数理解析研究所講究録
1064巻 1998年 114-128

スピノーザの無限とカントルの超限

村田　全　(13/V/1998, 於 京大数理研)

私は長らくカントルの'哲学'をその集合論の推進力と見ていたが，昨年の本「講究録」(n°1019) 所収の「カントルの集合論の哲学的側面」(以下 [1] として引用) の素稿について，赤摂也氏から「カントルの哲学は良く分かったが，それが彼の推進力だったという点の説得力が甘い」との批判を頂いた．これはありがたい批評だったので，それを念頭に置いて [1] を書いたが，やや散漫になって論旨がぼやけたように思うので，改めて私の考えの要旨を述べる．なお近刊の拙著『数学と哲学との間』(引用 [2]) 所収の「カントルにおける数学と哲学」(引用 [2'])も [1] の修正稿だが，今回はスピノーザとの関係に絞って要約の上，補筆した．ただし [1]，[2'] と独立に読めるように，多少の重複を敢えてした．

全体の要旨は次の通りである．

(1) 集合論の形成は彼の哲学を無視しても説明できるが，学士論文(1867)，博士論文(1870)に添えられた 'Theses' には哲学的な問題意識が見られる．

(2) 彼の視野の底には「無限」の問題もさることながら，常に「連続とは何か」の問題があり，哲学的視野を含めてそれを如何に数学化するかが，彼の後半生(特に1893秋以後) の最大の関心事であった．連続体問題もまたその一つである．

(3) 彼の '自然哲学' (下で述べる「諸定理(II)」(1885)) は科学的には荒唐無稽と言ってよいものだが，それも(2)の延長上にあり，連続体仮説もその目標の中で或る役割を果たしている．先入観との戦いが哲学的精神の一つの特徴であるとするならば，そのような奔放な想念の飛躍は，方向や成果はともかく，学問の将来について或る示唆を与えるであろう．

の三点である．

要するに，現代の数学の枠内で考える限り，彼の集合論を考えるのに彼の哲学的思想を考慮する必要はほとんどないが，このような角度から考えるとき，彼の「集合論」には独特の性格があり，その或る面はスピノーザの「無限者」に導かれたと言ってよいように思う．少なくとも現在のところ，これが私の赤氏への答である．

(I) 発端

カントル(1943-1918)は 1863年秋からベルリンで数学，物理学，哲学を修め，1867年に学士論文(Dissertation, ”二次の不定方程式について”)を書き，1870年には博士論文(Habilitationsschrift, ”三項の二次形式について”)を書いたが，当時の慣例により，その末尾には学位審査における口頭試問に用意した主題(Theses)が，それぞれ三項挙げられている．そしてそこに彼の哲学的傾向が見られる．

学士論文での Theses 次の三つである．

D-1. 数論においては，純数論的な方法が解析的方法より遥かに優れている．(In arithmetica methodi mere arithmeticae analyticis longe praestant.)

D-2. 空間，時間の実在性が絶対的か否かは，この論争の性質そのもののために，判定不能である．(Num spatii ac temporis realitas absoluta sit, propter ipsam controversiae naturam dijudicari potest.)

D-3. 数学的事項においては，問題を提起する術の方がそれを解く術よりずっと実り豊かである．(In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi.)

(D-1) はその論文の主題から見て自然だが，他の二つはやや異質である．カントルの伝記を書いたフレンケルは集合論の建設は (D-3) の実現だとしたが，(「カントル論文集」)，(D-2)は後の彼の哲学の一つの予告である．

同じ異質性は博士論文での三つの Theses において更に明らかになる．

H-1. 文字(文書?)によっても術(芸術?)によっても，同様に精神を喜ばせることができる．(Eodem modo literis atque arte animos delectari posse.)

H-2. スピノザは，万物における真の規範規則が人間に発見されうるための力を数学に帰したが(「エティカ」第I部，命題 36)，それは正しい．(Iure Spinoza mathesis (Eth. pars.I. Prop. XXXVI, app.) eam vim tribuit, ut hominibus morma et regula verdi in omnibus rebus indagandi sit.)

H-3. 諸整数をまた同様の仕方で諸天体を，いくつかの規定と関係によって構成された何らかの全体にまとめること．(Numeros integros simili modo atque corpora coelestia totum queddam legibus et relationibus compositum efficere.)

