

正則拡張性定理と有限性条件との関係について

林本 厚志 (ATSUSHI HAYASHIMOTO)

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

1. 序

\mathbb{C}^{n+1} の座標を $Z = (z, s + it) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ と書く. M を \mathbb{C}^{n+1} 内の実解析的超曲面で原点を含むものとし, その定義関数を

$$(1) \quad \rho(Z, \bar{Z}) = t - h(z, \bar{z}, s)$$

とする. 但し h は実解析的関数で

$$(2) \quad \begin{cases} h(z, 0, s) \equiv h(0, \bar{z}, s) \equiv 0, \\ h(z, \bar{z}, 0) \neq 0 \end{cases}$$

を満たすとする. \tilde{M} を, M と同様な性質を持つ別の実解析的超曲面とし, F をそれらの間の CR 写像で, 原点を不動点として持つものとする. 以下, これらの記号 $F: M \rightarrow \tilde{M}$ を固定する. 実解析的超曲面の点や, それらの間の写像に対して, 種々の "有限性" の概念を定義することができる. ここでは, $F: M \rightarrow \tilde{M}$ が \mathbb{C}^{n+1} 内の原点の近傍に正則的に拡張される為の条件を, 原点での "型" や, 写像に対して定義された "有限性" の条件を使って書き下すことを目標とする. 主定理を述べる為に, 原点が Bloom-Graham の意味で有限型であることと, CR 写像 F が原点で r -有限多重性を持つことの定義を与える.

次の定義の中で, $H^{\mathbb{C}}(M)$ は M の正則接束の複素化を表わす.

定義 [3]. $H^{\mathbb{C}}(M)$ の有限個の局所切断 L_1, \dots, L_k に対して,

$$(3) \quad [L_1, [L_2, \dots, [L_{k-1}, L_k] \dots]]_0 \notin H_0^{\mathbb{C}}(M)$$

となるとき, 原点は Bloom-Graham の意味で有限型であるという. (3) のようになる最小の k を原点での型という. M の原点が Bloom-Graham の意味で有限型なら, 適当な座標変換により M の定義関数は (1), (2) を満たすようにできる.

次に, 写像が原点で r -有限多重性を持つことの定義を与える. $\mathbb{C}[[z, w]]$ により $(z, w) = (z_1, \dots, z_n, w)$ を変数に持つ $(n+1)$ 変数形式的冪級数環を表わすことにする. 2つの写像 $G = (g_1, \dots, g_{n+1})$ と $\tilde{G} = (\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{n+1})$ に対して, $\tilde{G} \equiv_r G$ は, \tilde{G} と G の対応する各成分が r 位まで等しいことを表わす.

定義. $F = (F_1, \dots, F_{n+1}) : M \rightarrow \tilde{M}$ を C^k 級の CR 写像とする. $r \leq k$ となる自然数 r に対して, F が原点で r -有限多重性を持つとは, $\tilde{F}|_M \equiv F$ なる任意の $\mathbb{C}[[z, w]]$ の元の組, $\tilde{F} = (\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_{n+1})$, に対して,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[z]] / (\tilde{F}_1(z, 0), \dots, \tilde{F}_n(z, 0)) < \infty$$

が成立することとする. ここで $(\tilde{F}_1(z, 0), \dots, \tilde{F}_n(z, 0))$ は, $\tilde{F}_1(z, 0), \dots, \tilde{F}_n(z, 0)$ で生成される $\mathbb{C}[[z]]$ のイデアルとする.

注意 1. 定義から, C^k 級写像が原点で r -有限多重性 ($k \geq r+1$) を持てば, それは $(r+1)$ -有限多重性を持つことが分かる.

主定理. F は原点を含む実解析的超曲面の間の C^{2r+1} 級の CR 写像で, 各原点は *Bloom-Graham* の意味で有限型であるとする. このとき F が原点で r -有限多重性を持つならば, F は \mathbb{C}^{n+1} の原点の近傍に正則的に拡張される.

