数理解析研究所講究録
1057 巻 1998 年 56-66

有限鏡映群のある種の分解の構成

帝京科学大学
中村 得之

On the construction of certain type of resolutions of finite reflection groups

Tokushi NAKAMURA

Teikyo University of Science and Technology

Abstract

Let W be a finite reflection group in $O(n, R)$ and let $\triangle$ be a simple system associating with W. We assume that $\triangle$ has cardinality n. For each positive integer q, we consider the vector space R^q equipped with a lexicographic order. Let $(R^q)_+$ denote the set of all positive vectors of R^q in the prescribed ordering. Then we have a function $\rho : (R^q)_+ \longrightarrow Z \cap [0, q]$ which maps λ to $\rho(\lambda)$ being the largest index ρ such that $\lambda_i = 0$ for $0 \leq i \leq \rho$. Let $\hat{\rho} : \triangle \to Z \cap [0, q]$ be a function. For each $\hat{\rho}$, let $C(\hat{\rho})$ denote the subset of $M_{qn}(R) \cong \overset{n}{\times} R^q$ defined to be

$$C(\hat{\rho}) = \{ \Lambda \in M_{qn}(R) \mid \forall \alpha \in \triangle \ \ \Lambda\alpha \geqslant 0, \ \rho(\Lambda\alpha) = \hat{\rho}(\alpha) \} .$$

For each integer q, let $\underset{q}{\mathcal{C}}$ be the collection of all sets $wC(\hat{\rho})$ with $w \in W$, $\hat{\rho} : \triangle \to Z \cap [0, q]$. Then $\underset{q}{\mathcal{C}}$ is shown to form a cell-decomposition of $\overset{n}{\times} R^q$. For each pair of integers $q < r$, let ${}^r_q\gamma : {}_r\mathcal{C} \longrightarrow {}_q\mathcal{C}$ denote the natural projection. For each q, let $\underset{q}{\hat{\mathcal{C}}}$ be the Poincare dual of $\underset{q}{\mathcal{C}}$ in $\overset{n}{\times} R^q$ and for each pair $q < r$, let ${}^r_q\hat{\gamma}$ be the dual of ${}^r_q\gamma$. Then the direct limit $\varinjlim \underset{q}{\hat{\mathcal{C}}}$ of $(\underset{q}{\hat{\mathcal{C}}}, {}^r_q\hat{\gamma})$ provides us with a free resolution of Z over Z W which is the analogue of [3].

0. 有限鏡映群

$\mathbb{R}^n$ に属するベクトル

$$\lambda' = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}, \quad \mu' = \begin{pmatrix} \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu'_n \end{pmatrix}$$

に対し，内積

$$(\lambda', \mu') = {}^t\lambda' \cdot \mu' = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda'_i \cdot \mu'_i$$

と定義する。

$$0 \neq \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

が与えられたとき，α に関する $\mathbb{R}^n$ の鏡映を

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - 2(({}^t\lambda \cdot \alpha)/({}^t\alpha \cdot \alpha)) \cdot \alpha$$

と定義する．

W が $\mathbb{R}^n$ の鏡映で生成される有限群であるとき，W を $\mathbb{R}^n$ の有限鏡映群とよぶ．

W を $\mathbb{R}^n$ の有限鏡映群とする。このとき，次の条件 0)，i)，ii) を満たす，$\mathbb{R}^n$ に属する 0 と異なる有限個のベクトルの集合 Φ が存在する．

0) $0 \neq \beta \in \mathbb{R}^n$, $s_\beta \in W \rightarrow 0 \neq {}^\exists\alpha \in \Phi$, ${}^\exists a \in \mathbb{R}$ $\beta = a\alpha$

i) $\alpha \in \Phi \longrightarrow \Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$

ii) $\alpha \in \Phi \longrightarrow s_\alpha \Phi = \Phi$

このような Φ を W の1つのルート系とよぶ．

Φ を $\mathbb{R}^n$ の有限鏡映群の1つのルート系とする。このとき、次の条件 0′) i′) を満たす Φ の部分集合 Δ が存在する。

0′) Δ に属するベクトルは互に線型独立である。

i′) すべての $\alpha \in \Phi$ は、Δ に属するベクトルの同符号の係数をもつ線型結合として表される。

このような Δ を Φ の1つの単純ルート系とよぶ。

W を $\mathbb{R}^n$ の有限鏡影群，Φ を W の1つのルート系，Δ を Φ の1つの単純ルート系とする。

$\alpha, \beta \in \Delta$ に対し，$s_\alpha s_\beta \in W$ の位数を $m(\alpha, \beta)$ とおく。

