数理解析研究所講究録
1065 巻 1998 年 88-105

ある b-群の不変成分の補集合のユークリッド面積とその応用

大阪市立大学理学研究科D 3
宮地秀樹 (Hideki Miyachi)
e-mail:miyaji@sci.osaka-cu.ac.jp

研究集会 Analysis and Geometry of Hyperbolic Spaces
（1997 年 12 月 15 日ー 19 日京大数理解析研究所）講究録

導入

b 群 G が次を満たすと仮定する。

(i) G の不変領域を Δ_G とする。このとき、$\infty \in \Delta_G$ である。
(ii) G の極限集合 $\Lambda(G)$ の対数的容量は 1 である。
(iii) $R := \Delta_G/G$ は種数 p のコンパクトリーマン面である。
(iv) $\sigma_G := \{\gamma_j\}_{j=1}^{k_0}$ を R 上の G から得られた分割曲線系（次の章参照）とする。このとき $R - \cup_{j=1}^{k_0}\gamma_j$ の成分にパンツを含む。

定理の主張を述べる為に少し記号を準備する。$R - \cup_{j=1}^{k_0}\gamma_j$ の成分であるパンツを $\{P_1, \ldots, P_s\}$、P_k の境界となる測地線を $\gamma_{k,j}$、その長さを $l_{k,j}$ とする。

[主定理] 次の不等式が成立する。

$$\mathrm{Area}(\mathbf{C} \setminus \Delta_G) \geq \pi \sum_{k=1}^{s} \mathcal{A}(R; l_{k,1}, l_{k,2}, l_{k,3}) \tag{1}$$

ここで、Area(E) は集合 $E \subset \mathbf{C}$ のユークリッド面積、

$$\mathcal{A}(R; l_{k,1}, l_{k,2}, l_{k,3}) := 16 \left\{ \sum_{i=1}^{3} a\left(\sinh^2(l_{k,j}/2), \mathrm{diam}(R) + \delta(k,j)\right) \right\}^{-1}$$

$$a(x,d) := x\cosh^2 d\,(x\cosh^2 d + 1)^2/(1+x)$$

$$\cosh(\delta(k,j)) := \frac{(L_{k,1}^2 + L_{k,2}^2 + L_{k,3}^2 + 2L_{k,1}L_{k,2}L_{k,3} - 1)^{1/2}}{\sinh(l_{k,j}/2)}$$

ここで、$L_{k,m} = \cosh(l_{k,m}/2)$ $(m = 1,2,3)$ そして diam(R) は R の双曲的直径である。特に $M > 0$ と $l_{k,j} < M$, $j = 1,2,3$ となる $k \in \{1, \ldots, s\}$ が

存在すれば、R と M のみに依る正の数 K が存在して、

$$\mathrm{Area}(\mathbf{C} \setminus \Delta_G) \geq K$$

が成り立つ。

今 $\hat{\mathbf{C}} \setminus \Lambda(G)$ の無限遠点を含む成分 Δ_G は単連結であるので、上の条件（ii）は次の条件（ii'）に言い替えられることが知られている（cf. Ahlfors [2, p27]）。

(ii') $\Sigma := \{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$ から Δ_G への等角写像 f で、無限遠点の近傍で $f(z) = z + O(1)$ となるものが存在する。

次の系は Gronwall の面積定理（Sugawa [12, p.10]）により明らかである。

系 1. G を終端 b 群、f を条件 (ii') の様にとる。f が $z = \infty$ で展開

$$f(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

を持てば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1 - \sum_{k=1}^{s} \mathcal{A}(R; l_{k,1}, l_{k,2}, l_{k,3}) \tag{2}$$

が成立する。

このことから次の系も得る。

系 2. G, f を上の系のようにとる。このとき

$$\|\{f, -\}\| \leq \frac{3}{2}(1 - \sum_{k=1}^{s} \mathcal{A}(R; l_{k,1}, l_{k,2}, l_{k,3}))^{1/2} \tag{3}$$

である。ここで、S_f は f のシュワルツ微分

$$\{f, z\} = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2,$$

$\| - \|$ はその双曲的上限により定義される S_f のノルムである：

$$\|\{f, -\}\| = \sup_{z \in \Sigma}(|z|^2 - 1)^2 |\{f, z\}|/4.$$

このノートは次のように構成される。第 1 章ではクライン群、特に b-群に関する言葉の定義を諸性質を与える。第 2 章では主定理を証明するための補題を与える。第 3 章では主定理を証明する。第 4 章では、主定理の用いてココンパクトフックス群のタイヒミュラー空間の Bers 境界内にある、終端 b-群の列の極限が全退化群であるための十分条件も与える。

1 準備

この章の内容は Abikoff [1], Bers [3], [4], 伊藤, 今吉, 小森, 宮地, 山本 [7], Kra [9], Maskit [14], [15] を参照せよ。

G をメビウス変換群 $\mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbf{C}})$ の部分群とする。$\Omega(G)$ を G の不連続領域とする。このノートでは G がクライン群であるとは $\Omega(G) \neq \emptyset$ を満たすものとする。

Δ を $\Omega(G)$ の成分とする。G_Δ で Δ の固定化群、即ち、$G_\Delta = \{g \in G \mid g(\Delta) = \Delta\}$ とする。$\Omega(G)$ の成分 Δ で、$G_\Delta = G$ を満たすとき、Δ と G の不変成分という。有限生成クライン群 G が単連結な不変成分を持つとき、G を b 群という。この時、 b 群の不変成分は高々2個しかないことが知られている。それの一つを Δ_G と書く（二つのときは適当に一つとる)。

非初等的 b 群 G が正則 (regular) であるとは式

$$\mathrm{HArea}(\Omega(G)/G) = 2\mathrm{HArea}(\Delta_G/G)$$

を満たすときにいう。ここで、$\mathrm{HArea}(X)$ は X の双曲的面積である。非初等的 b 群 G が全退化群であるとは $\Omega(G) = \Delta_G$ であるときにいう。最後に、群 G が終端 b 群であるとは、G は正則な b 群であり、かつ不変成分以外の $\Omega(G)$ の成分 Δ の固定化群 G_Δ が三角群、即ち、各 G_Δ が階数 2 の主合同部分群

$$\langle z \mapsto z+2, z \mapsto z/(-2z+1)\rangle$$

と $\mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbf{C}})$-共役である、ときにいう。

$\Sigma := \{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$ とする。b 群 G に対して、f を Σ から Δ_G への等角写像とする。$H := f^{-1}Gf$ を G のフックス群モデルという。放物的元 $g \in G$ が潜在的放物型変換であるとは、ある双曲型元 $h \in H$ が存在して $g = fhf^{-1}$ となるときにいう。このとき、f による h の軸の像を g の軸といい、A_g と書く。これは、g によって決まり、H, 即ち f の取り方によらない。相異なる G 内の潜在的放物型変換 g_1, g_2 について、$A_{g_1} = A_{g_2}$ であるか、$A_{g_1} \cap A_{g_2} = \emptyset$ が知られている。特に g_1 と g_2 が G 内で共役でなければ $A_{g_1} \cap A_{g_2} = \emptyset$ である。Δ_G からすべての潜在的放物型変換の軸を除いたものを、$\cup_{i=1}^{\infty}\Delta_i$（$\Delta_i$ は連結成分）とする。各 Δ_i を構造領域という。そして、Δ_i の G 内での固定化群 G_{Δ_i} を G の構造部分群という。さらに G が正則な b 群の場合、G_{Δ_i} はある $\Omega(G) - \Delta_G$ の成分の固定化群であり、逆に、任意の $\Omega(G) - \Delta_G$ の成分の固定化群はある構造部分群 G_{Δ_i} に一致する事が知られている。特に、G が終端 b 群のときには、G のすべての構造部分群は三角群である。更に、G のすべての構造部分群が全退化群の時 G は全退化群である。