この定理を証明するに至った動機を述べる為に, 今までに知られている CR 写像に関する正則拡張定理を振り返ってみる. CR 写像に関する正則拡張定理は, その仮定に注目することにより大きく 2 つのタイプに分けられる. 1 つ目は, 写像に対して強い仮定を置き, 超曲面には弱い仮定しか置かないもの. 2 つ目は, 写像には弱い仮定しか置かない代わりに, 超曲面には強い仮定を置くものである. より詳しく 1 つ目のタイプの定理を説明する. M. Baouendi, H. Jacobowitz, F. Trèves [4] は, \tilde{M} が原点で本質的有限 (essentially finite) [5] で, F を C^∞ 級の CR 微分同相写像とすると, F は原点の近傍に正則的に拡張されることを示した. 最近になって Y. Pan は, 有限多重性の特徴付けの研究を通して次の定理を得た.

定理 [1 2]. M を原点で本質的有限な実解析的超曲面, \tilde{M} は原点を通る実解析的超曲面で, 原点を通る正次元の解析的部分集合を含まないとする. $F : M \rightarrow \tilde{M}$ を C^∞ 級の CR 写像で, $F^{-1}(0) \setminus \{0\}$ が M 内の疎な集合であるとする. このとき F は原点の近傍に正則的に拡張される.

2 つ目のタイプの定理には次のようなものがある. S. M. Webster [13] は, 超曲面とは限らない実解析的 CR 多様体 M, \tilde{M} に対して, それらのレビ形式が原点で非退化で, それぞれのレビ形式の像が開集合を含むとき, C^1 級 CR 微分同相写像 $F : M \rightarrow \tilde{M}$ は, 原点の近傍に正則的に拡張されることを示した. その後, S. Bell [1], [2] は Webster の定理から写像の可微分性を省くことに成功した.

定理 [2]. M と \tilde{M} を, 原点で擬凸な実解析的超曲面とし, 各原点は *D'Angelo* の意味で有限型 [7] とする. $F : M \rightarrow \tilde{M}$ を連続な CR 写像で, $F^{-1}(0)$ が M 内でコンパクトであるとする. このとき F は原点の近傍に正則的に拡張される.

これらの定理の後, 次のような疑問を持つことは自然なことである.

自然な疑問, 動機.

- (1) 1 つ目のタイプの定理で, 写像の可微分性に関する仮定を弱めることはできるか?
- (2) 2 つ目のタイプの定理で, 超曲面の有限型に関する仮定を弱めることはできるか?

これらをふまえて主定理を見返してみると、写像の滑らかさが C^{2r+1} 級になっていること、D'Angelo の意味の有限型や、本質的有限型なら、Bloom-Graham の意味の有限型であることから、主定理は上の "自然な疑問" に対する 1 つの解答を与えていることが分かる。この論文の構成は次のようである。§2 では、種々の定義と定理の証明に必要な補題を与える。§3 で主定理の証明を与える。§4 では M と \tilde{M} が特別な条件を満たすなら、主定理中の可微分性を表す r を具体的に書き下すことができることを示す。主定理の余次元が高い場合についても §3 と同様の手法で証明できると思われる。

2. 完備系, Hopf 補題の性質, CR 関数のテーラー展開

主定理の証明では、完備系に関する、Han の定理 [9] の証明の議論を使う。完備系の定義は次のようである。

定義 [8]. n 変数関数 f が位数 K の完備系を満たすとは、任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ で $|\alpha| = K$ を満たすものに対して、実解析的関数 \mathcal{F}_α が存在して

$$D^\alpha f = \mathcal{F}_\alpha (D^\beta f; |\beta| < K)$$

が成り立つこととする。写像が完備系を満たすとは、その各成分が完備系を満たすこととする。

注意 2. 定義から、 C^K 級の関数が位数 K の完備系を満たすなら、変数を複素化することにより、その関数はある複素空間内の開集合上の正則関数になる。

次に Hopf 補題の性質について定義を与える。

定義. M, \tilde{M} の定義関数が (1), (2) のように正規化されているとき、 F が原点で Hopf 補題の性質を満たすとは、

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial s}(0) \neq 0$$

が成り立つときをいう。

注意 3. $F: M \rightarrow \tilde{M}$ を実 3 次元の実解析的超曲面の間の CR 写像で、原点での型がそれぞれ l, \tilde{l} であるとする。このとき l/\tilde{l} は自然数である [10].

