数理解析研究所講究録
1065 巻 1998 年 163-177

WEB 幾何学：なぜ (DOUBLE)TRANSLATION 面からリーマン面がでてくるか？

中居　功

北海道大学　　数学教室

BLSCHKE SCHOOL により WEB 幾何学が発達するきっかけとなった LIE の発見, それに続く POINCARE, WIRTINGER の仕事を紹介する。

Translation surface とはつぎのようにして得られる曲面のことを言う。二つの空間曲線 (parametric curves) $C_1(u_1), C_2(u_2) : \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}^3, *$ を

$$C_1(u_1) = (f_1(u_1), f_2(u_1), f_3(u_1)),$$
$$C_2(u_2) = (g_1(u_2), g_2(u_2), g_3(u_2))$$

とする。　このとき写像 $C_1 + C_2 : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ の像 $S = Im(C_1 + C_2)$ は次のパラメーター表示をもつ曲面となる。

$$x = f_1(u_1) + g_1(u_2),\ y = f_2(u_1) + g_2(u_2),\ z = f_3(u_1) + g_3(u_2).$$

ここで C_1, C_2 の像はともに直線ではないと仮定しよう。("そうでない" とき S は単純なものになってしまう。) この曲面は u_1-曲線 $C_1 + * : C_1(u_1) + C_2(*)$, u_2-曲線 $C_2 + * : C_1(*) + C_2(u_2)$ による２つの葉層構造 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ を持つ。

明らかに曲面 S は次の方程式をみたす。

$$\partial^2 x/\partial u_1 \partial u_2 = 0, \qquad \partial^2 y/\partial u_1 \partial u_2 = 0, \qquad \partial^2 z/\partial u_1 \partial u_2 = 0$$

この曲面を $z = F(x, y)$ と表わして上の３番目の方程式を x, y で書き直すと

$$f_1' g_1'\ F_{xx} + (f_1' g_2' + f_2' g_1')\ F_{xy} + f_2' g_2'\ F_{yy} = 0$$

となる。もう少しのべると Gauss map $(F_x, F_y) : S \to \mathbb{C}^2 (\mathbb{P}^2$ の chart とおもう) は generic な点で非特異であり S 上の局所座標と思ってよいので f_1', f_2', g_1', g_2' は F_x, F_y の関数として書け、次のタイプの Monge-Amp ere 微分方程式となる。

$$P(F_x, F_y)\ F_{xx} + Q(F_x, F_y)\ F_{xy} + R(F_x, F_y)\ F_{yy} = 0$$

(これはムリヤリ書き直しているようにみえるがこの方程式は後に Lie による Double translation surface の分類で基本的役割をしている。)

Lie の仕事を説明するために上で触れた Gauss map についてもう少し詳しく述べよう。u_i-曲線の Gauss map

$$C_i' : S \to \mathbb{P}^2$$

を

$$C_1'(u_1) = [f'_1(u_1) \colon f'_2(u_1) : f'_3(u_1)],$$
$$C_2'(u_2) = [g'_1(u_2) : g'_2(u_2) : g'_3(u_2)],$$

と定義し Gauss map　$Gauss : S \to \mathbb{P}^{2\vee}$ を

$$Gauss(p) = \{S \text{ の } p \text{ での接ベクトルを } \mathbb{P}^2 \text{ の元とみなしたもの }\}^\vee$$

と定める。言い替えると $p = C_1(u_1) + C_2(u_2) \in S$ としたとき $Gauss(p)$ は $C_1'(u_1), C_2'(u_2)$ で張られる射影直線 (の dual) である。

Gauss map はクラメールの公式から

$$Gauss(p) = [\det \begin{vmatrix} f_2' & f_3' \\ g_2' & g_3' \end{vmatrix} : -\det \begin{vmatrix} f_1' & f_3' \\ g_1' & g_3' \end{vmatrix} : \det \begin{vmatrix} f_1' & f_2' \\ g_1' & g_2' \end{vmatrix}]$$

と表わせる。

S. Lie (1842-1899) は 1882 年の論文で Double translation surface を研究した。ここで Double translation surface とは、２通りの translation 構造を持つ曲面のことをいう。　つまり４つの空間曲線 $C_1, \ldots, C_4 \subset \mathbb{C}^3$ を用いて

$$S = Im(C_1 + C_2) = Im(C_3 + C_4)$$

と書けるものを言う。ここでは二つの構造 $C_1 + C_2, C_3 + C_4$ が一般の位置にあることを仮定しなくてよい。さて Lie の結果は以下のものである。

定理 0.1 Lie (1882). *$S \subset \mathbb{R}^3$ を double translation surface とする。このとき Gauss map C_i' の像はすべて一つの $\mathbb{P}^2$ の４次の代数曲線にふくまれる。*

この定理は後で証明する。この定理により Translation surface を生成する空間曲線を忘れてしまってもそれらは ” 特別な場合 ” 以外は一意に決まることを言っている。その特別なものが面白いのだが... 。

後でわかることだが、

命題 0.2.　この４次の代数曲線は既約である。しかもそれは種数３、次数４の標準平面曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ であり、曲面 S はその曲線のヤコビアンのテータ因子と自然に同一視できる。

命題 0.3.　*Gauss map $S \to \mathbb{P}^{2\vee}$ は６枚の sheet をもつ branched covering であり、その分岐集合は C の射影双対曲線である。*

1.　射影空間曲線の双対 Projective(Linear)Web.

