数理解析研究所講究録
1059巻 1998年 22-35

零形式 (null form) の時空間評価式と非線形波動方程式への応用

東京大学大学院数理科学研究科
堤 誉志雄 (Yoshio Tsutsumi)

§1. 初めに

この数年間，非線形波動方程式や非線形分散型方程式の一意可解性理論は飛躍的に進歩した．簡単にその経緯を振り返ってみよう．古典的場の理論に現われる Maxwell-Klein-Gordon 方程式や Yang-Mills 方程式に代表される非線形波動方程式及び流体力学やプラズマ物理に現われる KdV 方程式や非線形 Schrödinger 方程式は，1960 年代以降様々な数学的手法を使って盛んに研究されて来た．しかし，初期時刻 $t=0$ で適当な初期値を与えると，それらの方程式の解は時間大域的に存在するかという基本的問題については，必ずしも満足できる結果が得られているとは言いがたい状況であった．これらの方程式は物理量に対応した保存則を持つので，その保存則に対応した関数空間の枠組で解を構成するのが自然である．いくつかある保存量のうちもっとも重要なものはエネルギーであり，それゆえにエネルギー空間 (数学的には多くの場合 H^1 となる) の枠組でこれらの方程式の初期値問題を考察することがもっとも自然で重要なこととなる．またもし H^1 で時間局所解の一意存在定理を示すことができれば，多くの場合エネルギー保存則から H^1 のア・プリオリ評価式を得ることができ，結局その時間局所解を時間大域的に延長し時間大域解を得ることができる．したがって，H^1 において時間局所解の一意存在定理を示すことが大切であるということになる．(こういう解の存在定理は数学者の興味であって物理学者はそういうことは気にしていないと言う人もいるが，必ずしもそうではない．たとえば [5] の序文などを見てもらえば，Yang-Mills 方程式の解の時間大域的存在定理は Penrose の cosmic censorship conjecture と密接な関係があることが分かる．)

1960 年代の時間局所解の一意存在定理は，ほとんどエネルギー不等式と Sobolev

の埋蔵定理によって証明されていた．したがって，Sobolev の埋蔵定理 $H^s \subset L^\infty$ ($s > n/2$ で n は空間次元) からくる制限により，H^1での枠組でという希望とはほど遠いものであった．1970 年代前半には，いわゆる $L^p - L^q$ estimate なるものが開発され，これによって時間局所解の一意存在定理はかなり改良された．しかし，ここまでの証明法は必ずしも波動方程式や分散型方程式特有の性質を使っているという訳ではなく，実際 $L^p - L^q$ estimate は Navier-Stokes 方程式など非線形放物型方程式でより研究が展開して行くことになる．1970 年代後半には，後なってエポックメイキングであったと認識されるようになったいわゆる Strichartz の評価式 [26] が発見される．Strichartz の評価式が "発見" されたという言いかたには異論もあることと思う．なぜなら，Strichartz の評価式自身は，1970 年代前半に調和解析の分野で盛んに研究された Fourier 制限定理の変形にすぎないからである．(Fourier 制限定理については，Tomas [27] を参照) しかし，Fourier 制限定理と波動方程式の時空間評価を結び付けた彼の着想は，その後様々な人の貢献を経て 1990 年代に新たな展開を見ることになる．そのことについては，もう少し後で述べることにしよう．Strichartz 自身は，彼の論文 [26] のタイトルからも分かるように，波動方程式の解の time decay estimate に関心があったようで，実際彼の作った評価式が一番最初に応用されたのは非線形散乱理論に対してであった．一方，Strichartz の評価式はある意味で波動方程式の解の smooting effect を与えており，この観点から時間局所解の一意存在定理の証明にも応用された．特に波動方程式や分散型方程式の解は振動している波を表わしているので，この振動の効果をうまく評価したいという願望は古くから研究者の間にあった．たとえて言うなら，$|\sin\, x|/x$ は $(0,\infty)$ 上で積分すると発散するが，$\sin\, x/x$ の $(0,\infty)$ 上での積分は広義積分としては有限な値となるので，積分の中に絶対値を入れないで評価したかった．実は Strichartz の評価式は，ある意味でそのような評価を与えてくれたのである．Strichartz の評価式が色々な目的に応じて改良・一般化されて行くにつれて，1990 年代に入ると Fourier 制限定理の証明法に戻り直接非線形項を評価する動きが現われる．それが，Bourgain [3], Klainerman-Machedon [11], Kenig-Ponce-Vega [8,9] であった．この手法は Fourier Restriction Norm Method と

