数理解析研究所講究録
1060巻 1998年 22-28

約数関数を含むある指数和から生ずる誤差項の二乗平均について

名古屋大学多元数理　古屋淳 (Jun Furuya)

1 Introduction

$d(n)$ を約数関数, すなわち n の正の約数の総数, γ を Euler の定数とする. また, Dirichlet's divisor problem の誤差項 $\Delta(x)$ を次で定義する.

$$\Delta(x)=\sum_{n\leq x}{}'d(n)-x(\log x+2\gamma-1)-1/4,$$

ここで, 記号 $\sum'$ は x が整数のときに最後の項を半分にすることを示す記号である. この $\Delta(x)$ に対して次の二乗平均公式を考える.

$$\int_2^x \Delta(u)^2du=\left(\frac{1}{6\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}d^2(m)m^{-3/2}\right)x^{3/2}+F(x),$$

ここで, $F(x)$ は二乗平均の誤差項であり, 現在の最良の評価は $F(x)=O(x\log^4 x)$ であることが Preissmann によって示されている [9]. また, この $F(x)$ に対して, 平均値公式

$$\int_2^X F(x)dx=-\frac{1}{8\pi^2}X^2\log^2 X+cX^2\log X+O(X^2),$$

(c はある定数) が Lau と Tsang によって得られた [7]. さらに彼らは, この平均値公式を用いて次の omega result を示した.

$$F(x)=\Omega_-(x\log^2 x).$$

また, Jutila は 上記の結果に関して, 約数関数を含む指数和に対する一般化を証明している [4]. a, b を $(a,b)=1$, $a\geq 1$ を満たす整数とし, $e(\alpha)=\exp(2\pi i\alpha)$ とおく. これに対し, 誤差項 $\Delta(x;b/a)$ を次で定義する.

$$\Delta(x;b/a)=\sum_{n\leq x}{}'d(n)e(bn/a)-\frac{1}{a}x\left(\log\frac{x}{a^2}+2\gamma-1\right)-E(0,b/a),$$

ここで, $E(0,b/a)$ は次の関数を解析接続したものに $s=0$ を代入したものである.

$$E(s,b/a)=\sum_{n=1}^{\infty}d(n)e(bn/a)n^{-s}\qquad (\ \Re s>1\ ).$$

また特に, この値は次の評価があることが Estermann によって証明されている [1].

$$E(0, b/a) \ll a\log(2a).$$

この $\Delta(x;b/a)$ に対して, Jutila は次の二乗平均公式を示した [4].

$$\int_1^x |\Delta(u;b/a)|^2 du = \left(\frac{1}{6\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} d^2(m)m^{-3/2}\right) ax^{3/2} + F(x;b/a), \tag{1.1}$$

ここで, $F(x;b/a)$ は誤差項で, $F(x;b/a) \ll a^2x^{1+\varepsilon} + a^{3/2}x^{5/4+\varepsilon}$ を満たす（ε は任意の十分小さい正の数）. さらに, Jutila はこの二乗平均公式を用いることによって, $a \ll x^{1/2-\varepsilon}$ に対して 次の漸近式を示した（ [4], Corollary of Theorem 1.2 ）.

$$\int_1^x |\Delta(u;b/a)|^2 du \sim \left(\frac{1}{6\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} d^2(m)m^{-3/2}\right) ax^{3/2}. \tag{1.2}$$

また Jutila は, この $F(x;b/a)$ の評価は $O(a^2x\log^5 x)$ に落せることを [4] の中で言及している.

ここでは, この関数 $F(x;b/a)$ の性質について詳しく調べることにする. まず, $F(x;b/a)$ の評価に対して次の定理が得られる.

Theorem 1 $x \geq 2,\ a \leq x$ に対して、

$$F(x;b/a) \ll a^2x\log^4 x + a^{4+\varepsilon}\log^2 x.$$

この定理は, Kiuchi [6] によって与えられた, $\Delta(u;b/a)$ に対する Truncated Voronoï formula 及び, Preissmann [9] によって与えられた, Montgomery-Vaughan 型の不等式を使うことによって得られるものである.

また, この定理から次のことも直ちに導かれる.

Corollary $a^{2+\varepsilon} \ll x\log^2 x$ に対して,

$$F(x;b/a) \ll a^2x\log^4 x.$$

この Corollary と (1.2) 式を合わせて考えると, 条件 $a \ll x^{1/2-\varepsilon}$ のもとでは二乗平均公式

$$\int_1^x |\Delta(u;b/a)|^2 du = \left(\frac{1}{6\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} d^2(m)m^{-3/2}\right) ax^{3/2} + O(a^2x\log^4 x),$$

が成立することが分かる.（Corollary の条件 $a^{2+\varepsilon} \ll x\log^2 x$ は, $a \ll x^{1/2-\varepsilon}$ を含んでいることに注意しておく.）

次にこの関数 $F(x;b/a)$ に対し, Lau-Tsang の方法を適用して, $F(x;b/a)$ の平均値定理を導く.