G の元 g が原始的であるとは、方程式 $h^n = g$ を G 内で考えたとき、根が $n = \pm 1$ かつ、$h = g^{\pm 1}$ であるときにいう。

G を b-群とする。このとき、G 内に原始的潜在的放物型変換 $g_1, \ldots, g_{k_0}$ が存在して次が成立する。

(i) $i \neq j$ であれば、$g_i^{\pm 1}$ と $g_j^{\pm 1}$ は互いに共役でない。
(ii) G 内の任意の潜在的放物型変換はある g_i のべきに G 内で共役である。

この $\{g_k\}_{k=1}^{k_0}$ を G の潜在的放物型変換の基底という。π を Δ_G から Δ_G/G への射影とするとき、$\gamma_i := \pi(A_{g_i})$、$\{\gamma_i\}_{i=1}^{k_0}$ は Δ_G/G 上の互いに交わらずかつ自由ホモトピックでなく、Δ_G/G の点に変形出来ない曲線族である事が知られている。更に、曲線族 $\{\gamma_i\}_{i=1}^{k_0}$ は $\{g_i\}_{i=1}^{k_0}$ の取り方に依らず、G のメビウス変換の共役類にのみに依存する。この曲線族をこのノートでは G から得られた分割曲線系という。G が Δ_G/G が種数 p のコンパクトな面である終端 b-群とすると $k_0 = 3p-3$ である。この際、$\Delta_G/G - \cup_{i=1}^{3p-3}\gamma_i$ の各成分 P_k $(k = 1, \ldots, 2p-2)$ はパンツ、即ち球面から 3 つの円板を除き、さらにその境界は（ポアンカレ）測地線であるような面と境界付きリーマン面として等角同値な面、である。この構成法から各 $k = 1, \ldots, 2p-2$ に対して、$\pi^{-1}(P_k)$ の成分は構造領域であることがわかる。

2　いくつかの補題

ここでは主定理を証明するためのいくつかの補題を与える。

放物的元 $A, B \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbf{C}})$ で固定点 $\mathrm{Fix}(A)$, $\mathrm{Fix}(B)$ が異なり、更に、AB が放物的元となるものとする。このとき、群 $F = \langle A, B\rangle$ は三角群になる（下の補題 4 をみよ）。特に、F はフックス群である。ここで、$\Omega(F)$ は無限遠点 ∞ 含むと仮定する。$\Omega_0(F)$ を $\Omega(F)$ の成分で、無限遠点を含まないほうとする。このとき、次が成立する。

補題 1. $\Omega_0(F)$ のユークリッド面積は次で与えられる：

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(\Omega_0(F)) &= 4\pi/\{2(c_A c_B + c_B c_{AB} + c_{AB} c_A) - (c_A^2 + c_B^2 + c_{AB}^2)\}\\ &\geq 4\pi/(c_A^2 + c_B^2 + c_{AB}^2)\end{aligned}$$

ここで、$g(z) = (az+b)/(cz+d)$, $(ad-bc=1)$ に対して、$c_g = |c|$ と書く。

この補題は次の二つの補題からすぐにわかる。

補題 2. [cf. Kra [9, p570,Proposition 12.1]] 放物的元 $A, B \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbf{C}})$ で固定点 $\mathrm{Fix}(A)$, $\mathrm{Fix}(B)$ が異なり、更に、AB が放物的元となるものとする。この時、$\mathrm{Fix}(A) = a$, $\mathrm{Fix}(B) = b$, $\mathrm{Fix}(AB) = c$ とすると、A, B, AB は $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{C})$ の表現で $A = M(a,b,c)$, $B = M(b,c,a)$, $(AB)^{-1} = M(c,a,b)$ と書ける。ここで、

$$M(a,b,c) = \begin{bmatrix} -1 - \frac{2a(b-c)}{(a-b)(a-c)} & \frac{2a^2(b-c)}{(a-b)(a-c)} \\ \frac{-2(b-c)}{(a-b)(a-c)} & -1 + \frac{2a(b-c)}{(a-b)(a-c)} \end{bmatrix}$$

である。

補題 3. 三辺の長さが $x, y, z > 0$ の三角形の外接円の面積は次で与えられる：

$$\mathrm{Area}(D) = \frac{\pi}{2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)-\left(\frac{x^2}{y^2z^2}+\frac{y^2}{z^2x^2}+\frac{z^2}{x^2y^2}\right)}$$

次はよく知られている（cf. Kra [9]）。

補題 4. $A,\ B \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbf{C}})$ を放物型元として次を満たすとする。

(i) $\mathrm{Fix}(A) \neq \mathrm{Fix}(B)$。
(ii) AB は放物型元である。

このとき、群 $\langle A, B\rangle$ は三角群である。

補題 5. $A \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\Sigma)$, $(A(\infty) \neq \infty)$ と放物型元 $g \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbf{C}})$ が次を満たすとする：

> $z = \infty$ の近傍において $f(z) = z + O(1)$ なる Σ 上の単葉関数 f が存在して、Σ 上 $g \circ f = f \circ A$ を満たす。

この時、次が成立する。

$$c_g^2 \leq \frac{4(1-|A'(0)|)}{\mathrm{tr}^2(A)|A'(0)|^3} \tag{4}$$

[**証明**] $A(\infty) \neq \infty$ なので、$g(\infty) \neq \infty$、したがって、$c_A, c_g \neq 0$ である。$\{b_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}$ を f の Grunsky 係数とする。Grunsky 係数の定義から、

$$\begin{aligned} g(\infty) - g^{-1}(\infty) &= f(A(\infty)) - f(A^{-1}(\infty)) \\ &= (A(\infty) - A^{-1}(\infty)) \exp\left\{-\sum_{k,l=1}^{\infty} b_{kl} A(\infty)^{-k}(A^{-1}(\infty))^{-l}\right\} \\ &= (A(\infty) - A^{-1}(\infty)) \exp\left\{-\sum_{k,l=1}^{\infty} b_{kl} \overline{A(0)}^{k}(\overline{A^{-1}(0)})^{l}\right\}. \end{aligned}$$

である。今、計算により、

$$|A(\infty) - A^{-1}(\infty)|^2 = \frac{\mathrm{tr}^2(A)|A'(0)|}{1-|A'(0)|}.$$

であるので、Grunsky の不等式（Sugawa [12, p.41]）により次が成立する。

$$
\begin{aligned}
\frac{|\mathrm{tr}^2(g)|}{c_g^2} &= |g(\infty) - g^{-1}(\infty)|^2 \\
&= |A(\infty) - A^{-1}(\infty)|^2 \exp\left\{-2\mathrm{Re}\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} b_{kl}\overline{A(0)}^k(\overline{A^{-1}(0)})^l\right)\right\} \\
&\geq \frac{\mathrm{tr}^2(A)|A'(0)|}{1-|A'(0)|}\exp\left\{-2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|A(0)|^{2k}}{k}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|A^{-1}(0)|^{2k}}{k}\right)^{1/2}\right\} \\
&= \frac{\mathrm{tr}^2(A)|A'(0)|}{1-|A'(0)|}\exp\left\{-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|A(0)|^{2k}}{k}\right\} \\
&= \frac{\mathrm{tr}^2(A)|A'(0)|}{1-|A'(0)|}\exp\left\{2\log(1-|A(0)|^2)\right\} \\
&= \frac{\mathrm{tr}^2(A)|A'(0)|(1-|A(0)|^2)^2}{1-|A'(0)|} = \frac{\mathrm{tr}^2(A)|A'(0)|^3}{1-|A'(0)|}
\end{aligned}
$$