呼ばれ (Bilinear Method と呼ぶ人もいる)，非線形波動方程式や非線形分散型方程式の時間局所可解性理論を劇的に進歩させることとなる．またそれとともに調和解析の分野に，Fourier 制限定理に関する新しい問題を提起することにもなった．

このノートでは，Klainerman-Machedon による一連の論文 [11]–[15] を中心に，非線形波動方程式に対する時間局所解の一意存在定理に関する最近の進展と未解決問題を概説したい．

§2. 古典的結果と Strichartz の評価式

まず，一つのモデルとして次のような非線形波動方程式の初期値問題を空間 3 次元で考えることにしよう．

$$\partial_t^2 u - \Delta u = uDu + \lambda |u|^2 u, \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{2.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x). \tag{2.2}$$

ただし，$D = \mathcal{F}^{-1}|\xi|\mathcal{F}$であり，$\lambda$は実定数，$T > 0$ は時間局所解の存在時間である．古典的場の理論に現われる Maxwell-Klein-Gordon 方程式や Yang-Mills 方程式の非線形項は，大雑把に言って (2.1) の右辺のような形をしている．空間 3 次元の場合 (2.1) の右辺第 2 項は，Sobolev の埋蔵定理により容易に処理できるので，話を簡単にするため$\lambda = 0$ と取ることにする．

われわれの問題は次のように定式化できる．

Problem (UE). $\lambda = 0$ とし $(u_0, u_1) \in H^s \oplus H^{s-1}$とする．

(i) このとき，初期値問題 (2.1)-(2.2) の時間局所解が一意的に存在する最小の s はどういう値か?

(ii) 特に，エネルギー空間 $s = 1$ で，初期値問題 (2.1)-(2.2) は適切か?

(2.1)-(2.2) の $H^s (s \geq 1)$ におけるエネルギー不等式を計算すると，よく知られて

いるように次のようになる.

$$\|D^{s-1}\partial_t u(t)\|_{L^2} + \|D^s u(t)\|_{L^2} \le C\Big[\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}} + \int_0^t \|u(\tau)\|_{L^\infty}\|D^s u(\tau)\|_{L^2}\, d\tau\Big]. \tag{2.3}$$

$s > 3/2$ と取ると, Sobolev の埋蔵定理 $H^s \subset L^\infty$ より (2.3) の右辺の時間積分内の $\|u\|_{L^\infty}$ は $\|D^s u\|_{L^2}$ で押え込むことができるので, 時間局所解の一意存在定理を得る. これが classical result と呼ばれるよく知られた一意可解性定理で, まとめると次のようになる.

定理 2.1. $(u_0, u_1) \in H^s \oplus H^{s-1}$ とする. $s > 3/2$ なら, 初期値問題 *(2.1)-(2.2)* は時間局所的に適切である.

注意 *2.1.* 一般の空間次元 n のとき, $s > n/2$ ならやはり Sobolev の埋蔵定理 $H^s \subset L^\infty$ が成立するので, 仮定を $s > n/2$ とすれば定理 2.1 はそのまま成立する.

定理 2.1 では, エネルギー空間 H^1 を扱うことができない. そこで次のような線形の波動方程式を考える.

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{2.4}$$

$$u(0,x) = u_0, \quad \partial_t u(0,x) = u_1. \tag{2.5}$$

このとき, (2.4)-(2.5) の解 u に対して, Strichartz の評価式と呼ばれる次の時空間評価式が成立する. ([6], [20], [26] を参照)

命題 2.2. u を初期値問題 *(2.4)-(2.5)* の解とすると, u は次の不等式を満たす.

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \|D^{2/q} u(t,\cdot)\|_{L^q}^r\, dt\Big)^{1/r} \le C\big(\|Du_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}\big). \tag{2.6}$$

ただし, $2 \le q < \infty$ かつ $r = 2q/(q-2)$ である.