(H-1) においては litera, ars の意味が判然しないため，真意はよく分からないが，彼のヴァイオリンは玄人はだしだったようだし，私が Halle で彼の居宅を訪ね，お孫さんに見せてもらった絵も素人の域を脱していたから，ars は芸術で，対照的に litera は文字や記号を以てする，数学その他の学問だったのかもしれない．

(H-2) は，後に彼が無限に関連してスピノーザ，ライプニッツその他を論じたのが，ただの思いつきなどでないことを示している．

(H-3) はピュタゴラス的の数の哲学を思わせるが，直接には「自然の秩序すなわち数学」としたスピノーザの影響と見ることができて，後のカントルの幻想的自然哲学の根は既にここにあることを示唆する．

しかし三角級数論から無理数の導入と点集合の発端を経て超限順序数に到る展開(1872-82)は，哲学と関係なく純数学的に辿られる．その無理数論に基づいて超越数の存在を示した証明(1874)以後，濃度の導入に到る展開についても事情は同じ．'Beitrag'(1878) でこの両方向統一の意図が現れ，当時の無限像に限られたものながら，連続体問題，同仮説の原型が提出されるが，哲学的意図はまだ明瞭ではない (cf. [2] 所収の論文「カントルの集合論形成のスケッチ」)

(II) 数学と哲学の交錯

カントルにおける哲学と数学の交錯は「無限線状点集合 I-VI」(1879-1884) で初めて顕著になる．特に注目すべきは第III部と第V部だが，数学としての集合論の形成に限れば，ここでも哲学は無視してかまわない．むしろ彼の「哲学」は，当時彼に同情的だった Weierstrass, Mittag- Lefler のような数学者も，陰では「これは頂けない」と語り合った証拠がある(cf. P. Dugac, Note et documents sur la vie et l'oeuvre de R. Baire, Archives for History of Sciences, 15, 1976).

(II-1) **第I部**(1879) の主題は「連続」で，1872年に導入した導集合によって「連続」を分解し分類しようとする試みの第一歩である．

(II-2) **第II部**(1880)では「無限」を超えて延長された導集合の列を 'eine dialektische Begriffserzeugung' と名付け，ただし記号の無限列として導入する．更にそこでは 'Moment(契機)' と言う用語まで用いられる．これらは明らかにヘーゲル的意味で使われているが，そこに特に哲学的意味はなく，悪くいえば哲学的術語のつまみ食いの観がなくもない．この傾向はスピノーザやライプニッツに関してその後も折々現れる．

(II-3) **第III部**(1882) で集合論が数学に限定されないことを示す文言が現れる (cf.[1]). ただし, まだ哲学的意図の表明で, 積極的展開と言えば, 有理点を除外した「非連続空間」(弧状連結空間)を発案して, そこにおいても「連続運動」が可能なことを示すが, その意図は, 経験的空間の「連続性」について「その物理的ないし自然哲学的意味」を探ることだと言っている.

カントルが抽象的集合論はもとより, 点集合論についても背後にこうした自然哲学的構想を懐いていたことは, 彼の集合論の全体像を歴史の立場から論ずる場合, 記憶してよい. その構想は後で概観する「種々の定理」(1885)に極端な形で現れるもので, 率直にいって, その内容自身はいささか幻想的だが, それはそれとして彼のこの傾向は注目に値するであろう。

(II-4) **第IV部**(1883) は一転して純数学的論文だが, 連続体の種々の導集合を高々可算の孤立集合とそれ以外の部分に分解する試みが現れる. 即ち, 任意の点集合 P の導集合 P' を, (n を自然数として) n次導集合を用いて次のように分解すると, $P^{(n+1)}$ が空になって,

(1) $$P' = (P'-P'')+(P''-P^{(3)})+ \ldots +(P^{(n)}-P^{(n+1)})+ P^{(n)}$$

となる場合と, 各 $P^{(n)}$ が常に空にならず,

(2) $$P' = (P'-P'')+(P''-P^{(3)})+ \ldots +(P^{(n)}-P^{(n+1)})+ \ldots + P^{(w)}$$

となる場合とに分かれるが, ( ) 内は全て孤立集合, 従って最終項迄の和は可算となる. カントルはこの種の分解を用いて P' ひいては P の濃度を決定しようとするわけで, 第VI部以後はこの分解が超限的に延長され, 後の自然哲学でも或る役割を果たす.

カントルの三進集合 (疎な完全集合) が初めて現れるのもこの論文である. これは, 当時の積分理論に現れ始めた, 任意の小区間の有限和による被覆に発する知見のようだが, 濃度の他に「長さ」などの量(測度)も考え始めた点で注目して良い. というのは, カントルは第III部で「濃度」の概念を「数論, 関数論, 幾何学等をより高い統一体へとまとめ, 不連続, 連続を問わずに測りうる共通の測度(Maß)」としていたのが, 必ずしも濃度の一本槍ではすまないことを認めたと言えるからである.

この測度への配慮はゼノンの逆理につながりうることで, 当時, 数学史家 P.タンヌリ(ボレルたちを育てた数学者 J.タンヌリの兄)を始め一部の数学者, 哲学者が, 集合論によってゼノンの逆理は解決したと即断した例があるが, カントルはそれに言及していない.