定理　$W \cong F\{ s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \} / \langle (s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} \mid \alpha, \beta \in \Delta \rangle$

2　$M_{8n}(\mathbb{R}) \cong \overset{n}{\times} \mathbb{R}^8$ の W-共変な胞体分割

W を $\mathbb{R}^n$ の有限鏡映群，Φ を W の1つのルート系とし，Δ を Φ の1つの単純ルート系とする。

こゝで Δ は n 個のベクトルからなるものとする。

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \Delta \subset \mathbb{R}^n, \quad {}^t\lambda' = (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_n) \in {}^t\mathbb{R}^n$$

に対し

$$ {}^t\lambda' \cdot \alpha = \sum_{1 \le i \le n} \lambda'_i \cdot \alpha_i $$

であることに注意する。

$\mathbb{R}^g$ に属する n 個のベクトル λ_i $(1 \leq i \leq n)$ を

$$\lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i^1 \\ \vdots \\ \lambda_i^g \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^g$$

で，${}^t\mathbb{R}^n$ に属する g 個のベクトル ${}^t\lambda'^j$ $(1 \leq j \leq g)$ を

$${}^t\lambda'^j = (\lambda_1^j \cdots \lambda_n^j) \in {}^t\mathbb{R}^n$$

で定め，さらに (g, n) 型行列 Λ を

$$\Lambda = (\lambda_1 \cdots \lambda_n) = \begin{pmatrix} {}^t\lambda'^1 \\ \vdots \\ {}^t\lambda'^g \end{pmatrix} \in M_{gn}(\mathbb{R}) = \overset{n}{\times} \mathbb{R}^g$$

で定義する．このとき

$$\Lambda \alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \lambda_i = \begin{pmatrix} {}^t\lambda'^1 \alpha \\ \\ {}^t\lambda'^g \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^g$$

となることに注意する。

さらに，$\overset{n}{\times} \mathbb{R}^g$ と同相な $\mathbb{R}$ 上の線型空間

$$\Delta \times \mathbb{R}^g = \prod_{\alpha \in \Delta} \alpha \times \mathbb{R}^g$$

を定義する。このとき，次の補助定理が成り立つ

補助定理

$$\prod_{\alpha \in \Delta} \{ \alpha \times \Lambda\alpha \mid \Lambda \in M_{gn}(\mathbb{R}) \} = \Delta \times \mathbb{R}^g \cong M_{gn}(\mathbb{R})$$

証明 $\Delta = \{ \alpha_i \mid 1 \leq i \leq n \}$ とおく。Δ は $\mathbb{R}^n$ の基底をなすから $A = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ は可逆行列である

$$\{ \prod_{\alpha \in \Delta} \alpha \times \Lambda \alpha \mid \Lambda \in M_{gn}(\mathbb{R}) \} = \{ \prod_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \times \Lambda \alpha_i \mid \Lambda \in M_{gn}(\mathbb{R}) \}$$

$$\cong \{ (\Lambda \alpha_1 \cdots \Lambda \alpha_n) \mid \Lambda \in M_{gn}(\mathbb{R}) \}$$

$$= \{ \Lambda A \mid \Lambda \in M_{gn}(\mathbb{R}) \}$$
$$= \{ \Lambda \mid \Lambda \in M_{gn}(\mathbb{R}) \}$$
$$= M_{gn}(\mathbb{R})$$

$$\prod_{\alpha \in \Delta} \alpha \times \mathbb{R}^g = \prod_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \times \mathbb{R}^g \cong \overset{n}{\times} \mathbb{R}^g \cong M_{gn}(\mathbb{R}) \qquad \square$$

$\mathbb{R}^g$ に属する２つのベクトルを

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^g \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \vdots \\ \mu^g \end{pmatrix}$$

とする。整数 $0 \leq \rho \leq g-1$ が存在し，すべての整数 $0 = j \leq \rho$ に対し $\lambda^j = \mu^j$ が成り立ち，かつ $\lambda^{\rho+1} < \mu^{\rho+1}$ が成り立つとき $\lambda < \mu$ と定義する。