命題 2.2 の不等式は $q = \infty$(したがって, $r = 2$) のとき, 球対称解に対しては成立するが一般には成立しないことが知られている. ([11] を参照) このように Strichartz

の評価式が成立する指数 q と r の動く範囲の端点の指数 q と r の組を，Strichartz の臨界指数と言うことにする．もしこの Strichartz の臨界指数のときに (2.6) が成立すると仮定すると，(2.3) の右辺の時間積分内の項 $\|u\|_{L^\infty}$ は (2.6) により初期エネルギーによって押え込むことができる．このことは，エネルギー空間 H^1 における初期値問題 (2.1)-(2.2) の局所解の一意存在定理を意味する．残念ながら空間 3 次元のとき，Strichartz の臨界指数では (2.6) は一般に成立しないのであるが，この考察から $H^s(s>1)$ なら (2.1)-(2.2) の時間局所解の一意存在定理が得られる．これをまとめると，以下の定理となる．(たとえば，[24] を参照)

定理 2.3. $s>1$ かつ $(u_0,u_1)\in H^s\oplus H^{s-1}$ とする．このとき，初期値問題 *(2.1)-(2.2)* は時間局所的に適切となる．

これで Problem(UE)(ii) の解答にだいぶ近づいて来た．しかし残念ながらエネルギー空間に対しては，Lindblad[17]-[18] によって次のような否定的な結果が示されている．

定理 2.4. *(2.1)* の右辺の非線形項を

$$u(\partial_t-\partial_{x_1})u$$

によって置き換える．このとき，$s\le 1$ かつ $(u_0,u_1)\in H^s\oplus H^{s-1}$ とすると，初期値問題 *(2.1)-(2.2)* は不適切となる．

定理 2.4 から一般に (2.1) のような方程式に対しては，エネルギー空間 H^1 での時間局所解の一意存在定理は期待できないことが予想される．そこで，それでは関数とその導関数の積で表わされる 2 次の非線形項のうち，初期値問題がエネルギー空間で時間局所的に適切となるようなものがあるのだろうかということが問題となる．さらにもしそのような非線形項が存在した場合，それらの非線形項と物理に現われる Maxwell-Klein-Gordon 方程式や Yang-Mills 方程式との関係はどうなっているのであろうか．これらのことについては次のセクションで考えることにして，このセクションの最後に，scaling argument(日本語訳としては，次元解析が適切であろうか?) から出てくる予想について簡単にコメントしておくことにする．

注意 *2.2.* 一般空間次元 n で考えることにする．もし u が (2.1)-(2.2) の解であるなら，

$$u_\varepsilon(t,x) = \varepsilon^{-1}u(t/\varepsilon, x/\varepsilon), \quad \varepsilon > 0$$

もまた解となる．一方，次の等式が成立する．

$$\|D^s u_\varepsilon(t)\|_{L^2} = \varepsilon^{n/2-1-s}\|D^s u(t/\varepsilon, \cdot)\|_{L^2}$$

これより容易に，$s < n/2-1$ なら初期値問題 (2.1)-(2.2) は不適切となることが推察できる．したがって一般的な予想として，$s = n/2-1$ は (2.1)-(2.2) が適切となるか不適切となるかの境目ではないかと推測される．このような議論を scaling argument と呼び，比較的簡単な考察で Problem (UE)(i) の答えの予想を与えてくれる．この予想は様々な非線形偏微分方程式において検証が試みられているが，正しい例も正しくない例も知られている．非線形波動方程式の場合，空間 3 次元のときは Ponce-Sideris [24] と Lindblad [17]-[19] によって正しくないことが分かっている．

§3. 零形式 (null form) の評価

Strichartz の評価式 (2.6) は強力な道具ではあるが，初期値問題 (2.1)-(2.2) の解析には十分ではなかった．その理由の一つは，Strichartz の評価式を非線形項に適用するだけでは，非線形項のもつ幾何学的な対称性 (たとえば，Lorentz 不変性など) を十分解析できないからである．そこで，Strichartz の評価式と同値な Fourier 制限定理の証明に戻り，直接非線形項を評価することが，Klainerman-Machedon [11]-[15] によって行われた．彼らは一連の論文 [11]-[15] で，次のような零形式 (null form) と呼ばれる 2 次の非線形項を考えた．

$$Q_0(u,v) = (\partial_t u)(\partial_t v) - \nabla u \cdot \nabla v,$$

$$Q_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha u)(\partial_\beta v) - (\partial_\beta u)(\partial_\alpha v), \quad 0 \le \alpha < \beta \le 3.$$

