

双曲 4g 角形と曲面群の PSU(1,1)-表現

岡井 孝行 (Takayuki Okai)

以下の内容は、講演の Note に若干の補足を加えたものであり、証明等の詳細に関しては、[O3]を見られたい。なお、 Σ_g は種数 g の有向閉曲面を、 \mathcal{T}_g はその Teichmüller 空間を表す。

0. Preliminaries

Review of [O1], [O2]. Poincaré disk D^2 内に、各辺は clock-wise に

$\alpha_1, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \dots, \alpha_g, \beta_g, \alpha_g^{-1}, \beta_g^{-1}$ と名前が付き (但し、 $g \geq 2$)。

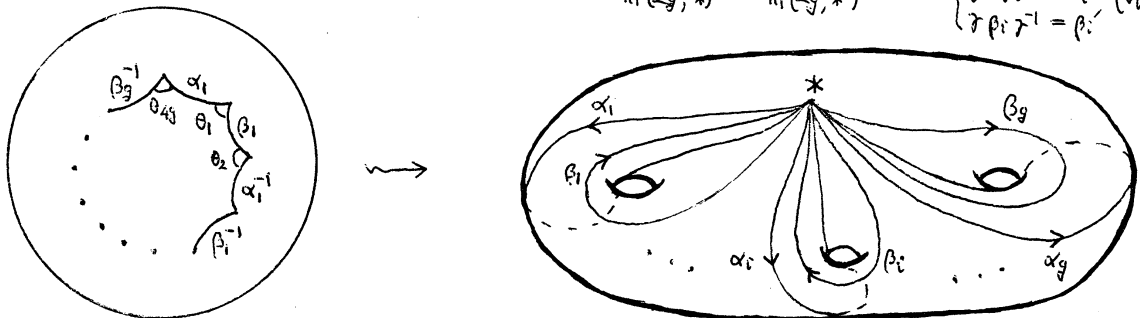
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{辺 } \alpha_i \text{ の長さ} = \text{辺 } \alpha_i^{-1} \text{ の長さ} = l_i \\ \text{辺 } \beta_i \text{ の長さ} = \text{辺 } \beta_i^{-1} \text{ の長さ} = \tilde{l}_i \end{array} \right. \quad (1 \leq i \leq g).$$

$$\alpha_i \text{ と } \beta_i \text{ の内角} = \theta_1, \dots, \beta_g^{-1} \text{ と } \alpha_1 \text{ の内角} = \theta_{4g}, \quad \sum_{j=1}^{4g} \theta_j = 2\pi$$

と n) hyperbolic geodesic $4g$ -gon が与えられたとき、これから、marked Riemann

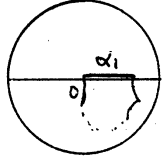

surface $[(\Sigma_g, R), (\alpha_1, \dots, \beta_g)] \in \mathcal{T}_g$ を得る。(但し、marking $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ は $\pi_1(\Sigma_g, *)$ の

system of generators $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ の次の \sim による同値類：
 $\pi_1(\Sigma_g, *) \ni (\alpha_1, \dots, \beta_g) \sim \pi_1(\Sigma_g, *) \ni (\alpha'_1, \dots, \beta'_g) \iff \exists \gamma: \text{path from } * \text{ to } *' \text{ s.t. } \begin{cases} \gamma \alpha_i \gamma^{-1} = \alpha'_i \\ \gamma \beta_i \gamma^{-1} = \beta'_i \end{cases} (i=1, \dots, g)$


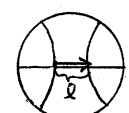


(α_1, \dots, β_g) は hyperbolic $4g$ -gon の頂点を同一視して得る点 $* \in \Sigma_g$ から $*$ への geodesic arcs になる。このとき、

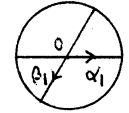
(1). この $(\Sigma_g, h), (\alpha_1, \dots, \beta_g)$ に対応する holonomy 表現 $\rho: \pi_1(\Sigma_g, *) \rightarrow \text{PSU}(1,1)$

が、 (辺 α_i を $0 \in \mathbb{D}^2$ から実軸方向に向かう geodesic arc とする) とする “normalization” の下で (θ_j の代わりに外角 $\varphi_j = -\pi + \theta_j$ を使う: )