(II-5) **第V部**(1883秋, $$1-14)は**第VI部**(1884, $$15-19) と一体の論文で, $$1-3 は超限順序数の導入, $$11-14 はその詳説, その中間が哲学に属する. また第VI部の最後($19)では, 「集合」を閉集合の範囲に限る場合, 連続体仮説

が成立することが証明され，「集合」の範囲を拡大することを期して「以下続く」と書かれ，それがその後の彼の数学の中心問題になる．しかしそれは空しく終わり，続編は遂に書かれなかったことは人の知るとおりである．

§§1-3 では（II)で導入した記号列をいわば存在化し，「実在的(reelle でなく reale)無限整数」として，後の超限順序数を '産出(erzeugen)' し，この角度から連続体問題に迫ろうとする．

元来．実数(reelle Zahl)の 'reell'（フランス語経由)も，'real'（実在的，実体のある)も，語源はラテン語の res（もの)，realis（物の，事実の)である．real は観念的(ideal)に対立する言葉で，中世スコラ哲学の実在論では，真実在は普遍者(universalia，種や類)であり個体ではないとし，唯名論では，普遍者よりも個体の実在性を先立ててそれに対立した．『エチカ』での realitas（実在性)は定義が与えられていないが，実体(substantia)の顕現(affectio)，ないし属性(attributum)として人間が知覚するものを意味するようである．カントルの'reale Zahlen' なる命名がスピノーザの影響とは一概に言えないが，カントルがしばしばスピノーザ的用語を使ったことから見て，多少の影響は考えて良いであろう．しかし下で触れるように'実体的'とまでは言えないので，ここでは '実体'の顕現として認識できる'実在的'の訳を採ったのである．

§1 に付けられた原註によると，集合論（Mannigfaltigkeitslehre）は本来，数学より遥かに包括的な新しい「一と多の哲学」だという．即ち「集合」とは一者（Eines）と考えうる各々の多者（jedes Viele），言い換えれば，一つの法則によって一個の全体（Ganze）に結びつけられる或る元の定まった全体のことで，「自分はこれによって，プラトンの eîdos や idéa に近い或るもの，あるいは対話篇『ピレーボス』における 'miktón' と似たものを定義しえたと信ずる」と述べている．miktón（混合者)とは，プラトンが ápeiron（不定，無限界）や péras（限界）と対置して，両者の混合者と説くもので，いささか壮大すぎるようだが，これはカントルの集合論の哲学の基本線である．ただし彼の議論はこの部分もその後も，最後まで体系的叙述ではない．

§§4-7 では超限順序数によって，アリストテレス及びそれにつながる無限論を批判すると同時にクロネッカーの有限主義的数学を批判する．（これについて私は［2'］で数学的無限概念の論点先取的性格について注意した．）

次に **§8** で有名な「数学の自由性」の論が続くが，これは実は純粋数学の論であるとともに応用数学の可能性に及び，むしろ観念論と経験論の関連を論じた議論で，スピノーザの万有の統一という形而上学の影響が見られるのみならず，用語においてもスピノーザの影響が顕著である．

ここで特に大切なことは，彼が上記の標語によって，その念頭にあった「数

学の本質」の中に，超限数論をも支えうる人間精神の能力として超限的能力を強調しようとしていることである．これは旧師クロネッカーの執拗な批判への抗議でもあったようだが，ともかくその標語の提示に続いて超限数の実在性について主観と客観の統一の基礎に言及し，人間の「自由な創造」の中には「超限数のような，あるいは複素数のような必然性」のあるものもあれば，そうでないものもあるけれども，前者における必然性とはその万有の統一性の中に位置づけられるものと論じて，その根底に万有の統一 ― 神 ― があると述べている．この最後の論点は彼が §8 の本文に与えた補注 6)，7)（『論文集』pp. 206-207）から見て，確かにスピノーザの汎神論の反映である．論文「実無限に関する種々の立場」(1885)はこの議論の続きと見られる．

参考として『エチカ 第1部』からこの辺までに流用された用語を挙げると，実体(substantia)，属性(attributum)，様態(modus)，その変状/顕現(affectio)，神(Deus)＝無限(定)(infinitum)，様態的変状(modificatio) などがあり，また有限無限の整数の実在性ないし存在性(Realität)について二つの意味を説く際に，スピノーザの内在的原因(causa immanens)，超越的原因(causa transiens)に対応するかのように，次のような文言が現れる．