特に，整数 $0 \leq \rho \leq g-1$ が存在し，すべての整数 $0 \leq j \leq \rho$ に対し $0 = \lambda^j$ が成り立ち，かつ $0 < \lambda^{\rho+1}$ が成り立つことが $0 < \lambda$ の定義である。

こゝで

$$(\mathbb{R}^g)_+ = \{ \lambda \in \mathbb{R}^g \mid 0 \leq \lambda \}$$

とおく。

任意の $\lambda \in (\mathbb{R}^g)_+$ に対しては，整数 $0 \leqq \rho = \rho(\lambda) \leq g$ が存在し，任意の整数 $0 \leq j \leq \rho$ に対し $0 = \lambda^j$ が成り立ち，かつ $0 < \lambda^{\rho+1}$ が成り立つ。このようにして関数

$$\rho : (\mathbb{R}^g)_+ \to \mathbb{Z} \cap [0, g]$$

が定義される。さらに $r = g - \rho$ とおくことにする。

ここで，R^g に属する次の形をもつベクトルを考える。

$$\Lambda = (\lambda_1 \cdots \lambda_n) = \begin{pmatrix} {}^t\lambda'^1 \\ \vdots \\ {}^t\lambda'^g \end{pmatrix} \in M_{gn}(R)$$

$$\Lambda\alpha = \sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i \lambda_i = \begin{pmatrix} {}^t\lambda'^1 \cdot \alpha \\ \vdots \\ {}^t\lambda'^g \cdot \alpha \end{pmatrix} \in R^g$$

このとき，$0 < \Lambda\alpha$ となるためには，整数 $0 \leq p = p(\Lambda\alpha) \leq g-1$ が存在し，任意の整数 $0 \leq j \leq p$ に対し $0 = {}^t\lambda'^j \cdot \alpha$ が成り立ち，かつ $0 < {}^t\lambda'^{p+1} \cdot \alpha$ が成り立つことが必要十分である。

関数

$$\hat{p} : \Delta \to \mathbb{Z} \cap [0, g]$$

に対し，$\hat{r} = g - \hat{p}$ とおく。$\hat{p}$ が与えられたとき，

$$C(\hat{p}) = \{ \Lambda \in M_{gn}(R) \mid \forall\alpha \in \Delta \quad 0 \leq \Lambda\alpha,\ p(\Lambda\alpha) = \hat{p}(\alpha) \}$$

$$= \left\{ \Lambda = \begin{pmatrix} {}^t\lambda'^1 \\ \vdots \\ {}^t\lambda'^g \end{pmatrix} \in M_{gn}(R) \right.$$

$$\left| \ \forall\alpha \in \Delta \quad 0 \leq j \leq \hat{p}(\alpha),\ 0 = {}^t\lambda'^j \cdot \alpha,\ 0 < {}^t\lambda'^{\hat{p}(\alpha)+1} \cdot \alpha \right\}$$

$$|\hat{p}| = \sum_{\alpha\in\Delta} \hat{p}(\alpha)$$

とおく。

定理　関数

$$\hat{p} : \Delta \to \mathbb{Z} \cap [0, g]$$

に対し，次の条件 i)，ii) を満たす集合 $C(\hat{p})$ が存在する。

0) $C(\hat{\rho})$ は $M_{gn}(R)$ の線型開胞体で，$\dim C(\hat{\rho}) = |\hat{r}| = ng - |\hat{\rho}|$ となる。ここで $\hat{r} = g - |\hat{\rho}|$ とする。

i) $M_{gn}(R)$ の任意の点 M に対し，

$$\hat{\rho} : \Delta \to \mathbb{Z} \cap [0, g], \quad w \in W$$

が存在し，$M \in w \cdot C(\hat{\rho})$ が成り立つ

ii) 写像

$$\hat{\rho} : \Delta \to \mathbb{Z} \cap [0, g]$$

が存在し，$\Lambda, M \in \hat{C}(\hat{\rho})$ が成り立っているとする。

このとき，$w \in W$ が存在し $M = w\Lambda$ となるためには，次の条件が成り立つことが必要十分である。

1) $\Lambda - M$

2) 自然数 ℓ が存在し，ℓ 個の Δ に属するルート $\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell$ が存在し，$w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_\ell}$，$s_{\alpha_i} \Lambda = \Lambda$ $(1 \leq i \leq \ell)$ が成り立つ。