Theorem 2 $X \geq 2$, $a^2 \leq X(\log^{-8} X)/2$ とすると,

$$\int_1^X F(x;b/a)dx = -\frac{1}{8\pi^2}X^2\log^2 X + f(a)X^2\log X + O(a^{2+\varepsilon}X^2). \tag{1.3}$$

ここで, 関数 $f(a)$ は $f(a) \ll a^{2+\varepsilon}$ で評価される.

この定理における a の条件 $a^2 \leq X(\log^{-8} X)/2$ は additive divisor problem に対する漸近公式の誤差項の一様性から生ずるものである. (Section 2 でふれる.)

またさらに, a についての条件を $a \leq X$ にまで広げると, 次のような定理が導かれる.

Theorem 3 $f(a)$ は前定理と同じ定義の関数とする. このとき, $X \geq 2$, $a \leq X$ に対して

$$\int_2^X F(x;b/a)dx = -\frac{1}{8\pi^2}X^2\log^2 X + f(a)X^2\log X + O(a^3X^2 + a^{4+\varepsilon}X\log^2 X).$$

ここで、関数 $f(a)$ は explicit form に書きくだすことができるが, それは非常に複雑な形をしている（その形は省略する）.

さらに, Theorem 2 または Theorem 3 を用いると次の omega-result が言える.

Theorem 4

$$F(x;b/a) = \Omega_{-}(X\log^2 X)$$

すなわち、この関数 $F(x;b/a)$ に対しても $F(x)$ に対する Lau-Tsang の結果と同様なことがいえることになる.

2 証明の概略

まず, 関数 $\delta_M(u;b/a)$ を次で定義する.

$$\delta_M(u;b/a) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}a^{1/2}u^{1/4}\sum_{n\leq M} d(n)e\left(-\frac{\bar{b}}{a}n\right)n^{-3/4}\cos\left(4\pi\frac{\sqrt{nu}}{a} - \frac{\pi}{4}\right).$$

この $|\Delta(u;b/a)|$ の二乗平均は次で与えられる [2, Lemma 4].

$$\int_1^x |\Delta(u;b/a)|^2 du \quad = \quad \int_1^x |\delta_M(u;b/a)|^2 du + O(a^2x + a^{4+\varepsilon}\log^2 x), \tag{2.1}$$

($x \geq 2$, $a \leq x$ 及び $x^7 \ll M \ll x^{14}$).

(2.1) 式において, 右辺の第一項を計算すると

$$\begin{aligned}&\int_1^x |\delta_M(u;b/a)|^2 du \\ &= \frac{a}{4\pi^2}\sum_{m,n\le M} d(m)d(n)(mn)^{-3/4} e\left(\frac{\bar{b}}{a}(n-m)\right)\int_1^x u^{1/2}\cos\left(4\pi\frac{\sqrt{u}}{a}(\sqrt{n}-\sqrt{m})\right)du \\ &\quad+\frac{a}{4\pi^2}\sum_{m,n\le M} d(m)d(n)(mn)^{-3/4} e\left(\frac{\bar{b}}{a}(n-m)\right)\int_1^x u^{1/2}\sin\left(4\pi\frac{\sqrt{u}}{a}(\sqrt{n}+\sqrt{m})\right)du.\end{aligned}$$

Theorem 1 はここから直ちに得られる（[2, Section 3] 参照）.

今後は, Theorem 2 及び Theorem 3 について考える. $M = X^7$ とする. 上式の第一項から diagonal term を取り出して, 残りの部分について (1.1) 式と比較すると, 次の $F(x;b/a)$ に対する asymptotic formula が $a \le x$, 及び $x^7 \ll M \ll x^{14}$ の範囲で得られる.

$$F(x;b/a) = S_1(x;b/a) + S_2(x;b/a) + O(a^2x + a^{4+\epsilon}\log^2 x), \tag{2.2}$$

ここで,

$$\begin{aligned}&S_1(x;b/a) = \\ &\quad(2\pi^2)^{-2}\sum_{m<n\le M} d(m)d(n)\cos\left(2\pi\frac{\bar{b}}{a}(n-m)\right)(mn)^{-3/4}\int_1^x \sqrt{u}\cos\left(\frac{4\pi}{a}(\sqrt{n}-\sqrt{m})\sqrt{u}\right)du,\end{aligned}$$