ただし，$\partial_j = \partial/\partial x_j (1 \le j \le 3)$, $\partial_0 = \partial/\partial t$ である．1993 年に，彼らは次の不等式を示した．([11] を参照)

命題 3.1. u と vはそれぞれ (u_0, u_1) と (v_0, v_1) を初期値とする初期値問題 *(2.4)-(2.5)* の解とする．このとき，次の不等式が成立する．

$$\begin{aligned} &\|Q_0(u,v)\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C\big(\|u_0\|_{H^2}+\|u_1\|_{H^1}\big)\big(\|v_0\|_{H^1}+\|v_1\|_{L^2}\big), \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &\|Q_{\alpha\beta}(u,v)\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C\big(\|u_0\|_{H^2}+\|u_1\|_{H^1}\big)\big(\|v_0\|_{H^1}+\|v_1\|_{L^2}\big). \end{aligned} \tag{3.2}$$

注意 *3.1.* もし Strichartz の臨界指数 (すなわち，$(q,r)=(\infty,2)$) のときに Strichartz の評価式 (2.6) が成立するなら，そのことから直ちに命題 3.1 は証明される．しかし，u と vが球対称解でない限り一般に (2.6) は臨界指数では成立しないので，命題 3.1 の不等式には非線形項 $Q_0(u,v)$, $Q_{\alpha\beta}(u,v)$ の幾何学的な性質が反映されていると考えられる．(同様な解析は，Beals の論文 [1] にも見られる．) 実際，$Q_0(u,v)$, $Q_{\alpha\beta}(u,v)$ が特別な性質を持った非線形項であることは既に論文 [10] で指摘されている．命題 3.1 の証明と Fourier 制限定理の証明には，類似点があることが論文 [11] で指摘されている．

命題 3.1 の $Q_0(u,v)$, $Q_{\alpha\beta}(u,v)$ と方程式 (2.1) の非線形項はだいぶ違うように見える．しかし，Maxwell-Klein-Gordon 方程式や Yang-Mills 方程式固有の性質を用いることにより，命題 3.1 が適用できるのである．そのことを，Maxwell-Klein-Gordon 方程式を例にとって簡単に説明しよう．(詳しくは，Klainerman-Machedon [12] を参

照) Coulomb gauge 条件の下で，Maxwell-Klein-Gordon 方程式は次のように書ける．

$$\{(\partial_t + iA_0)^2 - (\nabla - i\mathbb{A})^2\}\phi = 0, \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{3.3}$$

$$(\partial_t^2 - \Delta)\mathbb{A} = -i(\bar{\phi}\nabla\phi - \phi\nabla\bar{\phi} - 2i\mathbb{A}|\phi|^2), \tag{3.4}$$

$$-\Delta A_0 = i(\bar{\phi}\partial_t\phi - \phi\partial_t\bar{\phi} + 2iA_0|\phi|^2), \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} &\phi(0,x) = \phi_0(x), \quad \partial_t\phi(0,x) = \phi_1(x), \\ &\mathbb{A}(0,x) = \mathbb{A}_0(x), \quad \partial_t\mathbb{A}(0,x) = \mathbb{A}_1(x), \\ &A_0(0,x) = A_{00}(x), \ \partial_t A_0(0,x) = A_{01}(x), \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{A} = 0. \tag{3.7}$$

ただし，ϕは複素数値関数，$\mathbb{A}$ は 3 次元実ベクトル値関数，A_0は実数値関数であり，ϕは粒子の複素場を表わし $\mathbb{A}$ と A_0は電磁場ポテンシャルを表わす．式 (3.7) は Coulomb gauge 条件と言われる．たとえば，方程式 (3.3) は次のように書き直せる．

$$\partial_t^2\phi - \Delta\phi = -i(\nabla \cdot \mathbb{A})\phi - i\mathbb{A} \cdot \nabla\phi - |\mathbb{A}|^2\phi - i(\partial_t A_0)\phi - iA_0\partial_t\phi + |A_0|^2\phi.$$