ここで、$\mathrm{tr}^2(g) = 4$ なので式（4）を得る。 □

3　主定理の証明

G を $R = \Delta_G/G$ が種数 p のコンパクトリーマン面となる b 群とする。$\{\gamma_i\}_{i=1}^{k_0}$ を G から得られた分割曲線系とする。$\{P_1, \ldots, P_s\}$ を $R \setminus \sigma_G$ のパンツである成分とする。ここで、P_k の境界となる測地線を $\{\gamma_{k,i}\}_{i=1,2,3}$ と書く。各 $k = 1, \ldots, s$ に対して、$\{G_{k,i}\}_{i=1}^{\infty}$ を P_k のリフトとなる構造領域の固定化群となる構造部分群の族とする。

f を Σ から Δ_G への等角写像で、無限遠点の近傍で $f(z) = z + O(1)$ と正規化されているものとする。$H := f^{-1}Gf$, $H_{k,i} = f^{-1}G_{k,i}f$ とする。作り方より、$H_{k,i}$ は Σ に作用する $(0,0,3)$ 型のフックス群である。P_k は $\Sigma/H_{k,i}$ のニールセン核と同一視できる。

補題 6. 各 $k = 1, \ldots, s$ に対して、次を満たす H の部分群 H_{k,i_k} と H_{k,i_k} の生成元系 $\{C_{k,j}\}_{j=1,2,3}$ が存在する：

(i) $\pi \circ f(\mathrm{Ax}(C_{k,j})) = \gamma_{k,j}$ $(j = 1,2,3)$ である。ここで、$\mathrm{Ax}(C_{k,j})$ は $C_{k,j}$ の軸である。

(ii) $C_{k,3}C_{k,2}C_{k,1} = id$

(iii) $d(C_{k,j}) \leq \mathrm{diam}(\Delta_G/G) + \delta(k,j)$, ここで、

$$\cosh(\delta(k,j)) = \frac{(L_{k,1}^2 + L_{k,2}^2 + L_{k,3}^2 + 2L_{k,1}L_{k,2}L_{k,3} - 1)^{1/2}}{\sinh(l_{k,j}/2)},$$

$l_{k,m}$ は $\gamma_{k,m}$ の双曲的長さ、$L_{k,m} = \cosh(l_{k,m}/2)$ $(m = 1,2,3)$ そして、$\mathrm{diam}(\Delta_G/G)$ は (Δ_G/G) の双曲的直径である。

この補題を証明するために双曲幾何からの次の補題を与える。少し計算を必要とするが、証明は省略する（Buser [6] の p40, Theorem 2.4.3 及び、双曲直角五角形に関する公式 (Buser [6] p39. Theorem 2.3.4) を参照せよ)。

補題 7. 直角双曲六角形 D, その辺を順番に a, γ, b, α, c, β とする。a と α、b と β、c と γ にそれぞれ直交する D 内の測地線 d_a, d_b, d_c について、次が成立する：

(1) 三線 d_a, d_b, d_c は D 内の一点で交わる。
(2) 各辺の長さを同じ記号で書くとき、

$$\cosh d_a = \frac{(L_a^2 + L_b^2 + L_c^2 + 2L_aL_bL_c - 1)^{1/2}}{\sinh a},$$

ここで、$L_a = \cosh a, L_b = \cosh b$, $L_c = \cosh c$ である。

[補題 6 の証明] $\pi \circ f = \hat{\pi}$ とする。$R := \Sigma/H$, $p_0 := \hat{\pi}(\infty)$ とする。

今、$k = 1, \ldots, 2p-2$ を固定する。各 P_k を構成する、2 枚の等長的な直角双曲六角形を D_k, D'_k とする。D_k の辺を境界に沿っての順番に $\gamma'_{k,1}, \alpha_{k,1}$, $\gamma'_{k,2}, \alpha_{k,2}$, $\gamma'_{k,3}, \alpha_{k,3}$ とする。ここで、$\gamma'_{k,j}$ は P_k の境界 $\gamma_{k,j}$ の一部であるとする。そして、$d_{k,j}$ で、$\gamma'_{k,m}$ と $\alpha_{k,j}$ と直交する D_k 内の（したがって、P_k 内の）測地線とする。この時、補題 7 により、三線 $d_{k,1}$, $d_{k,2}$, $d_{k,3}$ は D_k 内の一点 p_k で交わり、さらに、それらの長さ $\delta(k,j)$ は補題 6 内の式、

$$\cosh(\delta(k,j)) = \frac{(L_{k,1}^2 + L_{k,2}^2 + L_{k,3}^2 + 2L_{k,1}L_{k,2}L_{k,3} - 1)^{1/2}}{\sinh(l_{k,j}/2)},$$

を満たす。

各 $j = 1, 2, 3$ について、$d_{k,j}$ の一部と $\gamma_{k,j}$ を結ぶことにより、p_k を基点に持つ P_k の基本群 $\pi_1(P_k, p_k)$ の元 $[\tilde{C}'_{k,j}]$ で、$\pi_1(P_k, p_k) = \langle [\tilde{C}'_{k,j}] \rangle$ かつ関係式 $[\tilde{C}'_{k,1}][\tilde{C}'_{k,2}][\tilde{C}'_{k,3}] = 1$ を満たすようにとることが出来る。

さて、直径の定義により、p_0 と p_k を結ぶ測地線 β_k で、その長さが直径以下のものがある。このとき $[\tilde{C}_{k,j}] = [\beta_k \tilde{C}_{k,j} \beta_k^{-1}]$ は $\pi_1(R, p_0)$ の元である。p_0 を通る閉曲線に対して、∞ を始点とするリフトとなる曲線から定義される $\pi_1(R, p_0)$ と H との標準的同型により、$[\tilde{C}_{k,j}] \in \pi_1(R, p_0)$ に対して、$C_{k,j} \in H$ をとる。$H'_k := \langle C_{k,1}, C_{k,2}, C_{k,2} \rangle$ とする。構成法から群 H'_k はある H_{k,i_k} に一致する。ここで、β_k の ∞ を始点とするリフトの終点を $\tilde{p_k}$、Δ'_k を $\tilde{p_k}$ を含む、$\hat{\pi}^{-1}(P_k)$ の成分とする。この時明らかに H'_k は Δ'_k の固定化群である。H'_k は Δ'_k の固定化群であり、$\Delta_k := f(\Delta'_k)$ は G の構造領域である。更に、$\hat{\pi}(\Delta'_k) = P_k$ なので、$\pi(\Delta_k) = P_k$ である。したがって、$f^{-1} H'_k f$ は $\pi^{-1}(P_k)$ のある成分に関する固定化群 G_{k,i_k} と一致する。構成法から、群 H_{k,i_k} とその生成系 $\{C_{k,j}\}_{j=1}^3$ は補題 6 の主張を満たす。 □