CR 関数は、次の補題のように冪級数の形に展開できる。ここで M の定義関数が (1), (2) のようであれば、原点の十分小さい近傍 U が存在して $(\{0\}^n \times \mathbb{R}) \cap U \subset M$ が成り立つことに注意する。

補題 [11]. $F = (F_1, \dots, F_{n+1}): M \rightarrow \tilde{M}$ は C^m 級の CR 写像で、 $F(0) = 0$ を満たすものとする。原点の十分小さい近傍 U が存在して、

$$(4) \quad \begin{cases} F_j((\{0\}^n \times \mathbb{R}) \cap U) \equiv_m 0, & j = 1, \dots, n, \\ \operatorname{Im} F_{n+1}((\{0\}^n \times \mathbb{R}) \cap U) \equiv_m 0, \end{cases}$$

が成り立つなら、 F の各成分は次のように展開できる;

$$(5) \quad F_j(z, \bar{z}, s) \equiv_m \sum_{|\alpha| \geq 1, p \geq 0} a_{\alpha, p}^j z^\alpha (s + ih(z, \bar{z}, s))^p, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(6) \quad F_{n+1}(z, \bar{z}, s) \equiv_m \sum_{q \geq 1} b_q (s + ih(z, \bar{z}, s))^q, \quad b_q \in \mathbb{R}.$$

証明は [11] を参照。手法は C^∞ 級の CR 写像に対する展開 [5] の場合と同様である。

3. 主定理の証明

CR 写像 F が r -有限多重性を持つことから, 各 $j = 1, \dots, n$ に対して, ある $\alpha(j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ で, $|\alpha(j)| \leq r$ かつ

$$(7) \quad \frac{\partial^{|\alpha(j)|} F_j(z, 0)}{\partial z^{\alpha(j)}}(0) \neq 0.$$

となるものがある.

$\bar{\rho}$ を \tilde{M} の定義関数とし, 原点の近傍でテーラー展開する. 各 $j = 1, \dots, n$ に対して, $\nu^j = (\nu_1^j, \dots, \nu_n^j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ を次のように定義する. 先ず,

$$\nu_j^j = \min \{k \in \mathbb{N}; \bar{\rho} \text{ の展開式の中に, } z_j^k \text{ の倍数の項が存在する} \}$$

とし, $m \neq j$ なる n 以下の自然数 m に対して, ν_m^j を次のように帰納的に定義する. $m < j$ のとき,

$$\nu_m^j = \min \{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}; \bar{\rho} \text{ の展開式の中に, } z_1^{\nu_1^j} \dots z_{m-1}^{\nu_{m-1}^j} z_m^k z_j^{\nu_j^j} \text{ の倍数の項が存在する} \},$$

$m > j$ のとき,

$$\nu_m^j = \min \{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}; \bar{\rho} \text{ の展開式の中に, } z_1^{\nu_1^j} \dots z_j^{\nu_j^j} \dots z_{m-1}^{\nu_{m-1}^j} z_m^k \text{ の倍数の項が存在する} \}.$$

各 $j = 1, \dots, n$ に対して, $\mu^j = (\mu_1^j, \dots, \mu_n^j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ を定義する.

$$k(j) = \min \{l \in \mathbb{N}; \bar{\rho} \text{ の展開式の中に, } z^{\nu^j} \bar{z}_l \text{ の倍数の項が存在する} \}$$

とし, この $k(j)$ に対して $\mu_{k(j)}^j$ を次のように定義する.

$$\mu_{k(j)}^j = \min \{d \in \mathbb{N}; \bar{\rho} \text{ の展開式の中に, } z^{\nu^j} \bar{z}_{k(j)}^d \text{ の倍数の項が存在する} \}.$$

$k(j) < m \leq n$ である自然数 m に対して μ_m^j を次のように定義する.

$$\mu_m^j = \min \{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}; \bar{\rho} \text{ の展開式の中に, } z^{\nu^j} \bar{z}_{k(j)}^{\mu_{k(j)}^j} \dots \bar{z}_{m-1}^{\mu_{m-1}^j} \bar{z}_m^d \text{ の倍数の項が存在する} \}.$$

$\tau^j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次のように定義する.

$$\tau^j = \min \{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}; \bar{\rho} \text{ の展開式の中に, } z^{\nu^j} \bar{z}^{\mu^j} s^k \text{ の倍数の項が存在する} \}.$$