ここでは 一般に代数的な degree d の空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ にたいして双対空間 $\mathbb{P}^{n\vee}$ 上の d-web 構造 $\mathcal{W}_C$ について説明する。

定義 1.1. C の点 x の双対超平面を $x^\vee = H_x$ と書く。H_x の族を $\mathcal{W}_C = \{H_x, x \in C\}$ と書き、C の双対 *Web* または単に *Algebraic Web* という。

まずはじめに射影幾何の双対性より

$$p \in H_x = x^\vee \Longleftrightarrow p^\vee \ni x$$

であるから p 通る H_x の数は $p^\vee \cap C$ の元の (もちろん重複度をこめた) 個数、つまり曲線 C の次数に等しい。

$$p^\vee \cap C = \{x_1, \ldots, x_d\}$$

で x_i はすべて異なるとしよう。 このとき交点 x_i は重複していないので、そこで C と $p^\vee$ は横断的に交わるので交点 $x_i \in C$ は p のまわりで定義された C に値をとる非特異な関数 $x_i(p)$ とみなすことができる。 従って p のまわりで超平面 $x_i^\vee = H_{x_i} = \{x_i(p) = x_i\}$ により非特異な葉層 $\mathcal{F}_i$ が定義される。$x_1, \ldots, x_d$ が一般の位置にあるとき葉層 $\mathcal{F}_i$ は一般の位置となる。

葉層 $\mathcal{F}_i$ に関して次の興味深い結果が知られている。

定理 1.2 Nakai. $C, C' \subset \mathbb{P}^n$ を非退化 *(*超平面に含まれない*)* で既約な空間曲線、h を $\mathbb{P}^n$ の位相同形写像とする。h が向き付けを保ち *(*逆にしていて*) Web* 構造 $\mathcal{W}_C$ を $\mathcal{W}_{C'}$ に移しているとき、言い替えると $h(H_p) = H_{\phi(p)}, p \in C$ となる写像 $\phi : C \to C'$ があるとする。このとき C または C' が次数 $n+1$ の楕円曲線でなければ、g および h, ϕ は正則同形 *(*反正則同形*)* である。

次数 d の空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ の双対 Web $\mathcal{W}_C$ は $\mathbb{P}^n$ の双対空間 $\mathbb{P}^{n\vee}$ 上に定義されたが、双対空間は C 上の Linear system としてもみなせる。ここで Linear system について少し説明しておく。

C の超平面 H による断面 $C \cap H$ は d 個の点からなる。

$$C \cap H = \{x_1, \ldots, x_d\}$$

これを次のような形式的な C の点の和

$$D = x_1 + \cdots x_d$$

と書くとき、D を C 上の (正の) 因子と呼ぶ。このようにして得られる因子は次のような面白い性質をもっている。

$$D' = C \cap H'$$

を別の超平面 H' により定義される因子とする。H, H' を $\mathbb{C}^n$ 上で定義する 1 次式をそれぞれ f, g とすると g/f は分母、分子の次数が同じなので $\mathbb{P}^n$ 上の有理関数を定義し C 上の有理形関数に制限する。この関数の因子 (=(g/f)= 0 点集合ー ∞ 点集合) は明らかに

$$(g/f) = D' - D$$

となる。またこのような有理形関数は定数倍をのぞいてただ一つ定まる。一般に 2 つの因子 D, D' に対して有理関数 h が存在して $(h) = D' - D$ となるとき D, D' を線形同値と言う。この言葉を使うと $\mathbb{P}^{n\vee}$ は D と線形同値な因子からなる集合とみなせる。また有理形関数の言葉でいうと

$$(h) + D \geq 0 \qquad (\text{つまり } h \text{ の } 0 \text{ 点集合が } D)$$

となる有理形関数 h のなす射影空間の部分空間と同一視できる。このような有理形関数 h 全体のなす射影空間を $\mid D \mid$ とかき complete linear system とよぶ。これだけで分かったとは思えないが、いいたいことは

$$(\text{正の因子}) \in \mid D \mid \Longleftrightarrow \text{超平面による断面}$$

であるということ。このとき上の定理 1.2 は次のように言い替えられる。

定理 1.3. C, C' は楕円曲線でないとし、D, E を上のような C, C' の因子とする。$\phi : C \to C'$ を向き付けを保つ *(逆にする)* 位相同形で

$$\phi(\mid D \mid) = \mid E \mid$$

となるとき、言い替えると D と線形同値な因子 $D' = x_1 \cdots + x_d \in \mid D \mid$ に対して

$$\phi(D') = \phi(x_1 \cdots + x_d) = \phi(x_1) + \cdots + \phi(x_d)$$

は E と線形同値となるとき ϕ は正則同形 *(反正則同形)* である。

2 積分写像と標準曲線.