[主定理の証明] 簡単な計算により双曲的元 $A \in \text{Möb}(\Sigma)$ に対して、

$$|A'(0)| = 4/(\text{tr}^2(A) - 4\tanh^2(d(A)))\cosh^2(d(A)). \tag{5}$$

が成立することがわかる。各 $k = 1, \ldots, s$ について補題 6 のように H の部分群 H_{k,i_k} と H_{k,i_k} の生成元系 $\{C_{k,j}\}_{j=1,2,3}$ をとる。明らかに $G_{k,i_k} := f^{-1}H_{k,i_k}f$ は G の構造部分群である三角群で、$g_{k,j} := f^{-1}C_{k,j}f$ は $G_{i,k}$ の生成元でかつ $g_{k,1}, g_{k,2}$ そして $g_{k,3} = \{g_{k,1}g_{k,2}\}^{-1}$ は放物型である。したがって、5 と式 (5) により、

$$\begin{aligned}
c_{g_{k,j}}^2 &\leq \frac{4(1 - |C'_{k,j}(0)|)}{\text{tr}^2(C_{k,j})|C'_{k,j}(0)|^3} \\
&= \frac{(\text{tr}^2(C_{k,j}) - 4)(\text{tr}^2(C_{k,j}) - 4\tanh^2(d(C_{k,j})))^2\cosh^6(d(C_{k,j}))}{16\text{tr}^2(C_{k,j})} \\
&= \frac{(\text{tr}^2(C_{k,j}) - 4)((\text{tr}^2(C_{k,j}) - 4)\cosh^2(d(C_{k,j})) + 4)^2\cosh^2(d(C_{k,j}))}{16\text{tr}^2(C_{k,j})} \\
&= c(\text{tr}^2(C_{k,j}), d(C_{k,j}))/16
\end{aligned}$$

である。故に補題 1, 6 と各 $k = 1, \ldots, s$ について上のことが成立し、そして $k \neq l$ であれば $\Omega_0(G_{k,i_k}) \cap \Omega_0(G_{l,i_l}) = \emptyset$ であるので主定理が成立する。 □

4 主定理の応用

この章では主定理を用いて、ココンパクトフックス群 G のタイヒミュラー空間 $T(G)$ の Bers 境界内にある、終端 b-群の列の極限が全退化群であるための条件を与える。その前に主張と証明内で用いる記号と言葉を定義する。G は Σ に作用しているとする。$B(G)$ を G に関する Σ 上の 2 次微分に双曲的上限 $\|-\|$ によるノルムを入れることで定義されるバナッハ空間とする。Bers の埋め込みにより $T(G)$ は $B(G)$ の部分領域と考える。その相対境界 $\partial T(G)$ を Bers 境界と呼ばれる。$\varphi \in \overline{T(G)}$ に関して、Σ 上の単葉関数 W_φ を次を満たすものとする：

- ◦ $z = \infty$ の近くで、$W_\varphi(z) = z + o(1)$ である。
- ◦ $\{W_\varphi, z\} = \varphi$, $z \in \Sigma$。

$\chi_\varphi(g) = W_\varphi g(W_\varphi)^{-1}$, $g \in G$ とする。このとき、χ_φ は G と $G_\varphi := W_\varphi G(W_\varphi)^{-1}$ の間の同型を与える。$\varphi \in \partial T(G)$ について、G_φ は $\Delta_\varphi := W_\varphi(\Sigma)$ を不変成分とする b-群である。以下、$\varphi \in \partial T(G)$ について、G_φ が終端 b-群もしくは、全退化群であるとき、φ が終端 b-群もしくは、全退化群であるという。

終端 b-群 $\varphi \in \partial T(G)$ について、$\mathcal{C}_\varphi$ を G_φ の潜在的放物的元より得られる $R := \Sigma/G$ 上の極大分割曲線族とする。$\Phi := \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ を $\partial T(G)$ 内の終

端 b-群により構成される列とする。G の元 g が次の (1)-(3) も満たすとき、Φ に関して無限交差性を満たすと言う：

(1) g は原始的双曲的元である。
(2) g の軸から与えられる R 上の測地線 γ_g は単純閉曲線である。
(3) 任意の $L>0$ について

$$^{\#}\{C \in \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}_{\varphi_n} \mid l(C) > L, i(C,\gamma_g) \geq 1\} = \infty$$

が成立する。ここで、$^{\#}\{-\}$ はその集合の濃度、$l(C)$ は C の双曲的長さそして、$i(C,\gamma_g)$ は C と γ_g の交点数である。

以上の準備の下で、この章で証明する命題を与える。

定理 1. $\Phi := \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\partial T(G)$ 内の終端 b-群により構成される列とする。Φ は $\varphi_0 \in \partial T(G)$ に収束するとする。更に次を仮定する

(1) $n \to \infty$ のとき、$\mathrm{Area}(\mathbf{C} \setminus \Delta_{\varphi_n}) \to 0$ である。
(2) $g \in G$ が Φ に関して無限交差性を満たすとする。このとき正の数 $\epsilon(g)$, $N(g)$ が存在して、$\chi_{\varphi_n}(g)$ が斜航的であるような $n > N(g)$ について $|\mathrm{tr}^2(\chi_{\varphi_n}(g)) - 4| > \epsilon(g)$ が成立する。

このとき、φ_0 は全退化群である。

定理の証明のために次の補題を与える。

補題 8. $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \partial T(G)$ を終端 b-群により構成される列とする。このとき、次を満たす部分列 $\{\varphi_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ がとれる：$\{C_1,\ldots,C_{3p-3}\}$ なる R 上の測地線からなる極大分割曲線系、数 $k_0 \in \{0,1,\ldots,3p-3\}$ そして、R 上の自己同相写像 f_j が存在して、次の (1) から (4) が成立する。

(1) $\mathcal{C}_{\varphi_{n_j}} = \{f_j(C_k)\}_{k=1}^{3p-3}$。
(2) $k_0 > 0$ のとき、$1 \leq k \leq k_0$ であれば、$j \to \infty$ で、$|l(f_j(C_k))| \to \infty$ である。
(3) $k_0 < 3p-3$ のとき、$k \geq k_0+1$ であれば、$j \geq 1$ について $f_j(C_k) = C_k$ である。
(4) 各 f_j は $R \setminus \cup_{k \geq k_0+1} C_k$ の成分を固定する。

さらに加えて、$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、$n \to \infty$ のとき、$\mathrm{Area}(\mathbf{C} \setminus \Delta_{\varphi_n}) \to 0$ を仮定すると次が成立する。

(5) $R \setminus \cup_{k \geq k_0+1} C_k$ の成分はパンツではない。

[証明]　コンパクトリーマン面上の極大分割曲線系から得られるグラフ（cf. Kra [9] and 伊藤, 今吉, 小森, 宮地, 山本 [7, 第 3 章]）の個数は有限個なので、

$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列（それも同じ記号で書く）を適当にとって $\mathcal{C}_{\varphi_n}$ から得られるグラフはすべて一致するとしてよい。

ここで、$\mathcal{C}_{\varphi_1} = \{C'_1, \dots, C'_{3p-3}\}$ とすると次が成り立つ。

(a) 各 n について h_n なる R の自己同相写像が存在して、$C'_{k,n} := h_n(C'_k)$ は R 上の測地線であり、$\{C'_{k,n}\}_{k=1}^{3p-3} = \mathcal{C}_{\varphi_n}$ である（cf. Buser [6]）。

更に適当に部分列をとり（同じ記号で書く）、そして必要ならば $\{C'_1, \dots, C'_{3p-3}\}$ の番号を適当に変えることにより、次を満たすとしてよい。

(b) 数 $k_0 \in \{0, 1, \dots, 3p-3\}$ と正の数 M が存在して、

(b-1) $n \to \infty$, $1 \leq k \leq k_0$ のとき、$l(C'_{k,n}) \to \infty$ である。

(b-2) $k_0 + 1 \leq k \leq 3p-3$ のとき、$l(C'_{k,n}) < M$ である。

ここで、$k_0 = 0, 3p-3$ もありうるがそのときはそれぞれ (i), (ii) は起こらないとする。

R 上の、長さが M 以下であるような単純閉測地線のなす集合 $\mathcal{C}_M$ は有限集合なので（cf. Buser [6]）、帰納的に次のような $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{\varphi_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ がとれる。

(c) $k \geq k_0 + 1$ について、

(c-1) $j, l \geq 1$ であれば $C'_{k,j} = C'_{k,l}$ である。

(c-2) P を $R \setminus \cup_{k \geq k_0+1} C'_k$ の成分とすると $h_{n_j}(P) = h_{n_k}(P)$ が成立する。