及び,

$$\begin{aligned}&S_2(x;b/a) = \\ &\quad(4\pi^2)^{-2}\sum_{m,n\le M} d(m)d(n)e\left(\frac{\bar{b}}{a}(n-m)\right)(mn)^{-3/4}\int_1^x \sqrt{u}\sin\left(\frac{4\pi}{a}(\sqrt{n}+\sqrt{m})\sqrt{u}\right)du.\end{aligned}$$

(2.2) 式を積分して（実際は 3 つの部分に分けて積分をするが, ここでは省略する）, [7] の Lemma 3 及び Section 3 の手法を用いると次の式が導かれる.

$$\int_1^X F(x;b/a)dx = \sqrt{2}\pi^{-3/2}aX^{5/2}T + O(a^2X^2 + a^{4+\epsilon}X\log^2 X),$$

（$2 \le X$, $a \le X$）, 関数 T は次の形で表される.

$$T = \sum_{h\le X^3L^4a}\cos\left(2\pi\frac{\bar{b}}{a}h\right)\int_{D_{h,a}}^M (y(y+h))^{-3/4} g(\theta_{y,y+h})d\psi_h(y),$$

ここで, $g(\nu) = \nu^{-3/2}J_{3/2}(\nu) - 4\nu^{-5/2}J_{5/2}(\nu)$ （ $J_k(\nu)$ は order k の Bessel 関数）, $\theta_{m,n} = 4\pi\sqrt{X}(\sqrt{n}-\sqrt{m})/a$, $D_{h,a} = a^{-2}h^2XL^{-8}$ である. また関数 $\psi_h(y)$ は

$$\psi_h(y) = \sum_{m\le y} d(m)d(m+h),$$

である.

次に, この $\psi_h(y)$ について考える. Heath-Brown は次の漸近公式を導いた [3].

$$\psi_h(y) = I_h(y) + E_h(y),$$

$I_h(y)$ は main term で次の形で書き表せる.

$$I_h(y) = y \sum_{i=0}^{2} \log^i y \sum_{d|h} d^{-1}(\alpha_{i0} + \alpha_{i1} \log d + \alpha_{i2} \log^2 d),$$

ここで α_{ij} はある定数である. (特別な場合として, $\alpha_{20} = 6\pi^{-2}$ かつ $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$ である.) また, $E_h(y)$ は error term で次で評価される.

$$E_h(y) \ll y^{5/6+\varepsilon}, \tag{2.3}$$

(ただし, $1 \le h \le y^{5/6}$ の範囲でのみ一様に.) さらに, Motohashi [8] は (2.3) 式の $E_h(y)$ についての次の改良を示した.

$$E_h(y) \ll y^{2/3+\varepsilon}, \tag{2.4}$$

(ただし、 $1 \le h \le y^{20/27}$の範囲でのみ一様に.)

この漸近公式を用いて T を変形していくが, Theorem 2 では (2.4) 式を用いなければならないが, Theorem 3 では (2.3) 式を用いれば十分である. (ここでは Theorem 2 の場合の証明を進めていく.) しかし, h に対する一様性を考慮すると, $h \le y^{20/27}$ すなわち $(a^2X^{-1}L^8)^{13/20} \le h$ という条件が必要になる. これが 1 以上の すべての h についてあてはまるようにするため, a に対して 仮定 $a^2 \le XL^{-8}$ をつけ加えることにする.

この $\psi_h(y)$ の漸近式及び, Riemann-Stieltjes 積分を用いると, 次の式が得られる.

$$T = \sum_{h \le X^3L^4a} \cos\left(2\pi \frac{\bar{b}}{a} h\right) \int_{D_{h,a}}^{M} (y(y+h))^{-3/4} g(\theta_{y,y+h}) I_h'(y) dy + O(aX^{-1/2}).$$

さらに $\theta_{y,y+h} = \omega$ による変数変換, 和と積分の入れ換えを行なうと次の式が $a^2 \le XL^{-8}$, $X \ge 2$ に対して得られる. [2, Proposition 1]

$$\begin{aligned} T \;=\; & \frac{a}{\pi\sqrt{X}} \int_{2\pi X^{-3}a^{-1}}^{2\pi L^4} g(\omega)\xi_a\left((2\pi)^{-1}X^3a\omega, 2\pi\sqrt{X}\omega^{-1}a^{-1}\right) d\omega \\ & + O(aX^{-1/2} + a^{3+\varepsilon}X^{-3/2}\log^2 X). \end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで,

$$\xi_a(y, Q) \;=\; \sum_{h \le y} h^{-1} \cos\left(2\pi \frac{\bar{b}}{a} h\right) \left(4a_2(h)\log^2(Qh) + 2a_1(h)\log(Qh) + a_0(h)\right),$$