最も重要な空間曲線は標準曲線 (Canonical curve) である。 標準曲線 $C_g \subset \mathbb{P}^{g-1}$ の双対 $(2g-2)$−Web $\mathcal{W}_C$ を考察しよう。まず標準曲線の作り方からはじめる。C_g を種数 g のリーマン面とする。C 上には g 個の線形独立な正則 1 一形式 $\omega_1, \ldots, \omega_g$ があることが知られている (例えば Riema nn-Roch 定理による)。 いま積分写像 $\phi : C \to \mathbb{C}^g$ を次のように定義する。

$$\phi(x) = (\int_{\text{base point}}^{x} \omega_1, \ldots, \int_{\text{base point}}^{x} \omega_g)$$

もちろん上の積分は base point からの積分経路によっているので C のサイクル $c \in \pi_1(C)$ に沿った ω_i の積分 $\int_c \omega_i$ つまり周期のぶんだけ ambiguity が残る。つまり ϕ の行き先はヤコビアン $J_C = \mathbb{C}^g/\Lambda$ とするのが正しい定義です。ここで Λ は周期ベクトル $(\int_c \omega_1, \ldots, \int_c \omega_g) \in \mathbb{C}^g$ の集合で $\mathbb{C}^g$ の部分群となる。この積分写像の像をやはり $C \subset \mathbb{C}^g/\Lambda$ とかく。

このヤコビアン J_C の中にはテータ因子と呼ばれる余次元 1 の部分多様体 Θ が棲んでいる。これはヤコビアン上のリーマンのテータ関数の 0 点集合だが、ある別の定義によれば、Θ は

$$\phi(x_1) + \cdots + \phi(x_{g-1}), \qquad x_i \in C$$

の集合で言い替えると C の $g-1$ 個の $\mathbb{C}^g$ のベクトル集合としての和

$$\Theta = C + \cdots + C$$

として書け translation surface の構造を持つ。つまり Self translation surface である。ここでは $g-1$ 本の空間曲線はそれぞれ $x_1, \ldots, x_{g-1} \in C$ によりパラメトライズされ $g-1$-次の C の因子

$$D = x_1 + \cdots + x_{g-1} \quad \in C^{\otimes(g-1)}$$

が Θ の局所座標となる。

次に標準曲線 $C \subset \mathbb{C}^{g-1}$ を定義する。標準埋め込み写像 $\psi : C \to \mathbb{P}^{g-1}$ は

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \{\text{holomorphic 1-form } \omega \;\; \text{s.t. } \omega(x) = 0\}^{\vee} \\ &= [\omega_1(\partial x) : \cdots : \omega_g(\partial x)]\end{aligned}$$

と定義される。　正則１一形式 ω を

$$\omega = a_1\omega_1 + \cdots + a_g\omega_g$$

と書いておくと、条件 $\omega(x) = 0$ は

$$\omega(x) = a_1\omega_1(x) + \cdots + a_g\omega_g(x) = 0$$

となる。従って射影双対の定義に従って

$$\psi(x) = [\omega_1(x) : \cdots : \omega_g(x)]$$

となる。この連比の意味は C の余接線の元としての比、または言い替えると x を C の局所座標とすると

$$\psi(x) = [\omega_1(\partial x) : \cdots : \omega_g(\partial x)]$$

(この写像は、かってな C 上の直線族 の正則切断の線形空間: Linear system に対して同様に定義できる。)

C 上の正則１一形式の０点集合は C の標準因子と呼ばれ K_C とあらわされる。(もちろん C 上にたくさんの正則１一形式があるので、たくさんの見かけ上集合として異なる標準因子がある。) 上の ψ の定義から C の標準因子は標準曲線 $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ の超平面による断面 (もちろん multiplicity も込めて考える) に１対１に対応することがわかる。ここで標準曲線 は次数 $2g-2$ を持つことを注意しておく。

(あるリーマン面 C が超楕円的であるとは C が射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の２重被覆となっていることを言う。このとき標準埋め込み写像も次数 $g-1$ の正規有理曲線への２重被覆に退化してしまい Θ 上の $2g-2$-Web 構造も $g-1$-Web に退化する。)

以前に見たように二つの超平面による断面は因子として線形同値である。これは次のようにしてもわかる。ω, ω' を２つの正則１一形式、その０点集合をそれぞれ D, D' とする。ω, ω' を局所的に $f(z)dz, g(z)dz$ とかくと $\omega'/\omega = f/g$ となるので、比 ω'/ω は C 上の有理形関数となりその因子は

$$(\omega'/\omega) = D' - D$$

である。

かってに与えた generic な $g-1$ 個の C の点集合 D_+ は標準曲線上で考えると $\mathbb{P}^{g-1}$ の超平面 H を張り D_+ をふくむ $K = H \cap C$ をきめる。この $K = H \cap C$ のうちで D_+ 以外の点は $g-1$ 個ありその点集合を

$$D_- = \{x'_1 + \cdots + x'_{g-1}\}$$

言い替えれば

$$D_+ + D_- = K$$

となるようにする。このとき対応

$$D_+ \Longleftrightarrow D_-$$

は明らかに1対1である。このことからヤコビアンのテータ因子は D_+ のほかに D_- によってもパラメトライズされているとみなすことができ、各座標 $x'_1, \dots, x'_{g-1}$ にパラメトライズされる曲線により $g-1$ 個の1次元葉層構造 $\mathcal{F}_g, \dots \mathcal{F}_{2g-2}$ を持つことがわかる。以下でこれら x_i-曲線は平行移動で一意であること、つまり