ここで，エネルギー空間 H^1で上の方程式を解くことを考える．右辺第 1 項は Coulomb gauge 条件 (3.7) より消える．A_0は楕円型方程式の解なので，右辺第 4，5 項は容易に処理できる．また，右辺第 3，6 項は，Sobolev の埋蔵定理より押え込むことができる．したがって，問題なのは右辺第 2 項である．Coulomb gauge 条件 (3.7) から，$\mathbb{A}$ は次のように表現できる．

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \nabla \times \tilde{\mathbb{A}} = (\partial_2\tilde{A}_3 - \partial_3\tilde{A}_2, \partial_3\tilde{A}_1 - \partial_1\tilde{A}_3, \partial_1\tilde{A}_2 - \partial_2\tilde{A}_1), \\ \tilde{\mathbb{A}} &= (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3) = (-\Delta)^{-1}(\nabla \times \mathbb{A}). \end{aligned}$$

この関係式を用いると，次の等式が成立していることが分かる．

$$\mathbb{A} \cdot \nabla\phi = -Q_{12}(\tilde{A}_3, \phi) + Q_{13}(\tilde{A}_2, \phi) - Q_{23}(\tilde{A}_1, \phi).$$

$D\tilde{\mathbb{A}} \in H^1$かつ$\phi \in H^1$であり，$\tilde{\mathbb{A}}$と$\phi$は波動方程式の解なので，命題 3.1 の 2 つめの不等式が適用できる．これにより，エネルギー空間での時間局所的な一意可解性が示せる．

Klainerman-Machedon による上述の議論により，非線形波動方程式の一意可解性理論については大きな進展を見た．しかし，もちろんまだ多くの未解決問題が残っている．最後に，いくつかの未解決問題をリストアップして，このノートを終わることにしよう．

Open Problems (i) 上述の Klainerman-Machedon の証明方法では，Coulomb gauge 条件により非線形項を零形式 (null form) に直している．しかし別の gauge を取ると，非線形項がうまく処理できるのかどうかはっきりしない．特に，このことは Yang-Mills 方程式では深刻な問題となる．なぜなら，Maxwell-Klein-Gordon 方程式に対してはゲージ変換は線形偏微分方程式を解くことによって実行できるが，Yang-Mills 方程式に対しては一般に非線形偏微分方程式を解かなければゲージ変換を実行できないからである．たとえば，Lorentz ゲージはその典型例である．([25] の Chapter 8 を参照) したがって Yang-Mills 方程式においては，あるゲージで解けたからと言って別のゲージで解けるかどうかは必ずしも自明ではない．また，Maxwell-Klein-Gordon 方程式に対しても，ゲージ変換することによりエネルギー空間の解がやはりエネルギー空間の解に移ってくれるのかどうかは自明なことではない．(temporal gauge に関しては，論文 [12] でこのことが証明されている．)

(ii) Maxwell-Klein-Gordon 方程式と類似の方程式に Maxwell-Dirac 方程式がある．Dirac 方程式は 1 階の波動方程式のため，エネルギー空間は $H^{1/2} \oplus H^1$(Dirac 方程式の解が $H^{1/2}$に属し，Maxwell 方程式の解が H^1に属す) となる．この方程式の場合，エネルギー空間での時間局所的一意可解性が成立するのかどうかは，まだ未解決である．(Bournaveas [4] を参照) Coulomb gauge 条件の下でも Dirac 方程式の非線形項を，零形式 (null form) にうまく書き直すことができかるどうか分かっていない．

(iii) 命題 2.2 の Strichartz の評価式を改良することはそれ自身興味深いことであるとともに，非線形波動方程式への応用と言う点でも重要なことである．Stricharz の評価式でまず問題となるのは，Strichartz の臨界指数で成立するのかしないのかと言うことであろう．空間 4 次元以上については，Ginibre-Velo [6]，Lindblad-Sogge [20] や Keel-Tao [7] によって，肯定的に解決された．空間 3 次元の臨界指数について