以上で, $\bar{\rho}$ から唯一つの項, $\bar{h}_{\nu^j \mu^j \tau^j} z^{\nu^j} \bar{z}^{\mu^j} s^{\tau^j}$, を取り出すことができた. これらの ν^j, μ^j, τ^j を使い, 微分作用素 ∂_j を次のように定義する.

$$\partial_j = \frac{\partial^{|\nu^j| + |\mu^j| + \tau^j - 2}}{\partial z_1^{\nu_1^j} \dots \partial z_j^{\nu_j^j - 1} \dots \partial z_n^{\nu_n^j} \partial \bar{z}_{k(j)}^{\mu_{k(j)}^j - 1} \partial \bar{z}_{k(j)+1}^{\mu_{k(j)+1}^j} \dots \partial \bar{z}_n^{\mu_n^j} \partial s^{\tau^j}}.$$

$J \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次のような j の個数と定義する.

$$J = \#\{j; \nu^j = (0, \dots, 1, \dots, 0), \text{ 第 } j \text{ 成分のみ } 1 \text{ で他は } 0\}.$$

J により, 次のように証明を 2 つに分ける.

(I) $J \leq 1$, 又は $J \geq 2$ かつ相異なる勝手な $j_1, j_2 \in J$ に対して, $k(j_1) \neq k(j_2)$, $\mu_{k(j_1)}^{j_1} \neq \mu_{k(j_2)}^{j_2}$, $\tau^{j_1} \neq \tau^{j_2}$ の 3 つのうちどれかが成り立つ.

(II) $J \geq 2$ かつ, 相異なる $j_1, j_2 \in J$ で, 3 つの等式, $k(j_1) = k(j_2)$, $\mu_{k(j_1)}^{j_1} = \mu_{k(j_2)}^{j_2}$, $\tau^{j_1} = \tau^{j_2}$, を全て成立させるものが存在する.

(I) の場合. ∂_j の定義により,

$$\bar{L}^{\alpha(k(j))} \partial_j \bar{\rho}(F, \bar{F}) \equiv_{2r+1} (\text{定数}) \times F_j \times \bar{L}^{\alpha(k(j))} \bar{F}_{k(j)} + \text{higher terms}$$

であるから, $n+1$ 個の方程式

$$\begin{cases} \bar{\rho}(F, \bar{F}) \equiv_{2r+1} 0, \\ \bar{L}^{\alpha(k(j))} \partial_j \bar{\rho}(F, \bar{F}) \equiv_{2r+1} 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

から, 陰関数定理により $F = (F_1, \dots, F_{n+1})$ について, $\bar{F}_m, \bar{L}^{\alpha(k(d))} \bar{F}_m$ を使って次のように解くことができる.

$$F_j = \mathcal{F}_j \left(\bar{F}_m, \bar{L}^{\alpha(k(d))} \bar{F}_m; 1 \leq m \leq n+1, 1 \leq d \leq n \right), \quad j = 1, \dots, n+1.$$

ここで, \mathcal{F}_j はカッコ内の変数について実解析的な関数である. よって Han の定理の証明に使われている議論を利用して, F_j は位数 $2 \times \max\{|\alpha(k)|; k = 1, \dots, n\} + 1$ の完備系をみたすことが分かる. つまり写像 F は位数 $2r+1$ の完備系を満たすことが分かるから, 注意 2. により定理の主張を得る.

(II) の場合 $\bar{\rho}$ の代わりに $z_1 \bar{\rho}$ を使うことにより (I) の場合に帰着される.

5. 特別な場合

主定理の CR 写像の可微分性を表わす r は, 一般の場合に具体的に書き下されるか否かは分かっていない. しかし $M, \tilde{M} \subset \mathbb{C}^2$ の場合, 又は一般の次元で, M, \tilde{M} のレビ形式が原点で非退化な場合には, 写像が原点で Hopf 補題の性質を満たすなら, それを書き下すことができることを示す. 次の定理で, \tilde{M} が原点で非退化なレビ形式を持つ場合は [11] で示されている.

定理. M, \tilde{M} を実 3 次元の原点を含む実解析的超曲面で, M に含まれる原点は Bloom-Graham の意味で型 l ($< \infty$) であるとする. $F: M \rightarrow \tilde{M}$ は C^{l+1} 級の CR 写像で, 原点で Hopf 補題の性質を持ち, (4) で $m = l+1$ の場合を満たすとする. このとき F は \mathbb{C}^2 の原点のある近傍に正則的に拡張される.