> 「それらが定義によって悟性の中に確固として定まり，精神の実体 (Substanz)を一定の仕方でモディファイ(modifizieren) する限りでの，主観内の実在性(intrasubjektive oder immanente Realität)と，それらが外界の現象や関係の表現であり，第1級，第2級，第3級 ，... の順序数が物的自然，精神的自然に現実に現れる濃度の表現である限りでの超主観的実在(transsubjektive oder transiente Realität) とを分かつ．そして純粋数学が応用数学たりうるのは，この二つの現実性が共に我々を含む万有の統一の中にあるからだとし，主観内に実在する概念は無数の関係の下で超主観的実在性をも持ち，ただその関係を確定するためには諸学との関係を考慮せねばならない意味で，応用数学は '形而上学(Metaphysik)' に属する」

カントルはこれで観念論と経験論の間の機微を説こうとしたのである．勿論これは博士論文 (H-2)，(H-3)の線上にあり，やがてその「自然哲学」に繋がる．この文章は最後の節で，カントルとスピノーザの比較に関してまた取り上げる．

そう言えば，§4 にも，アリストテレスの「論点先取」に関する原註の中で，プラトン，アリストテレス，ニコラウス・クサヌス，ブルーノなどの名を挙げて，その人達の無限論と自分の集合論の本質的な違いは，自分が実在的無限整数の上昇列を数学的に探究したのみでなく，それが自然界に現われる場所を指

摘し追求すべきことを初めて問題にした処にあるという．即ちその自然哲学の根は深いわけである．

彼はまた同じ場所で

「この無際限の列の途上では決して絶対者(das Absolut)に到達しえない」

とニコラウス・クサヌスばりのことを言い，

「この絶対的な超限順序数の列は絶対者のための適切なシンボルを与える」

と言う．超限順序数全体に関する文言は，後の「ブラリ・フォルチの逆理」をカントルが既に意識していたことを示すが，それのみではない．カントルは超限数を，後にスピノーザの「超越的神 = 絶対的無限者 = 能産的自然(natura naturans)」の「実無限」とも，「具体的世界 = 所産的自然(natura naturata)」の「実無限」とも一線を画した，「抽象界 = 人間の認識能力によって認められる実在性」における「実無限」となることを示唆するが，その詳説が上記の「実無限に関する種々の立場」(1885)における神学的哲学なのである．

$$9-10 では「連続とは何か」を初め一連の哲学的省察が来る．これは実数論の再説に始まり($ 9)，連続をめぐる哲学史の瞥見，時間，空間，運動などの議論を巻き込んだ上で，連続体問題が超限数論の上で再提起される．そしてそれと共に改めて「連続とは何か」が取り上げられる．即ち，時間，空間，運動などを哲学的に吟味するが，

「この長い論争の歴史に立入ることは避け，空間という枠に限定して数学的に連続の概念を確立したい」

と断った上で，

「数学者の連続の扱いは，n次元の実数や複素数などの "連続的量の集合" つまり n次元数空間に依存する関数の概念に結びつけられてきたが，自分は連続をそのものずばりの形で数学的集合論によって解明しようとする」

と言って，非可算濃度の完全疎集合，連続運動の可能な弧状連結集合，開領域などを「連続」の候補として吟味し，とりあえずの答として，連結完全集合を「連続」をとするのである．現在の連続体問題は勿論この解釈上のものである．

カントルはこの考えの上で，時間論，空間論を展開するが，事を「永遠の相の下に(sub specie aeternitatis)」知覚することを理性の本質としたスピノーザ(『エチカ II』 Prop.44, Cor.2）は，時間の問題と無関係であり，空間の問題はまだ意識されていない．空間が数学の問題となった一つのきっかけはカント(Kant）かと思われるが，カントルはカントの先験的な時間，空間の議論を批判する．しかしこの批判はやや見当違いに見える上，目下の主題から離れるのでここでは深入りしない．何れにせよ，この一連の議論は学士論文（D-2）のテーマと無縁ではない．

$$.11-14 は超限順序数の詳論だが，これについては数学的に問題があるが(cf. [2])，ここで特記すべき事はない．

(II-6) 第VI部（$$15-19)は純数学的な論文で，$19 では閉集合（P'＜ P）の範囲で連続体問題が解けることが示されて，一応の結論に達する．[1] で簡略にした点を多少補って書く．

先ず第IV部の式（1),（2）が超限的に延長できることを示す．実際，第３級順序数の始数をⓌと書き，第２級順序数を $\underline{a}$, $\underline{b}$ などと書けば，P' が非可算である場合，（2）は形式的に　Ⓦ → Ω

$$(3)\qquad P' = (P'-P'')+(P''-P^{(3)})+\ \dots\ +(P^{(\underline{a})}-P^{(\underline{a}+1)})+\ \dots\ +P^{(Ⓦ)}$$