は既に述べたように，そのままでは成立しないことは知られているが([11] 参照)，適当に関数空間を取り直せば成立している可能性はまだ残っている．別の関数空間を用いた Strichartz の評価式ということでは，Lindblad-Sogge [21] の論文が面白い．この方向での改良の問題は依然残っているし，調和解析の立場からも多くの研究者が関心を持っているようである．また，非線形波動方程式への応用と言う観点からは，非斉次線形波動方程式の解の Strichartz の評価式の改良ができるかどうかは特に重要であろう．斉次線形波動方程式の場合，指数 (q,r) の許される範囲は従来知られているものが最良である．しかし非斉次波動方程式の場合，斉次方程式のときより指数の選び方の自由度が大きい可能性がある．したがって，非斉次波動方程式の Strichatz の評価式の指数の動く範囲を完全に決定することは，きわめて興味深い問題であると思われる．

(iv) エネルギー空間での一意可解性定理はかなり満足のいく結果である．しかし，数学的には注意 2.2 で述べたように，scaling argument から出てくる予想が正しいかどうかと言う問題はやはり興味深い．特に空間次元が低いときは，その予想は成立しないことが多いようである．非線形項が零形式 (null form) だけである場合，空間 3 次元では Klainerman-Machedon [15] によってこの問題は解決され，空間 2 次元のときは Zhou [31] と Klainerman-Selberg [16] によって調べられている．(2 次元のときは，$Q_0(u,v)$ と $Q_{\alpha\beta}(u,v)$ では性質が同じではないようである．この点もまだ研究の余地があるように思われる．) 大雑把に言って，Strichratz の評価式を用いると classical result と呼ばれる結果より初期値の微分可能性が 1/2 だけ少なくてすみ，さらに零形式の場合はそれより 1/2 だけ少なくてすむようである．しかし空間 6 次元または 7 次元以上になると，零形式の非線形項とその他の 2 次の非線形項の区別がなくなり，Strichartz の評価式だけですべて証明がうまく行くであろうと言う予想を Klainerman は講演で述べている．空間 4 次元以上の場合この問題については多くがまだ未解決であるが，Klainerman のグループや Tataru によって関連した論文が急速に生産されつつある．

(v) 零形式以外の非線形項で，特に良い評価式が成立する非線形項があるのかどう

かも面白い問題である．これについては，Tsutaya [29]，Ozawa-Tsutaya-Tsutsumi [23]，Tsugawa [28] で伝播速度の異なる波動方程式の連立系の場合，そういうことが起こりうることが示されている．また，他の非線形発展方程式に対しても零形式に相当する非線形項があるかないかも興味深い問題である．非線形 Schrödinger 方程式に対しては，Tsutsumi [30] や Ozawa-Tsutsumi [22] で研究されているが，波動方程式ほど明確には分かっていない．

(vi) Strichartz の評価式は半線形波動方程式に対しては強力であるが，準線形波動方程式に適用するには困難がある．しかし最近，Bahouri-Chemin や Tataru によって準線形波動方程式に対して Strichartz の評価式を適用することにより，classical result よりも 1/4 だけ初期値の微分可能性を少なくした時間局所的一意可解性定理が得られたようである．準線形波動方程式としては Einstein の重力場方程式などがあり，この分野の研究は今後の大きな課題の一つであろう．

(vii) Klainerman-Machedon によってなされた bilinear estimate を，非線形波動方程式への応用という立場から述べてきたが，調和解析の観点からこれらを見た論文として Tao-Vargas-Vega [32] がある．論文 [32] では，Klainerman-Machedon や Bourgain によって得られた bilinear estimate と，Fourier 制限定理及び Kakeya の maximal function の評価との関係が述べられているとともに，その改良と未解決問題に触れられている．

参考文献

[1] M. Beals, Self-spreading and strength of singnlarities for solutions to semilinear wave equations, Ann. Math., 118 (1983), 187–214.

[2] M. Beals, Propagation of smoothness for nonlinear second-order strictly hyperbolic differential equations, Proc. Symp. Pure Math., 43 (1985), 21–44.

[3] J. Bourgain, Fourier transfom restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, Part I: Schrödinger equations, Part II: The KdV-equation, Geom. Funct. Anal., 3 (1993), 107–156, 209–262.

[4] N. Bournaveas, Local existence for the Maxwell-Dirac equations in three space dimensions, Comm. PDE, 211 (1996), 693–720.