証明

0) ${}^tR^n$ に属する2つのベクトル ${}^t\lambda'$, ${}^t\mu'$ に対し，すべての $\alpha \in \Delta$ に対し，非負の実数 a_α が存在し，

$${}^t\mu' = {}^t\lambda' + \sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha {}^t\alpha \quad \left(0 < \sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha \right)$$

が成り立つとき，${}^t\lambda' \underset{\Delta}{<} {}^t\mu'$ と定義する。

$M_{gn}(R)$ に属する2つの (g, n) 型行列

$$\Lambda = \begin{pmatrix} {}^t\lambda'^1 \\ \vdots \\ {}^t\lambda'^g \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} {}^t\mu'^1 \\ \vdots \\ {}^t\mu'^g \end{pmatrix}$$

をとる。整数 $0 \leqq p \leqq g-1$ が存在し，すべての整数 $0 \leqq j \leqq p$ に対し ${}^t\lambda'^j = {}^t\mu'^j$ が成り立ち，かつ ${}^t\lambda'^{p+1} \underset{\Delta}{\lneqq} {}^t\mu'^{p+1}$ が成り立つとき，$\Lambda \underset{\Delta}{\lneqq} M$ と定義する．

i) $M_{gn}(\mathbb{R})$ に属する行列 Λ が与えられたとする．このとき，Λ の W－軌道 $W\Lambda$ に属する元の中，順序 $\underset{\Delta}{\lneqq}$ に関し極大となるものを M とする．このとき，すべての $\alpha \in \Delta$ に対し $0 \leqq M\alpha$ が成り立つ。すなわち，すべての $\alpha \in \Delta$ に対し，ある整数 $0 \leqq p = p(M\alpha) \leqq g$ が存在し，すべての整数 $0 \leqq j \leqq p$ に対し，$0 = {}^t\lambda'^j \cdot \alpha$ が成り立ち，かつ $0 < {}^t\lambda'^{p+1} \cdot \alpha$ か成り立つ．

このことは次のようにして示される．

$$M = \begin{pmatrix} {}^t\mu'^1 \\ \vdots \\ {}^t\mu'^g \end{pmatrix} \in M_{gn}(\mathbb{R})$$

とおき，ある $\alpha \in \Delta$ が存在し，$M \cdot \alpha < 0$ か成り立っていたとして矛盾を導く．

定義により，この $\alpha \in \Delta$ に対し，整数 $0 \leqq p = p(M\alpha) \leqq g-1$ が存在し，すべての整数 $0 \leqq j \leqq p$ に対し，${}^t\mu'^j \cdot \alpha = 0$ が成り立ち，かつ ${}^t\mu'^{p+1} \cdot \alpha < 0$ が成り立つ。

一方，任意の $\alpha \in \Delta$ に対し

$$s_\alpha M = \begin{pmatrix} s_\alpha \mu'^1 \\ \vdots \\ s_\alpha \mu'^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mu'^1 - 2(({}^t\mu'^1 \cdot \alpha)/({}^t\alpha \cdot \alpha))\,{}^t\alpha \\ \vdots \\ {}^t\mu'^g - 2(({}^t\mu'^g \cdot \alpha)/({}^t\alpha \cdot \alpha))\,{}^t\alpha \end{pmatrix} = M - (2/({}^t\alpha \cdot \alpha))\,M \cdot \alpha \cdot {}^t\alpha$$

であることに注意する．

条件により，上の $\alpha \in \Delta$ に対して，整数 $0 \leq p = p(M\alpha) \leq g-1$ が存在し，すべての整数 $0 \leq j \leq p$ に対し $s_\alpha {}^t\mu'^j = {}^t\mu'^j - 2(({}^t\mu'^j \cdot \alpha)/({}^t\alpha \cdot \alpha))\,{}^t\alpha = {}^t\mu'^j$ が成り立ち，かつ $s_\alpha {}^t\mu'^{p+1} = {}^t\mu'^{p+1} - 2(({}^t\mu'^{p+1} \cdot \alpha)/({}^t\alpha \cdot \alpha))\,{}^t\alpha \underset{\Delta}{>} {}^t\mu'^{p+1}$ が成り立つ．すなわち，この $\alpha \in \Delta$ に対し $s_\alpha M \underset{\Delta}{>} M$ となり，始めの仮定に矛盾する．

ii) $C(\hat{P})$ に属する2つの行列 Λ，M が存し，かつ $w \in W$ が存在し，$M = w\Lambda$ が成り立っていたとする

$w \in W$ の長さを $l(w)$ で表す．

$w \neq 1$ とするとき，$\beta \in \Delta$ を1つ選び $l(w \cdot s_\beta) < l(w)$ が成り立つようにすることができる．