$\underline{a} \to \alpha$

と書けるが，或る $\underline{b}$ 未満の（$P^{(\underline{a})}-P^{(\underline{a}+1)}$）は全て疎集合，（$P^{(\underline{b})}-P^{(\underline{b}+1)}$）以降は全て空集合となることが分かるので，それらの和 R（「縮約集合」）は可算集合である．一方，その残り S(＝P'-R）は，$S^{(\underline{b})} = S^{(\underline{b}+1)} = \dots = S^{(Ⓦ)}$ となって完全集合となる(**$16**)．そこで非可算の完全集合の濃度が % であることが分かれば，P' の濃度は $\boxed{\%_0}$ か % かとなって，この場合に限っては連続体仮説が成り立つが，完全集合の濃度が % であることは **$19** で示される．

$\underline{b} \to \beta$

% → $\aleph$

$\boxed{\%_0}$ →

今，もし P が閉集合であれば，(P-P')＝H も孤立集合であることは容易に分かり，(P-P')，(P'-P")以下も同様に議論できるので，(3) は

$$(4)\quad P = (P-P')+(P'-P'')+\ \dots\ +(P^{(\underline{b})}-P^{(\underline{b}+1)})[=0] + P^{(\underline{b})}[=\ \dots\ = P^{(Ⓦ)}]$$

となって(**$17**)，閉集合だけに限って言えば，連続体問題は解けたことになる．

$18 では Gn の点集合に「容積(Inhalt)」$\int dx_1dx_2\dots dx_n$ を定義して新しい積分理論を建設しようとする．一応の結果は

1）P が縮約集合ならば，容積 I(P) は 0,

2）Pが縮約集合でなければ，常に或る完全集合 S があって，

$$I(P \text{ in } G_n) = I(S \text{ in } G_n).$$

つまり任意の点集合の容積は或る完全集合の容積に帰着されるというもので，彼はこの容積を用いて積分を定義し，ここでも

「この I(P) の一般化は数理物理学への集合論の将来の応用において本質的な役割を果たすであろう」

と書いている．彼の脳裏にどんな物理学があったか，それが後の「自然哲学」につながるものだったか等は永久に分からないが．彼が集合論を考えながら，常に物理学への関心を口にしていたことは注意すべきである．ツェルメロはこへの註で，この種の「無限小」のを量子論で改めて考察する事を示唆し，

「この理論について更に知ることは面白いかもしれない」

と書いている．（この積分論の詳しい説明は Hawkins, Lebesgue's Theory of Integration にある．）

(III) 点集合論から自然哲学へ 閉集合に対する連続体問題が終わったので，次の目標は一般の点集合に移るが，カントルが次に取り上げるのは自己稠密集合（$P \subset P'$）のである．それが「n重に拡がる連続空間 Gn における点集合論の種々の定理（II)」(1885) の主題だが，この度は「"集合"を自己稠密集合の範囲に限定すれば連続体問題は解ける」と言う結果には到達しなかった．例の自然哲学が提示されているのは最後の $3 である．このことは既に [1] でも一通り述べたが，今回はスピノーザあるいはライプニッツの哲学との関係についてやや立ち入って述べよう．

連続体問題については，既に (3) によって P' に対する結果が得られており，従って一般の P については P-P'，P'-P の濃度が連続体問題の核心である．閉集合 P に対しては P-P' が疎集合であるために問題は解決したが，次の段階として自己稠密集合 P（$P \subset P'$）を取るのは自然であり，これに対して (4) のような分解を得て P を可算集合 R と完全集合 S とに分割することができれば問題は解決する．

自己稠密集合 P は，その各点の小さい近傍内の P の点が常に同一の濃度を持つとき均質集合(homogene Punktmenge)と呼ばれる．有理数の全体は第 1 濃度の均質集合，無理数の全体は線状連続体濃度の均質集合である．非可算の P が第一濃度(可算)部分と連続体濃度の部分とに二分されれば，連続体仮説は肯定される．

いま P の孤立点の全体 Pa を付加部分(Adherenz)，P の点で P の極限点でもあるものを凝集部分(Koharenz) Pc(=[redacted]$P \cap P^{(1)}$) と呼ぶと，P は Pa と Pc とに分離される：P＝Pa+Pc．P の自己稠密部分集合は Pc に包まれ，P 自身が

自己稠密の場合に限って $Pc = P$ となる．Pa は孤立集合か空集合だが，Pc はまた付加部分 Pca と凝集部分 Pc^2 に分かれ，ν を或る第２級順序数として，

(5)　　$P = Pa + Pca + Pc^2a + .. + Pc^{\omega}a + .. + Pc^{\nu'}a + .. + Pc^{\nu}$,

と分解される．ν' 次の凝集部分 $Pc^{\nu'}$ は超限帰納法で定義され，Pc^{ν} は付加部分の現れる度にそれを篩い落とした，いわば凝集部分中の凝集部分である．この分解を第３級順序数の始数 Ω まで形式的に延長して，第２級順序数の末端部における様相を調べようとするのだが，（4）における完全集合のような停留点が見つからず，ひいてはその濃度も第２，第３，... と判定のしようがない．