係数 $a_i(h)$ $(i=0,1,2)$ は

$$\begin{aligned} a_0(h) &= \sum_{d|h} d^{-1} \sum_{j=0}^{2} (\alpha_{0j}+\alpha_{1j}) \log^j d, \\ a_1(h) &= \sum_{d|h} d^{-1} (12\pi^{-2}+\alpha_{10}+\alpha_{11}\log d+\alpha_{12}\log^2 d) \\ a_2(h) &= \frac{6}{\pi^2}\sum_{d|h} d^{-1} \end{aligned}$$

である.

つぎに, この関数 $\xi_a(y,Q)$ の漸近式を考えるが, [2, Lemma 5] により,

$$\begin{aligned} \xi_a(y,Q) &= \frac{4}{3a}\log^3 QX + A_1(a)\log^2 QX - \frac{4}{3a}\log^3 Q + A_2(a)\log^2 Q + A_3(a)\log Q \\ &\quad + A_4(a) + A_5(a)\log X + O(a^{1+\epsilon}X^{-1}\log^3 X\log^2 QX), \end{aligned}$$

ここで、係数 $A_i(a)$ はすべて explicit form に書き下すことが出来る. 例えば,

$$\begin{aligned} A_1(a) &= \sum_{1\le r\le a-1} \cos\left(2\pi\frac{\bar{b}}{a}r\right) a_2(r)r^{-1}\log^2 r + \sum_{1\le r\le a-1}\cos\left(2\pi\frac{\bar{b}}{a}r\right)\left\{-\frac{\beta_2(a,r)}{3a}\log^3(a+r)\right. \\ &\quad \left. +\frac{\beta_2(a,r)}{a+r}\log^2(a+r) - 2a\int_1^\infty \frac{2\log(at+r)-\log^2(at+r)}{(at+r)^2}B(t;a,r)dt\right\}, \end{aligned}$$

ただし,

$$\beta_2(a,r) = \frac{6}{\pi^2}\sum_{a_1|(a,r)} a_1 \sum_{\substack{d=1 \\ (a,d)=a_1}}^{\infty} d^{-2}, \qquad B(y;a,r) = \sum_{m\le y} a_2(am+r) - \beta_2(a,r)y$$

である. また, すべての $A_i(a)$ は評価式 $A_i(a) \ll a^\epsilon$ を満たしていることを注意しておく.

この $\xi_a(y,Q)$ の漸近式を (2.5) 式に代入することにより, 次の式が得られる ([7, Lemma 5] を用いて変形を進める.)

$$T = -\frac{1}{a\sqrt{\pi}}2^{-7/2}X^{-1/2}\log^2 X + aA_7(a)X^{-1/2}\log X + O(a^{1+\epsilon}X^{-1/2})$$

あとは上式を $F(x;b/a)$ の平均式に代入すれば, ただちに Theorem 2 が得られる.

この問題は山口大学の木内功先生に御教示いただきました. また, 木内先生には数々の助言, 激励をもいただきました. 筆者は木内先生に深く感謝致します. また, 名古屋大学の谷川好男先生, 松本耕二先生の両先生に数々の助言, 激励をいただいたことを深く感謝致します.

参考文献

[1] T. Estermann, On the representation of a number as the sum of two products, Proc. London Math. Soc. (2) 31, (1930), 123-133.

[2] J. Furuya, Mean square of an error term related to a certain exponential sum involving the divisor function, in preparation.

[3] D. R. Heath-Brown, The fourth power moment of the Riemann zeta-function, Proc. London Math. Soc. (3) 38, (1979), 385-422.

[4] M. Jutila, *Lectures on a method in the theory of exponential sums*, Tata Lecture Note 80, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, (1987).

[5] ———, On exponential sums involving the divisor function, J. Reine Angew. Math.55, (1985), 173-190.

[6] I. Kiuchi, Mean value results for the non-symmetric form of the approximate functional equation of the Riemann zeta-function, Tokyo J. Math. 17, No 1, (1994), 191-200.

[7] Y.K.Lau and K.M.Tsang, Mean square of the remainder term in the Dirichlet divisor problem, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 7, (1995), 75-92.

[8] Y. Motohashi, The binary additive divisor problem, Ann. Scient. École Norm. Sup (4), 27 (1994), 529-572.

[9] E. Preissmann, Sur la moyenne quadratique du terme de reste du probléme du cercle, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 306, (1988) 151-154.