Θ は D_- によっても ある種の Translation 構造をもつ

ことを示す。

3. Abelの定理.

$\mathbb{C}^n$ の Translation surface 構造は余次元1の $n-1$–Web 構造

として捉えられることを注意する。Translation surface S を

$$S = C_1 + \dots + C_{n-1}$$

と書いたとき、S は $i = 1, \dots, n-1$ にたいして

$$C_1 + \dots + * + \dots + C_{n-1},\ * \in C_i$$

を葉 (leaf) とする余次元1の葉層構造を持つ。従って S が double translation s urface であるとき

S は $2n-2$–web 構造 (of codim 1) を持つ。

これを定義する1一形式について考察する。

一般に $C \subset \mathbb{P}^n$ を次数 d、種数 g の代数曲線とし ω を C 上の1一形式とする。C の超平面 H_p による断面を

$$C \cap H_p = \{x_1(p), \dots, x_d(p)\}$$

と書く。$C \cap H_p$ が非特異なとき各 $x_i(p) \in C$ は局所的に p の解析関数となる。

双対空間 $\mathbb{P}^{n\vee}$ 上の1形式 $Trace(\omega)$ は以下のように定義される。

$$Trace(\omega) = \sum_{i=1,\dots,d} x_i^* \omega$$

ω が正則であるとき $Trace(\omega)$ も正則となるのを見るのはそれほど難しくない (これが Abel の定理の Abel により証明された部分の特別な場合らしい)。 射影空間上の正則1一形式は0以外にないことから

$$Trace(\omega) = 0$$

を得る。

(dz は $u = 1/z$ とすると $dz = -z^2 dz = -1/u du$ とかけるので $z = \infty \in \mathbb{P}$ で2位の極を持つ。ω を $\mathbb{P}^1$ 上の解析的1一形式とすると ω/dz は $\mathbb{P}^1$ 上の解析的関数となり f/g (f, g は同次) とかける。これから ω の因子は $(\omega) = (dz) = -2$ となる。)

Web 幾何学の立場から上の等式を Abel 方程式とよぶ。 この方程式はリーマン面 C から射影空間 $\mathbb{P}^n$ への (imbedding でなくても) 解析的写像に対して成り立つことを注意しておく (値域の双対空間 $\mathbb{P}^{n\vee}$ 上に $Trace$ が定義される)。

$D = x_1 + \cdots + x_d$, $D' = y_1 + \cdots + y_d$ を C 上の次数 d の因子とする。もう一度定義を思い出すと D, D' が線形同値とは、ある C 上の有理関数 f があり

$$D' - D = (f) = f \text{ の 0 点集合 } - f \text{ の極集合}$$

となることを言う。$f : C \to \mathbb{P}^1$ とみたとき D, D' はともにこの写像 f の $0, \infty$ の逆像である。(値域の $\mathbb{P}^1$ はそれの双対 $\mathbb{P}^1$ と同一視できるので) 上の等式から

$$\sum_{i=1,\ldots,d} \int^{x_i} \omega - \sum_{i=1,\ldots,d} \int^{x'_i} \omega = \sum_{i=1,\ldots,d} \int_{x'_i}^{x_i} \omega$$

Fubini 型の公式より

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty Trace(\omega) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることがわかる。次の Abel の定理は逆にこれが線形同値を特徴ずけることを主張している。

定理 3.1 Abel の定理. つぎの条件は同値。
(1)

$$\sum_{i=1,\ldots,d} \int_{x'_i}^{x_i} \omega \equiv 0 \quad mod \quad \Lambda$$

がすべての正則 1 一形式 ω に対して成り立つ。
(2) $D = x_1 + \cdots + x_d$ と $D' = x'_1 + \cdots + x'_d$ は線形同値。

4. Poincaré の仕事.

Abel の定理の応用として以前に約束した, ヤコビアンの Θ が double translation 構造を持つことを示す。因子 D_+, D_- の作り方から $K = D_+ + D_-$ は標準因子で、Abel の定理から

$$\int^{x_1} \omega_i + \cdots + \int^{x_{g-1}} \omega_i + \int^{x'_1} \omega_i + \cdots + \int^{x'_{g-1}} \omega_i$$

は各 $i = 1, \ldots, g$ に対して Θ 上のパラメーター D によらない定数となる。積分の base point を適当に選びそこから積分を解析接続することで

$$\int^{x_1} \omega_i + \cdots + \int^{x_{g-1}} \omega_i + \int^{x'_1} \omega_i + \cdots + \int^{x'_{g-1}} \omega_i = 0$$

と仮定してよい。 さてこれを

$$\int^{x_1} \omega_i + \cdots + \int^{x_{g-1}} \omega_i = -\int^{x'_1} \omega_i - \cdots - \int^{x'_{g-1}} \omega_i$$

と書く。この左辺は $\Theta \subset \mathbb{C}^g$ の $i-$ 番目の座標なので Θ は $\mathbb{C}^g$ の中の $x'_i \in C$ によりパラメトライズされた x'_i-曲線

$$C_i(x'_i) = (-\int^{x'_i} \omega_1, \ldots, -\int^{x'_i} \omega_g) \in \mathbb{C}^g$$