実際には，P が可算の場合には，（5）の最終項 Pc^{ν} は空か可算均質集合かとなってうまくゆくが，非可算の場合には，Pc^{ν} は可算均質集合と非可算の凝集部分に分離される以上のことは分からない（$2）．

［訂正：［1］p.17 の「定理 K.　P が分離集合でも可算であれば，」は「分離集合でなくても可算であれば，」の誤り］

$3 でもこのことは更に追求されるが，後半になるとこの考察に基づく一種の自然哲学の構想が提示される．これは博士論文のテーゼに始まり「線状無限点集合」第３部以降しばしば仄めかされていたことに，一つの形を与えたものだが，［1］でも述べたように形而上学的幻想といった要素が強く，現代的意義はないであろう．即ちそれは，当時の物理学にあったエネルギー論と原子論の対立の中に，それらとは直接につながりのない点集合論をもって割って入ったという態のもので，人が相手にしなかったのも無理でない．ただしそれは量子論の勃興以前のことで，当時は化学の方面で分子，原子が少しずつ認められる一方，熱力学や電磁気学を中心にエネルギー論が優勢であり，熱輻射の問題やエーテルの問題がようやく人々の関心を捉えていた頃である．

しばらく［1］の記述を繰り返すことになるが，彼は，自然現象の理論的研究の基盤になる仮説として．マテリア（物質(?)，アリストテレス的質料(?)）の窮極要素について人がはっきりしたことを言わず，また極小だが空間的容積の皆無ではないいわゆる原子を仮定している現状はまずいと批判し，

「マテリァの窮極本来の単純な要素を実無限数［実~~体~~在的実~~数~~整］におき，空間的には拡がりの皆無な真に点状のものとすべきであり，この基本的直観を実現に移すには点集合論が必須である．

「マテリアを構成する自然の単純な要素を，ライプニッツに倣って「モナド」または「一者」と呼び，種として異なるが互いに影響し合う二種のマテリア，ひいてはそれに応ずる二種のモナド，即ち物体マテリアないし物体モ

ナドと，エーテル・マテリアないしエーテル・モナドとを並べて基礎におくとの見方から出発する．この基盤は今日まで観察された感覚的現象を解釈するのに十分なものと思われる〔と彼は言う〕．

「二つのマテリァをそれぞれ物体モナドとエーテル・モナドの集合と見るとき，それらの濃度についての私の仮説は，物体マテリァの濃度は第1濃度，エーテル・マテリアの濃度は第2濃度である．

「この見解には多くの根拠があり，今後順次示すつもりだが，当座の仮定として，各時刻における物体マテリァは第1濃度の点集合 P の形，エーテル・マテリァはそれと並んで現れる第2濃度の点集合 Q の形であり，これらの P と Q は或る程度まで時間の関数として観察されるべきであろう．」

などと言っている．この見方が上の集合の分解理論に繋がるのである．

この後の議論では，これまで問題であった連続体仮説を容認し，§§2-3 の結果によって P と Q を次のように分解する．

$$P = Pr + Pi_1,$$

但し Pr は分離集合で P の残余部分，Pi_1 は（空でなければ）密着部分と呼んだ可算で均質な集合で，P が可算だからそれ以上の密着部分はない．同様に

$$Q = Qr + Qi_1 + Qi_2,$$

この場合，Q が第2濃度なので Qi_3 以上の密着部分はない．そして最後に，

「この本質的に異なる五つの構成部分は物体マテリアとエーテル・マテリアを各時刻において分離すると見られるが，おそらくこの五者には，更には Pr と Qr が

$$Pr = \sum_{\alpha' = 0,1,...<\alpha} Pc^{\alpha'}a,$$

$$Qr = \sum_{\alpha' = 0,1,...<\alpha} Qc^{\alpha'}a$$

と分解されたそれぞれの部分には，マテリアの本質的に別個な現象様式や作用様式，例えば物質の（固体，液体，気体の）状態，化学的区別，光，熱，電気と磁気などがどう対応するかを，先ず決定したい．」

と言う．カントルは，この推測に更に十分な検証を与えるまでは決定的な形で述べないとしてこの論文を結んだが，勿論それは公表されなかった．荒唐無稽

な話と言えばそれまでだが，1870のテーゼ（H-3）に見られたピュタゴラス的数の哲学の一種と見れば，首尾一貫だけはしている．超限順序数を 'real' な無限整数と呼んだのも，この考えと無縁ではなかったかもしれない．