$k_0 = 3p-3$ の時は (c-1) は起こらない。

実際 (c) は次のようにして示される。$k_0 = 3p-3$ の時は明らかに (c-1) は起こらない。このとき、$R \setminus \cup_{k \geq k_0+1} C'_k$ の成分は R 自身であるので、(c-2) も明らかである。以下 $k < 3p-3$ で考える。(b-2) により、$\{C'_{k_0+1,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}_M$ である。したがって、適当に部分列をとる（同じ記号で書く）と $j, l \geq 1$ について $C'_{k_0+1,j} = C'_{k_0+1,l}$ と出来る。同様にこの部分列について $k = k_0 + 2$ にこの操作をおこなう。この操作を $k = 3p-3$ まで繰り返すと (c-1) が成立するように $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列がとれる。ここではそれも同じ記号で書く。

分割 $R \setminus \cup_{k \geq k_0+1} C'_k$ を $P_1, \dots, P_s$ と書く。(i) により分割 $R \setminus \cup_{k \geq k_0+1} C'_{k,n}$ は n に依らない。さらにその分割は $h_n(P_1), \dots, h_n(P_s)$ と一致する。したがって、適当に $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列（同じ記号で書く）をとると $j, l \geq 1$ について $h_j(P_1) = h_l(P_1)$ が成立するように出来る。したがって上の議論と同様に (c-2) を満たすように $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列がとれる。それを $\{\varphi_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ と書く。

(c) のようにとった部分列 $\{\varphi_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ について $f_j := h_{n_j} \circ (h_{n_1})^{-1}$, $C_k := C'_{k,n_1} = h_{n_1}(C'_k)$, $k = 1, \dots, 3p-3$ とする。

以下、この様にして得られた $\{\varphi_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, $\{C_k\}_{k=1}^{3p-3}$, 数 k_0 そして $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ が補題の主張 (1) - (4) を満たすことを示す。

(1) について： f_j の定義により $f_j(C_k) = C'_{k,n_j}$ である。(a) により、$\mathcal{C}_{\varphi_{n_j}} = \{C'_{k,n_j}\}_{k=1}^{3p-3}$ なので主張を得る。

(2) について： $g_{k,j} \in G$ を $f_j(C_k)$ に対応するの元とする。この時、$|\mathrm{tr}(g_{k,l})| = 2\cosh(l(C'_{k,n_j})/2)$ なので (b-1) により明らかである。$k_0 = 0$ の時は (b-1) が起こらないので、この (2) も起こらない。

(3) について： (c-1) により、$k \geq k_0 + 1$ であれば $j \geq 1$ について $f_j(C_k) = C_k$ であるので主張を得る。$k_0 = 3p-3$ の時は (b-2) が起こらないので、この (3) も起こらない。

(4) について： f_j の定義と (c-2) より明らかである。

以上より補題の主張の前半を得た。

後半を証明する。$R \setminus \cup_{k \geq k_0+1} C_k$ の成分にパンツ P があると仮定する。$j \geq 1$ について、$\{C_k\}_{k=k_0+1}^{3p-3} \subset \mathcal{C}_{\varphi_{n_j}}$ であることから、P は $R \setminus \mathcal{C}_{\varphi_{n_j}}$ の成分でもある。したがって、P に対応する $G_{\varphi_{n_j}}$ の構造部分群 H_{n_j} で三角群になるものがある。(b-2) により P の境界の成分の双曲的長さは M 以下であり、面 $R = \Sigma/G$ は固定されているので、主定理により、ある定数 $K = K(R, M) > 0$ が存在して、

$$\mathrm{Area}(\mathbf{C} \setminus \Delta_{\varphi_{n_j}}) \geq K$$

である。これは仮定に反する。したがって、主張 (5) を得る。 □

[定理 1 の証明] Φ の部分列をとっても極限となる φ_0 は変わらないので、定理 1 の仮定 (1) により、始めから Φ に関して、補題 8 の主張の (1)-(5) を満たすような R 上の極大曲線族 $\{C_1, \ldots, C_{3p-3}\}$, 数 k_0 そして R の自己同相写像の族 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ がとれると仮定しておく。(5) より $k_0 \geq 1$ である。$k_0 = 3p-3$ の場合も同様に証明できるので、以下、$k_0 < 3p-3$ と仮定する。ここで無限交差性の定義により、$g \in G$ がこの部分列について無限交差性を満たせば、もとの列についても無限交差性を満たすことを注意しておく。

g_k を C_k に対応する G の原始的双曲的元、$1 \leq k \leq k_0$ について $g_{k,n}$ を $f_n(C_k)$ に対応する原始的双曲的元とする。$P_1, \ldots, P_s$ を $R \setminus \cup_{k=k_0+1}^{3p-3} C_k$ の成分とする。π を Σ から R への被覆写像、$\widetilde{P}_i$ を $\pi^{-1}(P_i)$ の成分とする。H_i を $\widetilde{P}_i$ の G での固定化群とする。$G_{i,n} := \chi_{\varphi_n}(H_i)$, $G_{i,0} := \chi_{\varphi_0}(H_i)$ とする。各 P_i はパンツではないので、終端 b-群の構造より $G_{i,n}$ は Δ_{φ_n} を含む不変領域を持つ終端 b-群である。

初めに、$\{G_{i,0}\}_{i=1}^{s}$ が G_{φ_0} の構造部分群の代表系であることを示す。明らかに、$k \geq k_0 + 1$ について $\chi_{\varphi_0}(g_k)$ は G_{φ_0} の潜在的放物的元なので、$\{G_{i,0}\}_{i=1}^{s}$ が G_{φ_0} の構造部分群の代表系であることを示すには各 $G_{i,0}$ が潜在的放物的

元を含まないことを示せばよい。実際この場合、$\{\chi_{\varphi_0}(g_k)\}_{k\geq k_0+1}$ は G_{φ_0} の潜在的放物的元の基底になり、そして $G_{i,0}=\chi_{\varphi_0}(H_i)$ より、$i\neq j$ であれば $G_{i,0}$ と $G_{j,0}$ は G_{φ_0} 内で共役でなく、各 i について $G_{i,0}$ は

$$\Delta_{\varphi_0}\setminus\cup_{g\in G}\cup_{k\geq k_0+1}\mathrm{Ax}(\chi_{\varphi_0}(gg_kg^{-1}))$$

の成分の固定化群であり、逆にその成分の固定化群はある $G_{i,0}$ に共役であるであるからである。$\chi_{\varphi_0}(g)$ が潜在的放物的元になるような原始的双曲的元 $g\in G$ の軸により定義される R 上の測地線 γ_g は単純閉曲線である（cf. Maskit [14]）。以上より、$\{G_{i,0}\}_{i=1}^{s}$ が G_{φ_0} の構造部分群の代表系であることを示すには、原始的双曲的元 $g\in G$ をその軸により得られる R 上の測地線 γ_g が単純閉曲線でかつある P_i に含まれるものについて、$\chi_{\varphi_0}(g)$ が斜航的であることを示せばよい。

この事を示す前に、このような g が Φ について無限交差性を満たすことを示す。g が無限交差性の定義の (1), (2) を満たすことは明らかなので、(3) を示す。