からなる translation 構造を持つことがわかる。従って Θ は double translat ion surface である。

Θ が double translation 構造を持つことがわかったところで Lie の定理のアイデアをここでも適用してみると面白い。まず x_i-曲線の Gauss map は

$$\psi(x_i) = [\omega_1(x_i) : \cdots : \omega_g(x_i)]$$

また x'_i-曲線の Gauss map も

$$\psi(x'_i) = [\omega_1(x'_i) : \cdots : \omega_g(x'_i)]$$

となりこれらは標準埋め込み $\psi : C \to \mathbb{P}^{g-1}$ による x_i, x'_i の像、つまり標準曲線に他ならない。Θ の Gauss map はこれらのベクトルで張られる $\mathbb{P}^{g-1}$ の超平面の射影双対である。その超平面を

$$a_1\omega_1(x_i) + \cdots + a_{g-1}\omega_{g-1}(x_i) = 0,$$

または

$$a_1\omega_1(x'_i) + \cdots + a_{g-1}\omega_{g-1}(x'_i) = 0$$

とかくとそれは $[a_1 : \cdots : a_{g-1}]$ あるいは x_i, x'_i で消える 1 一形式

$$\omega = a_1\omega_1 + \cdots + a_{g-1}\omega_{g-1} \in \mathbb{P}^{g-1}$$

に 1 対 1 に対応する。

5 Torelli の定理 $+\epsilon, \epsilon > 0$.

ここで Double translation 構造に直接によらずに Θ からリーマン面 C を絞り出す方法を考えよう。x_i-curve, x'_i-curve の接ベクトルが Θ の p での接平面を張るとき、あるいは言い替えれば $Gauss(p)$ の双対超平面 H_p と標準曲線の交わりが H_p の中で非退化であるとき Θ は p で非特異である。また Θ の特異性 (例えば Tangent cone) はその退化の様子 (Special divisor の deformation) で記述される。非特異な点 p での Gauss map の特異性は H_p と標準曲線の交わりの特異性で記述される。

まずはじめに次を証明する。

定理 5.1(Torelli?). *Gauss map* の制限 $Gauss : \Theta \to \mathbb{P}^{g-1\vee}$ の Θ での分岐点 *(* 特異点 *)* 集合は

$$\{\phi(x_1) + \cdots + \phi(x_{g-1}) \mid \text{ある } i \neq j \text{ にたいして } x_i = x_j\},$$

また $\mathbb{P}^{g-1}$ での分岐点集合は

$$\{p \in \mathbb{P}^{g-1\vee} \mid p^\vee \cap C \mid \text{は特異}\} = C \text{ の } \textit{Projective dual variety}$$

である。

証明. $p \in \mathbb{P}^{g-1\vee}$ とし $H_p \cap C = x_1 + \cdots + x_{2g-2}$ と書こう。交わりが非特異であるとき各 x_i は点 p の非特異な正則関数であり x_i を適当にうまく動かすことで点 p は任意に動ける。従って Gauss map は点 p で最大の階数を持つ。$H_p \cap C$ が特異なときこの p の双対超平面は自由に動けない。$x_1, \ldots, x_{g-1}$ が H_p を生成するとき $\mathbb{P}^{g-1\vee}$ の p での接平面は、$\mathbb{P}^{g-1\vee}$ を $\mathbb{P}^{g-1}$ の超平面の集合 (グラスマン) とみなしたとき、$x_i, i = 1, \ldots, g-1$ での H_p への法方向のベクトルで生成される。

例えば $x_1 = x_2$ であるとき $x_1, \ldots, x_{g-1}$ を適当に (無限小に) 動かしても $x_1 = x_2$ では標準曲線の接線は H_p に含まれてしまうので H_p の $x_1 = x_2$ での法方向のベクトルは張らない。従って

$$\text{corank } d\, Gauss(p) \geq 1$$

である。これより Gauss map の特異値集合は標準曲線の接超平面の双対全体、つまり標準曲線の射影双対多様体である。射影幾何の再帰性 (bi-duality) により特異値集合の射影双対が標準曲線、つまり埋め込まれたリーマン面 C である。これでよく知られた Torelli の定理の証明を終わる。

一般に余次元 1 の多様体の射影双対は余次元 1 となり、それが曲線となるのはきわめて稀である。そうなるための条件も Monge-Ampere 方程式でかける。

上の命題の証明のなかの議論に空間曲線の Tangent Scroll の基本的結果を応用することで、もっと一般に $x_1 = \cdots = x_i$ が C で generic であるとき

$$\text{Gauss map の } p \text{ を通る fiber は } i\text{– 重点}$$

である。またもっと強く

$$\text{Gauss map は } p \text{ で } A^{i-1}\text{-type の stable map である。}$$

であることがわかる。

$$A^i(Gauss) = \{p \in \Theta \mid Gauss \text{ は } p \text{ で } i\text{– 重の分岐をする}\}$$

とすると A^i は Θ のフィルトレーションをあたえる。とくに $i = g-2$ のとき A^{g-2} は曲線となる。これは $g-1$ 個のベクトルの和集合

$$(g-1) \cdot \phi(x) = \phi(x) + \cdots + \phi(x)$$

に一致し、その Gauss map による像は標準曲線の (H.Weyl によって定義された) 双対射影曲線 (strict dual) であることも簡単な Wronskian を使った議論でわかる。我々は次の定理に導かれた。

定理 5.2(Torelli + $\epsilon, \epsilon > 0$). $\Theta \subset \mathbb{C}^g, C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ を上のものとする。

$$Gauss(A^1(Gauss)) = \textit{projective dual of the canonical curve } C \subset \mathbb{P}^{g-1\vee}$$
$$Gauss(A^{g-2}(Gauss)) = \textit{strict projective dual of the canonical curve } C \subset \mathbb{P}^{g-1\vee}$$