（IV） カントルの超限・スピノーザの無限

こうしてみると，カントルの哲学には意図はあっても体系はないが，彼の集合論建設の背後に何らかの哲学的意図が働いていたことも否定できない．実際，そこには多くの点で学位論文の哲学的テーゼに繋がりがあり，たとえ（III)の自然哲学は「暴走」として斥けるにしても，「連続」を実数的連続体と決めつけるまでに，「連続とは何か」の意識をめぐって様々の躊躇を見せていたことなども，彼の哲学的意識の数学への影響を示すものであろう．ただ，これらを直ちに「集合論創造の推進力」としたのは（赤氏の言われるように）早急だったと思うが，それにしても，これらを切り捨てて集合論の建設は説明できるにせよ，その結果はカントルの思惑とやや外れたものになるであろう．

それよりも気になるのは，例えば（III)に示された「自然哲学」が何処までスピノーザの思想に対応するか，むしろ敢えて言えば，カントルはスピノーザの『エチカ』を，あるいはライプニッツの「モナド」を何処まで理解し，それに共鳴したかであろう．これについては，カントルがスピノーザやライプニッツの何をどう読んだかを精査せねばならない．この人達についての研究は19世紀末辺り急速に進んだのだから，これは注意せねばならない．以下，スピノーザについて簡単に私見を述べる．（現行の標準的なスピノーザ全集は1924年のGebhardt版だが，彼はおそらく Bruder版(1843-46)を使ったのであろう．）

スピノーザの『エチカ』(1677)は，神を中心として考えられた人間の倫理学である．標題に「幾何学的秩序に従って論証されたる」との添え書きがあり，定義，公理，以下，定理，証明と続く形式で書かれているが，『原論』やニュートンの『プリンキピア』などとは異質で，決して透明ではない．また彼の数学的知識はニュートン，ライプニッツと違って，当時としても先端的ではない．彼が数学的叙述形式を使ったのは，演繹的説得性の故というより，数学の真理の永久性と非実利性が，同じ性質をもつ神の支配下での世界の秩序に通うためであったとされる．この点に関する限り，スピノーザと数学の関係は決して密接ではないのである．

『エチカ』は，第１部　神あるいは実体，第２部　精神の本性と起源，第３部　感情の起源と本性，第４部　人間の隷属あるいは感情の力，第５部　知性の能力あるいは人間の自由の五部からなる．第１部は形而上学，第２部は認識

論ないし自然哲学，第3部以下は人間の情緒を含む倫理学で，第1部において一旦否定された人間の自由を何処にどう認めるかという，この本の最も特徴的な部分だが，カントルも引用せず，ここで特に述べるべき事もない．

第1部の「実体(substantia)」は，デカルトやライプニッツの最大関心事で，デカルトは方法的懐疑から初めて，精神と物，そして神を世界における真の実体としたが，スピノーザはこれをなお不徹底とし，神は他者による限定のない無限者であり，自らの原因となるが(causa sui)，人間的な目的(finis)はもたない能産的自然(natura raturans)であって(神＝無限＝自然)，その意味で実体と呼べる唯一者であるとした．また精神も物も神の属性(attributiones)であり，それが様態的変化(modificatio)をうけた変状または顕現(affectiones)として森羅万象が生ずるとした．

カントルがスピノーザに関心を持ったのは，何よりもこの人の「神」が絶対的無限者であるという点であると言ってよく，それがカントルの宗教的・哲学的傾向に訴えたためであろう．しかし彼が今述べたスピノーザの基本線を何処まで継承したかとなると，多少の疑問無しとしない．

カントルは (III)の最後で「人はマテリアの窮極要素についてはっきりしたことを言わない」との批判を口にしたが，彼自身もマテリアが何かをはっきりとは述べていない．'materia' は古典的には「形相」の意味だが，スピノーザはこれを「物質」の意味に使うので，あるいはカントルも同じだったかもしれない．しかしスピノーザの思想との関係となると，カントルが「実体」をどう考えたか，あるいはむしろそれを考えたか否かの方が重要であろう．勿論，集合論を現代的な数学の範囲だけで考えるなら余計ごとだが，カントルは (III)の自然哲学で「マテリア」と言い「モナド」と言い，かつそれらを超限数によって分解された点集合につないでいる．更にそれら超限数については，矛盾含みのその全体を「接近はできるが到達は不能な神」につないでいる．スピノーザの匂いのする「神」を持ち出す以上，「実体」についての説明は欲しいところである．事実，もしカントルが「実体」を含むスピノーザの思想に全く無縁だったならば，カントルの超限とスピノーザの無限とも本質的には別物であって，私は大騒ぎをしてとんだ空中楼閣を描いたことになる．しかしそうとばかりも言えないことが「実無限に関する種々の立場」(1885) から読みとれるので，これについて一言しておこう([1]，p.20)．

彼はその論文の中で古来の思想家を実無限(das aktual-Unendliches)に対する姿勢によって三つに分類し，自分をその三者を全て肯定する最初の思想家としている．

