

$$B(m) = B_\infty \times \prod_{v \in \mathcal{V}_f} X(N^{-m}\mathcal{O}_v)$$

と取れば

$$N_m(Q, B_\infty) \sim \int_{B(m)} \delta(x) d\omega_{\mathbb{A}}^X(x) \quad (m \to \infty)$$

となる. そこで右辺の積分を計算する. 問題は $B(m) \cap \operatorname{supp} \delta$ を記述することである. これは各素点 $v$ について $X(k_v)$ の $\widetilde{G}(k_v)$-軌道分解を計算することによって得られる. 実際 $X(k_v)$ は高々2つの軌道しか持たず, 各軌道は $k_v^\times / N_{k_v(\sqrt{-1})/k_v}(k_v(\sqrt{-1})^\times)$ の要素に対応する. 更に (3.6) から $B(m)$ は次のようにきれいに 2 つに分割されることがわかる.

$$B(m) = B^+(m) \cup B^-(m), \qquad B^+(m) \subset X(k)\widetilde{G}(\mathbb{A}), \qquad B^-(m) \cap X(k)\widetilde{G}(\mathbb{A}) = \emptyset$$

$$\omega_{\mathbb{A}}^X(B^+(m)) = \omega_{\mathbb{A}}^X(B^-(m)) = \frac{1}{2}\omega_{\mathbb{A}}^X(B(m))$$

したがって, Siegel の公式とあわせれば

$$\int_{B(m)} \delta(x) d\omega_{\mathbb{A}}^X(x) = 2\omega_{\mathbb{A}}^X(B^+(m)) = \omega_{\mathbb{A}}^X(B(m)) = \frac{\omega_\infty^X(B_\infty)}{\omega_\infty^X(X(k_\infty))} N_m(\mathcal{G})$$

を得る.

注 13. 仮定 (3.4) は主に $X(k_v)$, $X(\mathcal{O}_v)$ の軌道分解が簡単に記述できるように付けられたものである.

注 14. 仮定 (3.6) がなければ $B(m)$ が上で述べたようにきれいに 2 つに分割できるかどうかはわからない.

注 15. $k = \mathbb{Q}$ の場合このような公式を求めることについては長い歴史がある. この場合の一般の結果は Duke, Schulze-Pillot により得られた.

## References


[B-R] M. Borovoi and Z. Rudnick, *Hardy-Littlewood varieties and semisimple groups*, Invent. Math. **119** (1995), 37 - 66.

[D-S] W. Duke and R. Schulze-Pillot, *Representation of integers by positive ternary quadratic forms and equidistribution of lattice points on ellipsoids*, Invent. Math. **99** (1990), 49 - 57.

[M-W] M. Morishita and T. Watanabe, *On S-Hardy-Littlewood homogeneous spaces*, Int. Jour. of Math. (to appear).

[M-W2] M. Morishita and T. Watanabe, *On S-Hardy-Littlewood homogeneous spaces*, 第 3 回津田塾大学整数論シンポジウム, 津田塾大学数学-計算機科学研究所報 15 (1998), 108 - 115.