この定理は Θ の"変曲点集合"として C が埋め込まれていることを主張している。

6. Web の定義と Abel 方程式.

さて一般に Web を定義する。M を n-次元多様体とする。M 上の余次元 c の $d-$Web とは、d 個の余次元 c の葉層 $\mathcal{F}_i, i=1,\ldots,d$ の重ね合せ $\mathcal{W}=(\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_d)$ をいう。通常 $\mathcal{F}_i$ はすべて非特異で一般の位置にあると仮定するが Lie-Poincaré の仕事を含むために、また常微分方程式への応用をみこんで緩やかな特異性も許したい。しかしながらいま簡単のために非特異で一般の位置とする。 また余次元 1 の場合のみを考える。

定義 6.1. 余次元 c の $d-Web$、$\mathcal{W}=(\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_d)$、$\mathcal{W}'=(\mathcal{F}'_1,\ldots,\mathcal{F}'_d)$ が同型であるとは M の正則同型 h があり $h(\mathcal{F}_i)=\mathcal{F}'_i$ となることを言う。

$d\leq n$ のときは 余次元 1 の $d-$Web は座標関数 x_i により定義された $\mathbb{C}^n$ の Projective Web、 $\mathcal{W}=(\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_d)$、$\mathcal{F}_i=\{x_i=const\}$ に同型となることはすぐにわかる。 従って $n+1\leq d$ の場合が局所的で非特異のときの研究の対象となる。

Web 幾何学では主に局所的な構造をあつかう : Algebrization theorem (定理 21.1) などに見られるように局所的な構造が大域的な代数的構造までも決定してしまう。

さて葉層 $\mathcal{F}_i$ は多様体あるいは多様体の開領域で定義された正則関数 u_i によって定義されているとしよう。

定義 16.1 Abel 方程式. 次の形の等式

$$f_1(u_1)du_1+\cdots+f_d(u_d)du_d=0$$

を *Web* $\mathcal{W}$ の *Abel* 方程式と呼ぶ。

例えば double translation surface $S=C_1(u_1)+\cdots+C_{n-1}(u_{n-1})=C'_1(v_1)+\cdots+C'_{n-1}(v_{n-1})$ を、 u_i,v_i を定義 level 関数とする $2n-2-$Web とみなしたとき明らかに次の関係式が成り立つ

$$C_1(u_1)+\cdots+C_{n-1}(u_{n-1})=C'_1(v_1)+\cdots+C'_{n-1}(v_{n-1})$$

これを微分形式でかくと

$$dC_1(u_1)du_1+\cdots+dC_{n-1}(u_{n-1})du_{n-1}-dC_1(v_1)dv_1-\cdots-dC'_{n-1}(v_{n-1})dv_{n-1}=0$$

という Abel 方程式になる。

定義 6.2. $\{1,\ldots,d\}$ の部分集合 $\{i_1,\ldots,i_s\}$ に対して

$$f_{i_1}(u_{i_1})du_{i_1}+\cdots+f_{i_s}(u_{i_s})du_{i_s}=0$$

が成り立つとき *Abel* 方程式は可約であるといい、そうでないとき既約であるという。

定義 6.3. 自明 *(=すべての項が 0)* でない *Abel* 方程式全体のなす線形空間を $\mathcal{A}$ と書き

$$dim\ \mathcal{A}=rank\ (\mathcal{W})$$

という。

次数 d, 種数 g の代数的空間曲線 $C\subset\mathbb{P}^n$ の双対 d-Web $\mathcal{W}_C$ に対しては rank $\geq g$ である。また Lie-Darboux-Griffiths の定理によりリーマン面 C 上の局所的 1 一形式 $f_i(u_i)du_i$ は C 上で定義された共通の正則 1 一形式に拡張する。従って

$$\text{rank }(\mathcal{W}_C)=g$$

である。Castelnuovo(1864-1952) により次数 d をきめたときの種数 g の最大値は次の Castelnuovo bound であることが知られている。

定理 6.4(Castelnuovo).

$$\pi(d,n)=(d-n)+(d-2n+1)+(d-3n+2)+\cdots+(d-kn+k-1)$$

ここで k は $d-1\geq k(n-1)$ となる最大の自然数。とくに $n=2$(平面曲線) の場合は

$$\pi(d,2)=\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

である。

これは次の定理により拡張される。

定理 6.5(Chern(1978)). $\mathbb{C}^n$ の *codim*= 1 の *d-Web* にたいし

$$rank(\mathcal{W})\leq\pi(d,n)$$

が成り立つ。

定義 6.6 Linearization と Algebrization. $\mathcal{W}=(F_1,\ldots,F_d)$ を余次元 1 の *d*− *Web* の *germ* とする。 正則同形の *germ*、f があり $f(F_i)$ の *leaf* がすべて超平面となるとき、つまりある正則曲線の *germ* $C_i\subset\mathbb{P}^n$ 我あって $f(F_i)=\{H_x=x^\vee,x\in C_i$ となるとき、W は *Linearizable* であるという。*Linear d*− *Web* の *germ*, $\mathcal{W}_C, C=(C_1,\ldots,C_d)$, C_i は $\mathbb{P}^n$ の正則曲線の *germ*, が与えられたとする。このとき $C_1,\ldots,C_d$ はひとつの m− 次元代数曲線のなかにふくまれるとき $\mathcal{W}_C$ は *Algebrization* できるという。