任意の $L>0$ 固定する。g が Φ に関して無限交差性を満たすことは、$L>l(\gamma_g)$ の場合を調べれば十分である。列 Φ は補題 8 の主張の (5) を満たすので、φ_n が終端 b-群であることより、各 n について $\mathcal{C}_{\varphi_n,i}:=\{C\in\mathcal{C}_{\varphi_n}\mid C\subset P_i\}$ は空集合ではない。補題 8 の主張の (2) により、任意の自然数 q について十分大なる $n(q)$ をとると、$n\geq n(q)$, $C\in\mathcal{C}_{\varphi_n,i}$ について、$l(C)>qL$ が成立する。ここで、$n(q)<n(q+1)$ としてよい。$\mathcal{C}_{\varphi_{n(q)}}$ は極大分割曲線族でありかつ γ_g は $\mathcal{C}_{\varphi_n,i}$ に含まれないので、各 q について、$i(C(q),\gamma_g)\geq 1$ となる $C(q)\in\mathcal{C}_{\varphi_{n(q)},i}$ が存在する。以上により、

$$^{\#}\{C\in\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}_{\varphi_n}\mid l(C)>L, i(C,\gamma_g)\geq 1\}\geq^{\#}\{C(q)\mid q>0\}=\infty$$

したがって、g は列 Φ について無限交差性を満たす。

ここで、数 $n(1)$ の定義により $n\geq n(1)$ ならば、γ_g は $\mathcal{C}_{\varphi_n,i}$ に含まれないので、この n について $\chi_{\varphi_n}(g)$ は斜航的である。故に、定理 1 の仮定 (2) により、正の数 $\epsilon(g)$, $N(g)$ が存在して、$n>\max\{N(g),n(1)\}$ について、$|\mathrm{tr}^2(\chi_{\varphi_n}(g))-4|>\epsilon(g)$ が成立する。このとき $\chi_{\varphi_n}(g)\to\chi_{\varphi_0}(g)$ なので $|\mathrm{tr}^2(\chi_{\varphi_0}(g))-4|\geq\epsilon(g)$ が成立する。G_{φ_0} がねじれがなく χ_{φ_0} が同型であるので、$\chi_{\varphi_0}(g)$ は斜航的元である。

したがって、$\{G_{i,0}\}_{i=1}^{s}$ は G_{φ_0} の構造部分群の代表系であるので、$G_{i,0}$ は擬フックス群であるか潜在的放物的元を含まない全退化群である（cf. Maskit [15]）。ここで、$G_{i,0}$ は擬フックス群と仮定する。今までの議論により、$G_{i,0}$ の放物的元はある $\chi_{\varphi_0}(g_k)$, $k\geq k_0+1$ と共役なので、$G_{i,0}$ から $G_{i,n}$ への同型 $\chi_{\varphi_n}\circ(\chi_{\varphi_0})^{-1}$ は放物的元を放物的元にうつす。$\varphi_n\to\varphi_0$ なので $\{\chi_{\varphi_n}\circ(\chi_{\varphi_0})^{-1}\}_{n>0}$ は $G_{i,0}$ 上の恒等写像に収束する。擬フックス群は擬等角安定（cf. Bers [4]）なので、十分大なる n について $G_{i,n}$ は擬フックス群で

ある。これは、$G_{i,n}$ が終端 b-群であることに反する。したがって、$G_{i,0}$ は全退化群である。以上より G_{φ_0} のすべての構造部分群は全退化群である。よって、G_{φ_0} は全退化群である。 □

定理 1 に関連して、次を注意しておく。

[注] (1) $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \partial T(G)$ を終端 b-群からなる列で、潜在的放物的元を持たない全退化群 $\varphi \in \partial T(G)$ に収束するとする。このとき、$\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ は定理 1 の仮定 (1), (2) を満たす。

(2) 任意の $\varphi \in \partial T(G)$ に対して、φ に収束する終端 b-群からなる列 $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \partial T(G)$ で

$$\mathrm{Area}(\mathbf{C} \setminus \Delta_{\varphi_n}) \to 0, \quad n \to \infty$$

なるものが存在する。

(3) 任意の潜在的放物的元を持つ全退化群 $\varphi \in \partial T(G)$ に対して、φ に収束する終端 b-群からなる列 $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \partial T(G)$ で

$$\mathrm{Area}(\mathbf{C} \setminus \Delta_{\varphi_n}) \to 0, \quad n \to \infty$$

かつ定理 1 の仮定 (2) を満たさないものが存在する。

[証明] (1) サーストンの定理（cf. 谷口, 松崎 [13, p.166, 定理 4.36]）より、全退化群 $\varphi \in \partial T(G)$ に対して、$\mathrm{Area}(\mathbf{C} \setminus \Delta_{\varphi}) = \mathrm{Area}(\Lambda(G_{\varphi})) = 0$ である（このことは G_{φ} が潜在的放物的元を持つとしても成り立つ）。そして、領域の族 $\{\Delta_{\varphi_n}\}_{n=1}^{\infty}$ は Δ_{φ} に点 $w = \infty$ に関して、カラテオドリ核収束するので（cf. 須川 [12, p.8]）、$\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ は定理 1 の仮定 (1) の満たすことがわかる。定理 1 の仮定 (2) を満たすことは、G_{φ} が潜在的放物的元を持たないことからわかる。 □

(2) 任意の $\varphi \in \partial T(G)$ に対して、φ に収束する全退化群の列 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \partial T(G)$ がある（cf. Bers [4]）。各 ψ_n について上の (1) を用いると終端 b-群 $\varphi_n \in \partial T(G)$ で、$\mathrm{Area}(\mathbf{C} \setminus \Delta_{\varphi_n}) < 1/n$ かつ $\|\psi_n - \varphi_n\| < 1/n$ なるものがある。この列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \partial T(G)$ は上の主張 (2) を満たす。 □

(3) $\varphi \in \partial T(G)$ に対して、φ に収束する潜在的放物的元を持たない全退化群の列 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \partial T(G)$ がある。$\{g_n\}_{n=1}^{k_0}$ を G_{φ} の潜在的放物的元の基底とする。$L_0 = \max_{1 \le k \le k_0}\{|tr(g_k)|\}$ とする。このとき、補題　8 の証明を応用すると、各 n について終端 b-群 $\varphi_n \in \partial T(G)$ で、$\mathrm{Area}(\mathbf{C} \setminus \Delta_{\varphi_n}) < 1/n$, $\|\psi_n - \varphi_n\| < 1/n$, そして、$\{h_k^n\}_{k=1}^{3p-3}$ を G_{φ_n} の潜在的放物的元の基底とすると、$|tr(h_k^n)| > nL_0$ を満たすものが存在する。そのような $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \partial T(G)$ は明らかに主張 (3) を満たす。 □

最後に、主定理の応用ではないが、定理 1 の仮定（2）について、次のことを注意しておく。

[注]　(4)　$\dim T(G) > 1$ とする。このとき、$\partial T(G)$ 内の極限を持つ終端 b-群の列で、定理 1 の仮定 (2) を満たすが、その極限が全退化群でないものが存在する。

この注意を証明するために次の補題を与える。

補題 9. 双曲的解析的有限型のリーマン面 R とその部分領域 P を R と同相で、包含写像 i は P と R の同相写像とホモトピックとする。S を R と同相な解析的有限型のリーマン面で、P から S への単射正則写像 h で、その写像は P から S への同相写像とホモトピックとする。このとき R と S に依らない数 $K_0 > 1$ と、R から S への K_0-擬等角写像 g で、$g \circ i$ が h とホモトピックなものが存在する。

[証明]　$T(R)$ を R のタイヒミュラー空間とする。この補題の証明内では $T(R)$ の点を面 S と R から M への擬等角写像 f の対の同値類 $[M, f]$ で表わす。このとき、P から面 M への単射正則写像 h_P でその写像は P から M への同相写像とホモトピックなものが存在する時、R から M への擬等角写像 f_P で $f_P \circ i$ が h_P とホモトピックなものが存在すること容易にわかる。そのような $[M, f_P]$ の集合の $T(R)$ 内の閉包を $X(P)$ とする。