証明. \tilde{M} の原点での型を \tilde{l} とすると, 注意 3 により $l = \tilde{l}_0$ なる自然数 l_0 が存在するので, \tilde{M} に含まれる原点も Bloom-Graham の意味で有限型である. 定理の仮定の下で, $F = (F_1, F_2)$ の各成分は (5), (6) のように展開できるので, それらを $\bar{\rho}(F, \bar{F}) \equiv_{l+1} 0$ に代入して

$$(9) \quad \frac{1}{2i} \sum_{q \geq 1} b_q \{ (s + ih(z, \bar{z}, s))^q - (s - ih(z, \bar{z}, s))^q \}$$

$$\equiv \sum_{\substack{l+1 \\ \nu+\mu \geq \bar{l}}} \tilde{h}_{\nu, \mu} \left[\sum_{\alpha \geq 1, p \geq 0} a_{\alpha, p} z^\alpha (s + ih)^p \right]^\nu \left[\sum_{\alpha \geq 1, p \geq 0} \bar{a}_{\alpha, p} \bar{z}^\alpha (s - ih)^p \right]^\mu$$

+ higher terms

を得る. 両辺の z, \bar{z} の次数を比較することにより, 各 $\alpha = 1, \dots, l_0 - 1$ に対して

$$\sum_{\nu+\mu=\bar{l}} \tilde{h}_{\nu, \mu} \left[\sum_{p \geq 0} a_{\alpha, p} z^\alpha s^p \right]^\nu \left[\sum_{p \geq 0} \bar{a}_{\alpha, p} \bar{z}^\alpha s^p \right]^\mu \equiv_{l+1} 0,$$

つまり

$$a_{\alpha, p} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, l_0 - 1, \quad p \geq 0, \quad \alpha + p \leq l_0$$

を得る. これらを (9) に代入して, 両辺の z, \bar{z} の $l (= l_0 \bar{l})$ 次で s を含まない項を比較して

$$b_1 h^{(l)} \equiv_{l+1} \sum_{\nu+\mu=\bar{l}} \tilde{h}_{\nu, \mu} (a_{l_0, 0} z^{l_0})^\nu (\bar{a}_{l_0, 0} \bar{z}^{l_0})^\mu$$

を得る. ここで, $h^{(l)}$ は h に含まれる z, \bar{z} についての l 次の齊次多項式である. よって $b_1 = (\partial F_{n+1} / \partial s)(0)$ であることと, $a_{l_0, 0} \neq 0$ は, F が原点で l_0 -有限多重性を持つことを表しているという2つのことに注意すれば, F が原点で Hopf 補題の性質を持つことと, F が原点で l_0 -有限多重性を持つことが同値であることが分かる. よって注意 1 と主定理から, この定理の結論を得る.

一般の次元の場合には次の定理を示すことができる.

定理 [1 1]. M, \tilde{M} を原点を含む \mathbb{C}^{n+1} 内の実解析的超曲面で, それぞれ原点では非退化レビ形式を持つとする. $F = (F', F_{n+1}) : M \rightarrow \tilde{M}$ を C^3 級の写像とする. F が原点で Hopf 補題の性質を満たすなら, F は \mathbb{C}^{n+1} の原点の近傍に正則的に拡張される.

証明. 仮定の下で, 適当な座標変換により F が (4) で $m = 3$ の場合を満たすようにできるので, F の各成分は (5), (6) の場合のように展開できる. さらにレビ形式の条件から, 座標変換により M の定義関数 $\rho = t - h(z, \bar{z}, s)$ は次のように Chern-Moser の正規型にできる;

$$h(z, \bar{z}, s) = \sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 + \sum_{\substack{|\nu|, |\mu| \geq 2, \\ \tau \geq 0}} h_{\nu, \mu, \tau} z^\nu \bar{z}^\mu s^\tau.$$

ここで λ_j は -1 又は $+1$ を表わす. \tilde{M} の定義関数についても各記号の上に \sim を付けて同じように展開しておく. これらの座標変換はすべて [6] による. $\alpha_k =$