ドグマチックな大問題. いつ *Linearization* や *Algebrization* できるか？

つぎの Lie-Wirtinger の結果は maximal rank な (Castelnuovo bound を attain する)Web にたいしてはこれらの問題は肯定的であることを示唆している。

さてリーマン面のヤコビアンのなかに棲む Θ 上には $2g-2$-Web 構造があった (§13)。この場合の Castelnuovo bound は

$$\pi(2g-2,g-1)=g$$

である。Wirtinger は次の定理を証明した。

定理 6.6 S.S. Chern Lie-Wirtinger theorem Monatshefte Math.Phys.46,384-431)idea は Poincaré によっている). $W=(\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_{2g})$ を余次元 1 の $\mathbb{C}^g$ で定義された $2g$-*Web* の芽とする。*rank* $=g+1$ ならば *Web* は *Projectivize* できる : $\mathbb{C}^n$ の葉がすべて超平面からなる *Web* に解析的に同型となる。

このアイデアは Chern-Griffiths によってさらに一般化されている。

7. Darboux-Griffiths の仕事.

Wirtinger の仕事を (おそらく) うけて Darboux は次の定理を示した。

定理 21.1(Lie-Darboux-Griffiths). *rank* ≥ 1 の余次元 1 の既約な *Linear Web* は代数化できる。

証明. 簡単のために $n=2$ の場合に証明する。$q=[-1:a:b]\in\mathbb{P}^2$ のまわりで d-Web $\mathcal{W}$ が定義されているとする。Web はすでに線形化されているので $\mathcal{W}$ は双対射影平

面の本の滑らかな q の双対直線 $\ell : x = ay + b$ (ここで (x, y) は双対射影平面の座標) と横断的に交わる曲線 $C_1, \ldots, C_d$ から定まる双対 Web $\mathcal{W}_C$ であるとしてよい。 もう一度定義を思い出すと $\mathcal{W}_C$ は d 個の１次元葉層 $\mathcal{F}_i$ の組で $\mathcal{F}_i$ は C_i の点の双対直線の族である。 $q^\vee$ と C_i の横断性より交点 $p_i = p_i(q)$ は q の正則関数である。

いま C_i 上で定義された１一形式を ω_i とし、双対平面に引き戻された１一形式 $p_i^*\omega_i$ も ω_i とかく。いま

$$p_1^*\omega_1 + \cdots + p_d^*\omega_d = 0$$

が成り立つとする。証明のプログラムは次のとおりである。

1 ω_i は ℓ の周りで定義された C_i に極をもつ有理形２一形式 Ω の residue として書く

2 Ω が射影平面全体に解析的に拡張する。

3 Ω の residue ははじめの ω_i の拡張であり ω の極は C_i を繋ぐ代数曲線である。

4 Ω の極 C は次数 d の代数曲線である。

8. Part 1 Darboux のアイデアによる.

f_i を C_i の定義式とし

$$\omega_i = \frac{g_i}{f_i'}dx = \mathrm{Res}\ (\frac{g_i}{f_i}dx \wedge dy)$$

とかく：ここで $f_i' = \partial f_i / \partial y$ また g_i / f_i' は C_i 上の関数つまり x の関数である。Res は f_i の y_i での微分だけできまるので

$$\omega = \mathrm{Res}\ \frac{g_i}{f_i'(y - y_i)}\ dx \wedge dy$$

とも書けることに注意する。

$$\Omega = \Sigma\ \frac{g_i}{f_i'(y - y_i)}\ dx \wedge dy$$

と定義する。ただしこの総和は直線 ℓ と C_i との交点 p_i すべてにわたってのものである。これは定義により a, b, y-空間の２-形式である。しかしそれは見かけ上であり、実は $ay + b = x$ と y の２-形式であることがわかる。もちろんそれには次の (定理の) 仮定をもちいる。

$$\Sigma\ \omega_i = \Sigma\ \frac{g_i}{f_i'}dx = 0$$

$\frac{g_i}{f_i'}$ は C_i 上の関数だから C_i 上の関数 t_i をつかって $\frac{g_i}{f_i'} = \partial_b t_i$ とかくと

(i) $$\Sigma\ \frac{g_i}{f_i'} = \quad \Sigma \quad \partial_b t_i = 0$$

である。t_i は C_i 上の関数なので

$$dt_i = t_{ix}\ dx + t_{iy}\ dy$$

また $x = ay + b$ より $dx = yda + ady + db$ なので

$$dt_i = t_{ix} \quad y_i da + (t_{ix} a + t_{iy}) dy + t_{ix} db$$

従って a で偏微分すると ($dy = 0$ だから)

(*) $$\partial_a\ t_i = y_i\ \partial_b t_i = y_i\ \frac{g_i}{f_i'}$$

を得る。さて (i) 式を a で偏微分すると

(ii) $$\Sigma y_i\ \partial_b t_i = \Sigma y_i\ \frac{g_i}{f_i'} = 0$$

をえる。さて

(iii) $$\Sigma\ \frac{g_i}{f_i'(y - y_i)} \quad = \Sigma \frac{\partial_b t_i}{y - y_i}$$