ここで、$X(P)$ が $T(R)$ 内のコンパクト集合であることを示す。R の単純閉測地線全体を $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots\}$ とする。P 内の P の双曲構造に関する C_i とホモトピックな測地線の長さを l_i とする。この時、双曲計量の縮小原理によって、$l_i > 0$ であり、$[S, g] \in X(P)$ に対して、$L_S(g(C_i)) \leq l_i$ が成立する。ここで S 内の単純閉曲線 γ について、$L_S(\gamma)$ は γ とフリーホモトピックな測地線の長さである。したがって、$X(P)$ は $T(R)$ の部分集合 $\hat{X} := \{[S, g] \mid L_S(g(C_i)) \leq l_i, i = 1, \dots\}$ 含まれる。ここで、$\hat{X}$ はコンパクトなので（cf. Kerchoff [8]）、$X(P)$ もそうである。

このとき、タイヒミュラー距離に関する $X(P)$ の直径を $\mathrm{diam}_{T(R)}(X(P)) < \infty$、$K_0 := e^{2\mathrm{diam}_{T(R)}(X(P))}$ とすればこれは明らかに R と S に依らない。さらに主張を満たす g が存在することは明らかである。　□

[注意 (4) の証明]　$R = \Sigma/G$ 上の分割曲線系 $\mathcal{C} := \{C_1, \dots, C_{k_0}\}$ を、$R \setminus \cup_k C_k$ の成分を $P_1, \dots P_{s_0}$ とすると $s_0 \geq 2$ かつ P_1 はパンツでなく、P_s（$s \geq 2$）はパンツであるものをとり固定する。これは $\dim T(G) > 1$ より存在する。

P_1 の無限ニールセン拡張により得られる面（cf. Bers [5]）R_1 と包含写像 i そして、Σ に作用する R_1 のフックス群を Γ_1 とする。$\partial T(\Gamma_1)$ の終端 b-群の列 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ で、潜在的放物型元を持たない全退化群 $\psi_0 \in \partial T(\Gamma_1)$ に収束するものをとる。$\mathcal{C}_{\psi_n} := \{C'_{1,n}, \dots, C'_{k_1,n}\}$ とする。各 $C'_{i,n}$ とフリー

ホモトピックな P_1（したがって R ）内の測地線を $C_{i,n}$ とする。明らかに、$\mathcal{C}_n := \{C_{i,n}, C_j\}_{i=1,\dots k_1\, j=1,\dots,k_0}$ は R 上の極大分割系である。このとき終端 b-群 $\varphi_n \in \partial T(G)$ を $\mathcal{C}_{\varphi_n} = \mathcal{C}_n$ なるようにとる。適当に部分列をとり、列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\varphi_0 \in \partial T(G)$ に収束するとしてよい。以下、この列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が注意 (4) を満たすことを示す。

φ_0 が全退化群でないことは次のことよりわかる：$g_j \in G$ を C_j に対応する原始的双曲型元とすると $\chi_{\varphi_n}(g_j)$ が潜在的放物型元なので $\chi_{\varphi_0}(g_j)$ もそうである。したがって、$\mathcal{C}_{\varphi_0}$ は $\{C_j\}_{j=1}^{k_0}$ を含む。故に、$R \setminus \cup_{C \in \mathcal{C}_{\varphi_0}} C$ はパンツ P_2 を含み、これに対応する G_{φ_0} の構造部分群 F は三角群即ちフックス群である。したがって、φ_0 は全退化群でない。

最後に、列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が定理 1 の仮定 (2) を満たすことを示す。これを示すには P_1 に対応する G_{φ_0} の構造部分群が潜在的放物型元を持たない全退化群であることを示せば十分である。

ここで、Σ から R への射影を π と書くとき、$\pi^{-1}(P_1)$ の成分 $\tilde{P}_1$ で $\infty \in \tilde{P}_1$ なるものが存在しているとしてよい。そして、$n \geq 0$ に対して、$\tilde{P}_1$ の G 内の固定化群を H_1 とする。$G_n := \chi_{\varphi_n}(H_1)$ とする。$n \geq 1$ について、G_{φ_0} は終端 b-群であることと、$\tilde{P}_1$ の定義により、G_n は $\infty \in \Delta_{G_n}$ なる終端 b-群である。さらに同型 $\chi_{\varphi_n} \circ (\chi_{\varphi 0})^{-1}|_{G_0}$ によって、$\{G_n\}_n$ は G_0 に代数的に収束している。

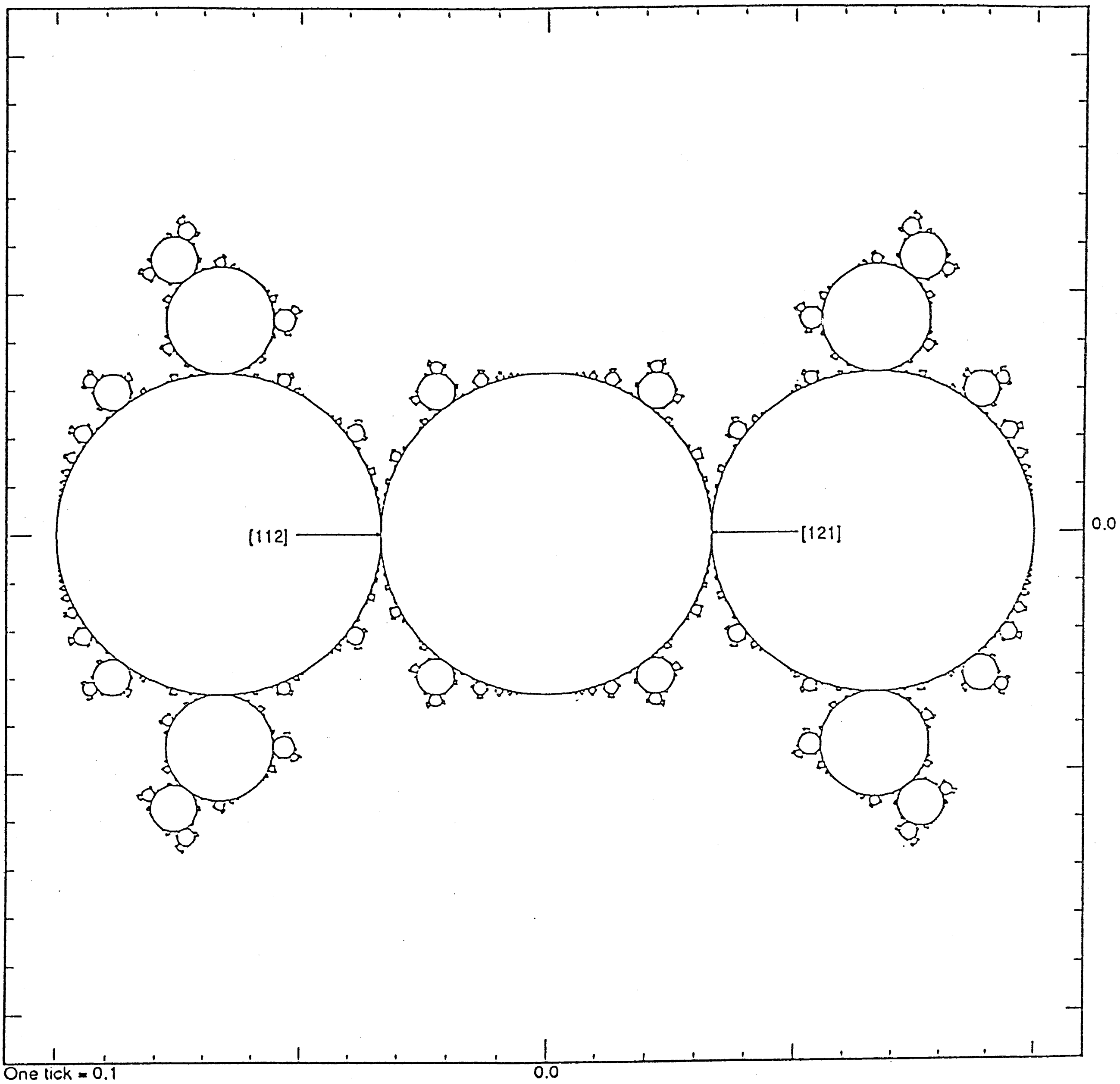
ここで、$S_n := \Delta_{G_n}/G_n$ とし、その射影と $W_{\varphi_n}|_{\tilde{P}_1}$ により自然に与えられる P_1 から S_n への単射正則写像を h_n と書く。このとき、ホモトピー類として $\mathcal{C}_{G_n} = h_n(\{C_{1,n}, \dots, C_{k_0,n}\})$ である。さらにこの写像は P から S_n への同相写像とホモトピックである。したがって、補題 9 により、数 $K_0 > 1$ と R_1 から S_n への K_0-擬等角写像 g_n で、$g_n \circ i$ が h_n とホモトピックであるものが存在する。このとき構成法により、ホモトピー類として $\mathcal{C}_{G_n} = g_n(\mathcal{C}_{\psi_n})$ である。