(1) 現世を超えた永遠にして万能なる神，または能動的自然において問題にされる実無限：絶対的実無限(das Absolute)

(2) 具体界または被造的自然において問題にされる実無限：超越的有限(transfinitum)

(3) 抽象界，即ち人間の認識による実無限の形において捉えられる実無限［実は超限順序数の形で捉えられる実無限］

もしこれを極めて好意的に解するならば，カントルは(1)の「神＝能産的自然＝無限」に対置して，(2)で「空間的大きさのない原子または点集合」を配し，(3)の超限順序数という様態的変状(modificatio) ー 全体において「神」に接近する形相(forma) ー によって(2)の所産的自然に秩序を与えるという構図を描いていた，と言えるのかもしれない．それならばカントルの「実体」はやはりスピノーザ的神であって，その物心並行論の中に秩序の新しいつなぎ手として新たに超限順序数 ー 神に支えられた人間の自由数学 ー を持ち込んだ，ということになる ...

このような見方は少々読み込みすぎのような気もするが，「無限線状点集合第５部」§8 (数学の自由性)についての記述にはそれを思わせる箇所がある．既に引用した部分だが，やや詳しく再記する(Cantor,『論文集』pp.181-192).

彼は先ず，有限，無限を問わず整数の実在性(Wirklichkeit oder Existenz)について二つの意味，「主観内的実在性(intrasubjektive Realität)」という「定義によって悟性の中に確固として定まり，精神の実体(Substanz)を一定の仕方で制限する(modifizieren)限りでの実在性」と「超主観的実在性(transsubjektive Realität)」という「知性に対置される外界での事件や関係を，それらの数が表現すると見なされる限りでの実在性，更には第１級，第２級，第３級，... の順序数が物的自然，精神的自然に現実に現れる濃度の表現である限りでの実在性」とを分かった．そして「この二つの実在性の本来の基礎は，我々を含む万有の統一にある」として，更にこの考察が「完全に realistisch であると共に idealistisch であることに疑問の余地はない」とした．そして更にその部分に注記して，

「これはプラトンの考えと共にスピノーザの考えとも一致する」

と書き，『エチカ』第２部の「十全妥当な観念」に関する「定義IV」と「定理７：観念の秩序及び繋がりは物の秩序及び繋がりと同一」を引用した．また

「数学は，その Ideenmaterial(観念マテリアル!?)の形成(Ausbildung)に際し，その概念の主観内的実在性のみを考慮すれば良く，超主観的実在性に即して検証する必要はない」

として，そこに純粋数学の独自性を強調し，

「これにはむしろ'自由数学(freie Mathematik)'の名がふさわしい」

とする一方，

「応用数学にはそこまでの自由は認められない」

とした．（この「自由」は例えば『エチカ』第2部，命題49「精神の中には観念が観念である限りにおいて含む以外の如何なる意志作用も存在しない」が，その系「意志と知性は同一」によって支えられるであろう.）

また上の奇妙な言葉 'Ideenmaterial' の 'material' は「物」というより「素材」のつもりかもしれないが，例の自然哲学の奔放な展開と思い合わせると，この辺りにその奔放さの背景が垣間見られる思いである．実際，そのまた背後には，神には無限の属性(attributa)があり，カントルが無数の主観内的実在性を考えて「自由数学」を発案し，それを所産的自然に適用することを考えたとしても，その限りでは共感できる話である．ただ彼にとって不幸なことは，その飛躍のいわば物理的踏み台が空想的に過ぎたことであろう．いずれにせよ，私が［1］で カントルの哲学的思考をその集合論の推進力とした裏にはこうした配慮があったのである．

読み込みと言えば，ついでにゼノンの逆理について一つの私的な推測を述べておく．彼はこの逆理についてほとんど述べていない．しかし当然関心はあったはずで，濃度の他に測度のような量を考え，その上に積分論を試みたこともその現れかもしれないが，例の自然哲学における集合の分解理論なども，大きさのない原子を如何にして連続的現象につなぐか，つまりは点を如何に集めると長さなどの量になるかというような，ゼノンの逆理の克服の一環だったのでないかと思うことがある．そもそも「連続とは何か」こそ正にゼノンの問題なのである．

他方，彼には哲学者たちの思想を何処まで忠実に辿ったかの点で疑問の余地は常に残る．スピノーザの場合にしてもその疑いはあるが，ヘーゲル的な「弁証法的概念生成」，「契機」(cf.(II-2))，ライプニッツ的なモナドなどは用語のつまみ食い(!?)のような感じさえする．ここでは触れなかったが，彼がカントの思想などをどこまで忠実に汲み取ったかには確かに疑問の余地がある．しかしこのような傾向は，アリストテレスを始め古来の独創的な学者にしばしば見られる例で，特にカントルの欠点とは言えないかもしれない．

(25/VIII/1998)