が x, y の関数であることをみるのには微分作用素

$$\partial_a - y\ \partial b$$

での微分が 0 であることを示せばよい (iii) より

$$\begin{aligned} y\partial_b\ \Sigma\ \frac{g_i}{f_i'(y - y_i)} &= \Sigma\partial_b \frac{y\ g_i}{f_i'(y - y_i)} \\ &= \Sigma\partial_b \frac{y_i\ g_i}{f_i'(y - y_i)} \end{aligned}$$

上のトリック (*) により

$$\begin{aligned} &= \Sigma\partial_b \frac{\partial_a t_i}{y - y_i} \\ &= \quad \Sigma \frac{\partial_b \partial_a t_i}{y - y_i} + \Sigma \frac{\partial_a t_i \partial_b y_i}{(y - y_i)^2} \end{aligned}$$

ふたたび 上のトリック (*) により

$$\begin{aligned} &= \Sigma \frac{\partial_a \partial_b t_i}{y - y_i} + \frac{y_i\ \partial_b t_i \partial_b y_i}{(y - y_i)^2} \\ &= \Sigma \frac{\partial_a \partial_b t_i}{y - y_i} + \frac{\partial_b t_i \partial_a y_i}{(y - y_i)^2} \\ &= \partial_a\ \Sigma\ \frac{\partial_b t_i}{(y - y_i)} \\ &= \partial_a\ \Sigma\ \frac{g_i}{f_i'(y - y_i)} \end{aligned}$$

これで証明の 1 の部分を終わる。

9. Part 2. 拡張定理.

これには様々な拡張定理を使えるだろう。ここでは二つを紹介する。

定理 9.1 (Camacho-Lins-Sad, Ann.Math. 1992). M^2 をコンパクトな曲面、$C \subset M$ を曲線、ω を C の近傍で定義された有理形関数とする。$M - C$ が *Stein* であるとする。このとき ω は M の有理形関数に拡張する。

Griffiths は次のような拡張定理を使っている。

定理 9.2 (Griffiths Inv.Math. 1976). 射影直線 $\ell \subset \mathbb{P}^n$ のまわりで定義された有理形関数は射影空間全体 $\mathbb{P}^n$ に解析的に拡張する。

我々は $n = 2$ の場合だけだからどちらでも同じである。

10. Part 4. Lagrange interpolation formula.

1 で定義された 2 一形式 Ω は、その形から明らかに $y = y_i$ で極を持つ。そのほかに $y = \infty$ でも極を持つように見える (きっと持つはずである)。そこでの Ω の形を観察しよう。一般に $\mathbb{P}^1$ 上の $y = y_i$ で 1− 位の極を持つ 1 一形式は $y = y_i$ での residue を ρ_i 書くと

$$(\Sigma \frac{\rho_i}{y - y_i} + \text{polynomial in } y)\ dy$$

と書ける。$u = 1/y$ とおくと

$$\frac{du}{dy} = -\frac{1}{y^2}$$

これより

$$dy = -y^2 du = -\frac{du}{u^2}$$

上の 1 一形式を u で書くと

$$\begin{aligned}
&(\Sigma \frac{\rho_i}{y - y_i} + \text{polynomial in } y)\ dy \\
&\qquad = (\Sigma \frac{-\rho_i}{\frac{1}{u} - y_i} + \text{polynomial in } 1/u)\frac{du}{u^2} \\
&\qquad = \Sigma \frac{-\rho_i}{1 - y_i u}\frac{du}{u} + \text{polynomial in } 1/u + \frac{du}{u^2} \\
&\qquad = \Sigma\ -(\rho_i)(1 + y_i u + (y_i u)^2 + \cdots)\ \frac{du}{u} + +\text{polynomial in } 1/u\frac{du}{u^2} \\
&\qquad = (\frac{\text{polynomial in}\quad 1/u}{u^2})\ du - \Sigma\rho_i\frac{du}{u} + (\text{holomorphic function of } u)\ du
\end{aligned}$$

これが Lagrange の inter porlation furmula である。1 で作った 1 一形式 Ω に

$$\rho_i = \frac{g_i}{f_i'}$$

として適用すると定理の仮定より

$$\Sigma\ \rho_i = \Sigma\ \frac{g_i}{f_i'} = 0$$

従って Ω は $y = \infty$ でも正則である。特に直線 ℓ は係数 a, b を少し動かしても曲線 C と丁度 d 個の点 $y = y_1, \ldots, y_d$ で交わる。従って C の次数は d である。

証明の核にあたるのは Reiss の方法 (ii) と Darboux の計算 (iii) である。この定理は Griffiths により一般化されているが、そこでもこれらの方法が繰り返し用いられている。

定理 10.1. *n 次元の double translation surface S は種数 $n+1$ の標準曲線 $C \in \mathbb{P}^n$ の双対 $2n$-Web $\mathcal{W}_C$ と同形であり、C のヤコビアンのテータ因子の $2n$-Web $\mathcal{W}_\Theta$ と同形である。*

証明. Translation surface は rank ≥ 1 なので Lie-Darboux-Griffiths の定理により線形化できる、つまり S はある次数 $2n$ の射影曲線 $C \in \mathbb{P}^n$ の双対 $2n$-Web $\mathcal{W}_C$ と同形である。また C は既約であることがわかる。上の定理の証明の後半の部分と同じ議論により C は標準曲線である。

札幌市 060
E-mail address: nakai@math.hokudai.ac.jp