$w \in W$，$\beta \in \Delta$ とするとき，$l(w\, s_\beta) < l(w)$ が成り立つことは，すべての $\alpha \in \Delta$ に対し非負実数 a_α が存在し $w(\beta) = -\sum a_\alpha \alpha \ (0 < \sum a_\alpha)$ が成り立つことと同値である．

Λ，$M \in C(\hat{P})$ であるから，すべての $\alpha \in \Delta$ に対して $0 \leq \Lambda\alpha$，$0 \leq M \cdot \alpha$ が成り立つ．

したがって，上の $\beta \in \Delta$ に対し，$0 \leq \Lambda\beta = w^{-1} M \beta$

$= M\, w(\beta) = -\sum_{\alpha\in\Delta} a_\alpha M\alpha \leqq 0$，すなわち $\Lambda\beta = 0$ が成り立つ．これから $s_\beta \Lambda = \Lambda - 2(1/({}^t\beta\cdot\beta))\Lambda\beta\cdot{}^t\beta = \Lambda$ が成り立つことがわかる．

こゝで，上の仮定の下に，$M\cdot w\Lambda = w s_\beta^2 \Lambda = w s_\beta s_\beta \Lambda = w s_\beta \Lambda$ が成り立つことが導かれる．

$l(w s_\beta) < l(w)$ であるから，$l(w)$ に関する帰納法により $w\Lambda = \Lambda$ が成り立つことが示される。 □

こゝで

$${}_q C = \{ w\, C(\hat{p}) \mid w \in W,\ \hat{p} : \Delta \to \mathbb{Z} \cap [0, q] \}$$

とすれば，${}_q C$ は $M_{qn}(\mathbb{R})$ の線型胞体になる，W－共変な胞体分割を与える．更に，すべての整数 $nq - q + 1 \leqq i \leqq nq$ に対し，C の i 次元胞体の集合の上の W の作用は自由である．

自然数の対 $q < r$ に対し，γ：

$${}^r_q\gamma : {}_r C \to {}_q C$$

で自然な射影を表すことにする

いま 写像

$$\hat{p} : \Delta \to \mathbb{Z} \cap [0, q]$$

に対し，$C(\hat{p})$ の $M_{qn}(\mathbb{R})$ での双対胞体を $\hat{C}(\hat{p})$ と書くことにする．

このとき，$\hat{C}(\hat{p})$ は $M_{qn}(\mathbb{R})$ の有界閉多面体であり，

$\dim \hat{C}(\hat{\rho}) = |\hat{\rho}|$ である.

自然数 q に対し

$${}_q\hat{C} = \{ w\,\hat{C}(\hat{\rho}) \mid w \in W,\ \hat{\rho} : \Delta \to \mathbb{Z} \cap [0, q] \}$$

とすれば, ${}_q\hat{C}$ は $M_{qn}(\mathbb{R})$ の W－共変変形レトラクトの有界閉多面体による, W－共変な胞体分割を与える. 更に, すべての整数 $0 \leqq i \leqq q-1$ に対し, ${}_q\hat{C}$ の i 次元胞体の集合の上の W の作用は自由である.

自然数の対 $q < r$ に対し, ${}^r_q\hat{\gamma}$ は ${}^r_q\gamma$ の双対とする.

このとき, $({}_q\hat{C},\ {}^r_q\hat{\gamma})$ の帰納極限 $\varinjlim_q {}_q\hat{C}$ は, $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}[W]$ 上の自由分解を定義する([3] 参照).

文　献

[1] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Ch. 4～6, Hermann, (1968), Masson, (1981).

[2] J. Humphreys, *Reflection Groupes and Coxeter Groups*, Cambridge Univ. Press, (1989).

[3] T. Nakamura, *On Cohomology Operations*, Japanese J. of Math. Vol 33 (1963) pp. 93～145.