[5] D. M. Eardley and V. Moncrief, The global existence of Yang-Mills-Higgs fields in 4-dimensional Minkowski space, Commun. Math. Phys., 83(1982), 171–191.

[6] J. Ginibre and G. Velo, Generalized Strichartz inequalities for the wave equation, J. Funct. Anal., 133 (1995), 50–68.

[7] M. Keel and T. Tao, Endpoint Strichartz estimates, preprint.

[8] C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices, Duke Math. J., 71(1993), 1–21.

[9] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, A bilinear estimate with applications to the KdV equation, J. Amer. Math. Soc., 9(1996), 573–603.

[10] S. Klainerman, The null condition and global existence to nonlinear wave equations, Lect. Appl. Math., 23–(1986), 293-326.

[11] S. Klainerman and M. Machedon, Space-time estimates for null forms and the local existence theorem, Comm. Pure Appl. Math., 46(1993), 1221–1268.

[12] S. Klainerman and M. Machedon, On the Maxwell-Klein-Gordon equation with finite energy, Duke Math. J., 74(1994), 19–44.

[13] S. Klainerman and M. Machedon, Finite energy solutions of the Yang-Mills equations in $\mathbb{R}^{3+1}$, Ann. Math., 142(1995), 39–119.

[14] S. Klainerman and M. Machedon, Smoothing estimates for null forms and applications, Duke Math. J., 81(1995), 99–133.

[15] S. Klainerman and M. Machedon, Estimates for null forms and the spaces $H_{s,\delta}$, IMRN, 17(1996), 853–865.

[16] S. Klainerman and S. Selberg, Remark on the optimal regularity for equations of wave map type, Comm. PDE, 22 (1997), 901–918.

[17] H. Lindblad, A sharp counterexample to the local existence of low-reqularity

solutions to nonlinear wave equations, Duke Math. J., 72(1993), 503–539.

[18] H. Lindblad, Counterexamples to local existence for semi-linear wave equations, Amer. J. Math., 118(1996), 1–16.

[19] H. Lindblad, Counterexaples to local existence for quasi-linear wave equations, preprint.

[20] H. Lindblad and C. D. Sogge, On existence and scattering with minimal regularity for semi-linear wave equations, J. Funct. Anal., 130(1995), 357–426.

[21] H. Lindblad and C. D. Sogge, Restriction theorems and semilinear Klein-Gordon equations in (1+3)-dimensions, Duke Math. J., 85(1996), 227–252.

[22] T. Ozawa and Y. Tsutsumi, Space-time estimates for null gauge forms and nonlinear Schrödinger equations, Diff. Integr. Eqns., 11(1998), 279–292.

[23] T. Ozawa, K. Tsutaya and Y. Tsutsumi, Well-posedness in energy space for the Cauchy problem of the Klein-Gordon-Zakharov equations with different propagation speeds in three space dimensions, preprint.

[24] G. Ponce and T. Sideris, Local regularity of nonlinear wave equations in three space dimensions, Comm. PDE, 18(1993), 169–177.

[25] W. A. Strauss, *Nonlinear Wave Equations*, Regional conference series in Mathematics, Vol. 73, 1989, Amer. Math. Soc., Providence.

[26] R. Strichartz, Restriction of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations, Duke Math. J., 44(1977), 705–714.

[27] P. A. Tomas, Restriction theorems for the Fourier transform, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 35, Part 1 (1979), 111–114.

[28] K. Tsugawa, Well-posedness in the energy space for the Cauchy problem of the coupled system of complex scalar field and Maxwell equations in three space dimensions, Master thesis, University of Tokyo, March 1998.

[29] K. Tsutaya, Local regularity of non-resonant nonlinear wave equations, Diff. Integr. Eqns., 11(1998), 279–292.

[30] Y. Tsutsumi, The null gauge condition and the one dimensional nonlinear Schrödinger equations with cubic nonlinearity, Indiana Univ. Math. J., 43(1994), 241–254.

[31] Y. Zhou, Local existence with minimal regularity for nonlinear wave equations, Amer. J. Math., 119(1997), 671–703.

[32] T. Tao, A. Vargas and L. Vega, A bilinear approach to the restriction and Kakeya conjectures, preprint.