ここで $P_1 = \tilde{P}_1/H_1$ から $R_1 = \Sigma/\Gamma_1$ への包含写像にリフトである $\tilde{P}_1$ から Σ の中への単射正則写像 $\tilde{i}$ を一つ固定する。この $\tilde{i}$ により H_1 から Γ_1 への同型 ξ が $h \in H_1$ に対して、$\xi(h) \circ \tilde{i} = \tilde{i} \circ h$ で定義される。次に h_n の定義により、その $\tilde{P}_1$ から Δ_{G_n} の中へのリフトの一つとして $W_{\varphi_n}|_{\tilde{P}_1}$ がとれる。このとき、$g_n \circ i$ と h_n はホモトープなので Σ から Δ_{G_n} への g_n のリフト $\hat{w}_n$ でそれが誘導する Γ_1 から G_{ψ_n} への同型 $\hat{\eta}_n$ が $\hat{\eta}_n \circ \xi = \chi_{\varphi_n}$ を満たすものが存在する。このとき、$w_n := \hat{w}_n \circ W_{\psi_n}^{-1}$、$\eta_n(g) = w_n g w_n^{-1}$, $g \in G_{\psi_n}$ とする。定義より w_n は Δ_{ψ_n} から Δ_{G_n} の上への K_0-擬等角写像で、$\eta_n = \chi_{\varphi_n} \circ (\chi_{\psi_n} \circ \xi)^{-1}$ が成立する。さらに η_n は型を保つ。G_{ψ_n} と G_n は終端 b-群なので、標準的な議論により w_n はリーマン球面の K_0 擬等角写像に拡張される。この拡張も同じ記号で書く。

今明らかに H_1 内で共役で無い原始的双曲的元 $g_1, g_2 \in H_1$ で、$\alpha_i^0 := \chi_{\varphi_0}(g_i)$, $\beta_i^0 := \chi_{\psi_0} \circ \xi_1(g_i)$ $(i = 1, 2)$ が斜航型元であるものが存在する。さ

らに $\alpha_i^n := \chi_{\varphi_n}(g_i) \to \alpha_i^0$, $\beta_i^n := \chi_{\psi_n} \circ \xi_1(g_i) \to \beta_i^0$ である。したがって、十分大なる N_0 と正の数 d が存在して、$n \geq N_0$ に対して、α_i^n, β_i^n は斜航的であり、$\{x_{i,n}, y_{i,n}\}$, $\{a_{i,n}, b_{i,n}\}$ をそれぞれ α_i^n, β_i^n の固定点とすると、$k(x_{i,n}, x_{i,0})$, $k(a_{i,n}, a_{i,0})$, $k(y_{i,n}, y_{i,0})$, $k(b_{i,n}, b_{i,0}) < d$ （$n \geq N_0$, $k(-,-)$ は球面距離）かつ $\{x_{i,0}, y_{i,0}\}_{i=1}^2$ と $\{a_{i,0}, b_{i,0}\}_{i=1}^2$ の異なる 2 点は $n \geq N_0 \cup \{0\}$ において、球面距離が $4d$ 以上と出来る。$w_n(\{x_{i,n}, y_{i,n}\}) = \{a_{i,n}, b_{i,n}\}$ であることから、Lehto-Virtarnen [11] の pp. 69-70, 定理 4.1, 4.2 と同様の議論により、列 $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ は球面上の非定値 K_0-擬等角写像 w_0 にコンパクト集合上一様収束する部分列 $\{w_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ を含む。$w_n G_{\psi_n} w_n^{-1} = G_n$ であったので、$w_0 G_{\psi_0} w_0^{-1} = G_0$ である。即ち G_0 は G_{ψ_0} と擬等角同型なので、以上より、G_0 は潜在的放物型元を持たない全退化群である。 □

Figure 4.2: T1 T1 T2 is accidentally parabolic



trace T1 = 2+i
trace T2 = 3
trace T1T2 = 2-i
trace [T1,T2]= -2

eps = 0.001
bound = 50
Starting tags =
Ending tags =

cf. Limit sets of free two-generator kleinian groups

17 David Mumford, Curt McMullen, and David J. Wright

Complete Version ~~1.00~~ .15: April, 1991

参考文献

[1] W. ABIKOFF, On the boundary of Teichmüller spaces and Kleinian groups III, Acta Math. 134 (1975), 211-236

[2] L.V.AHLFORS, Conformal invariants, McGraw-Hill, NewYork, (1973)

[3] L. BERS, Finite dimensional Teichmüller spaces and generalizations, Bull. A.M.S. (New Series) 5 (1981), p.131-172.

[4] L. BERS, On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups: I, Ann. of Math., Vol 79 (1970), p.570-600.

[5] L. BERS, Nielsen extensions of Riemann surfaces, Ann. Acad. Aci. Fenn., Vol 2 (1976), p.17-22.

[6] P. BUSER, Geometry and spectra of compact Riemann surfaces, Progress in Mathematics Vol 106 (1992), Birkhäuser.

[7] 伊藤学, 今吉洋一, 小森洋平, 宮地秀樹, 山本寛, Riemann 面とその変形空間の接円座標およびモジュライ空間, 研究集会資料集 (1998).

[8] S. P. KERCHOFF, The Nielsen realization problem, Ann. of Math. 117 (1983) 235-265.

[9] I. KRA, Horocyclic coordinate for Riemann surfaces and Moduli spaces I: Teichmüller and Riemann spaces of Kleinian groups, Jour. of Amer. Math. Soc. Vol 3 (1990), p499-578.

[10] H.SHIGA AND H.TANIGAWA, Grunsky's inequality and its applications to Teichmüller spaces, Kodai. Math. J. (1993), 361-378

[11] . O. LEHTO AND K.I. VIRTANEN, Quasiconformal mapping in the plane 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin Heigeberg Newyork, (1973).

[12] 須川敏幸, 正則関数の単葉性条件と擬等角拡張性, Topics in Complex Analysis, (1995)

[13] 谷口雅彦, 松崎克彦, 双曲多様体とクライン群, 日本評論社 (1993)

[14] B. MASKIT, On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups:II, Ann. of Math.,Vol 91 (1970), p.607-639.

[15] B. MASKIT, Decomposition of certain Kleinian groups, Acta. Math. 130 (1973),p.243-263.