$(0, \dots, 1, \dots, 0)$ (第 k 成分のみ 1 で他は 0) とし, $\{L_1, \dots, L_n\}$ を独立な接コーシーリーマンベクトル場とする. [9] により

$$\det \begin{pmatrix} L_1 F_1(0) & \dots & L_1 F_n(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n F_1(0) & \dots & L_n F_n(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{\alpha_1,0}^1 & \dots & a_{\alpha_1,0}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\alpha_n,0}^1 & \dots & a_{\alpha_n,0}^n \end{pmatrix} \neq 0$$

であることを示せばよい. まず $\text{Im}F_{n+1} \equiv_3 \tilde{h}(F', \bar{F}', \text{Re}F_{n+1})$, つまり

$$(10) \quad \frac{1}{2i} \left[\sum_{q \geq 1} b_q (s + ih(z, \bar{z}, s))^q - \sum_{q \geq 1} \bar{b}_q (s - ih(z, \bar{z}, s))^q \right] \\ \equiv_3 \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j \left[\sum_{|\alpha| \geq 1, p \geq 0} a_{\alpha,p}^j z^\alpha (s + ih(z, \bar{z}, s))^p \right] \left[\sum_{|\alpha| \geq 1, p \geq 0} \bar{a}_{\alpha,p}^j \bar{z}^\alpha (s - ih(z, \bar{z}, s))^p \right] \\ + \text{higher terms}$$

から始める. 両辺の $z_i \bar{z}_k$ ($i \neq k$) の係数を比較して

$$(11) \quad \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j (a_{\alpha_i,0}^j) (\bar{a}_{\alpha_k,0}^j) = 0$$

を得る. (10) の両辺で $|z_k|^2$ の係数を比較することにより

$$(12) \quad \frac{1}{2} \lambda_k (b_1 + \bar{b}_1) = b_1 \lambda_k \\ = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j |a_{\alpha_k,0}^j|^2$$

を得る. (11), (12) をまとめると行列に関する次の関係式が得られて, F が原点で Hopf 補題の性質を満たすことから定理が示される.

$$\begin{pmatrix} a_{\alpha_1,0}^1 & \dots & a_{\alpha_1,0}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\alpha_n,0}^1 & \dots & a_{\alpha_n,0}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 a_{\alpha_1,0}^1 & \dots & \tilde{\lambda}_1 a_{\alpha_n,0}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\lambda}_n a_{\alpha_1,0}^n & \dots & \tilde{\lambda}_n a_{\alpha_n,0}^n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

REFERENCES

1. S. Bell, *Local regularity of CR homeomorphisms*, Duke Math. J. **57** (1988), 295–300.
2. ———, *CR maps between hypersurfaces in \mathbb{C}^n* , Proc. Symp. Pure Math. **52** (1991), 13–22.
3. T. Bloom and I. Graham, *On 'type' conditions for generic real submanifolds of \mathbb{C}^n* , Invent. Math. **40** (1977), 217–243.
4. M. Baouendi, H. Jacobowitz and F. Trèves, *On the analyticity of CR mappings*, Ann. of Math. **122** (1985), 365–400.
5. M. Baouendi and L. P. Rothschild, *Germs of CR maps between real analytic hypersurfaces*, Invent. Math. **93** (1988), 481–500.

6. S. S. Chern and J. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), 219–271.
7. J. D'Angelo, *Real hypersurfaces, order of contact, and applications*, Ann. of Math. **115** (1982), 615–637.
8. C. K. Han, *Rigidity of CR submanifolds and analyticity of CR immersions*, Math. Ann. **287** (1990), 229–238.
9. C. K. Han, *Complete differential system for the mappings of CR manifolds of nondegenerate Levi form*, preprint.
10. A. Hayashimoto, *On the classification theorem for CR mappings*, to appear in Nagoya Math. J.
11. ———, *On the complete system of finite order for CR mappings and its application*, preprint.
12. Y. Pan, *A characterization of the finite multiplicity of a CR mapping*, Michigan Math. J. **43** (1996), 465–474.
13. S. M. Webster, *Analytic discs and the regularity of CR mappings of real submanifolds in \mathbb{C}^n* , Proc. Symp. Pure Math. **41** (1984), 199–208.

CHIKUSA-KU, NAGOYA, 464-01, JAPAN

E-mail address: ahayashi@math.nagoya-u.ac.jp