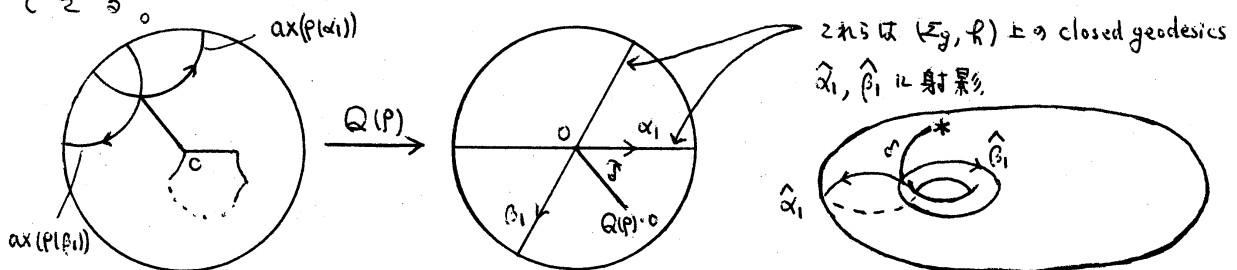
$$(\star): \begin{cases} \rho(\alpha_i) = e\left(\sum_{j=1}^{4i-4} \varphi_j\right) \text{eh}(\lambda_i) e(\pi - (\varphi_{4i-2} + \varphi_{4i-1})) e\left(-\sum_{j=1}^{4i-4} \varphi_j\right) \\ \rho(\beta_i) = e\left(-\pi + \sum_{j=1}^{4i-1} \varphi_j\right) \text{eh}(\hat{\lambda}_i) e(-\pi + (\varphi_{4i-3} + \varphi_{4i-2})) e\left(\pi - \sum_{j=1}^{4i-1} \varphi_j\right) \end{cases}$$

(但し $e(\varphi) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix}$ , $\text{eh}(\lambda) = \begin{bmatrix} \text{ch}(\frac{\lambda}{2}) & \text{sh}(\frac{\lambda}{2}) \\ \text{sh}(\frac{\lambda}{2}) & \text{ch}(\frac{\lambda}{2}) \end{bmatrix}$ )

と読み取れる。(これは $\frac{0 \in \mathbb{D}^2}{\mathbb{Z}_2 \in \pi_0 \mathbb{D}^2}$ の $\rho(\alpha_i), \rho(\beta_i)$ による行き先を求めたもの)

(2). ρ が standard position にある \iff $\begin{cases} \text{ax}(\rho(\alpha_i)) = \text{the real axis} \\ \text{and} \\ \text{ax}(\rho(\alpha_i)) \cap \text{ax}(\rho(\beta_i)) = \{0\} \subset \mathbb{D}^2 \end{cases}$ 

とするとき、(1) で求めた ρ を standard position に移すような conjugate transformation $Q(\rho) \in \text{PSU}(1,1)$ を構成できる。さらに、 0 と $Q(\rho) \cdot 0$ を結ぶ geodesic arc $\hat{\sigma}$ を Σ_g に射影することで(それを $\hat{\sigma}$ と書く)、与えられた hyperbolic $4g$ -gon から出来る α_i, β_i (geodesic arcs from $*$ to $*$) に関する $*$ の (Σ_g, h) 内での位置、及び $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ の $\pi_1(\Sigma_g, *)$ の generators としての choice の仕方をも特定できる。

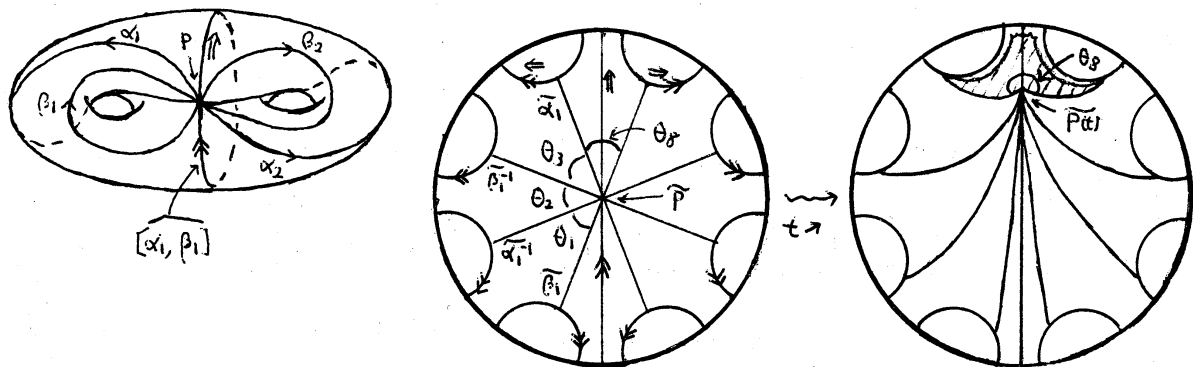



注. Σ_g の marking $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ を fix すると ε . $* \in \Sigma_g$ と $\pi_1(\Sigma_g, *)$ の inner automorphism の自由度 2 より、それを represent する $m = (*; (\alpha_1, \dots, \beta_g))$ のとり方は $\widetilde{\Sigma}_g$ 分だけある ($\{*(\text{fixed}) \text{ から any } * \wedge \text{ の path の homotopy class} \} = \widetilde{\Sigma}_g$)。

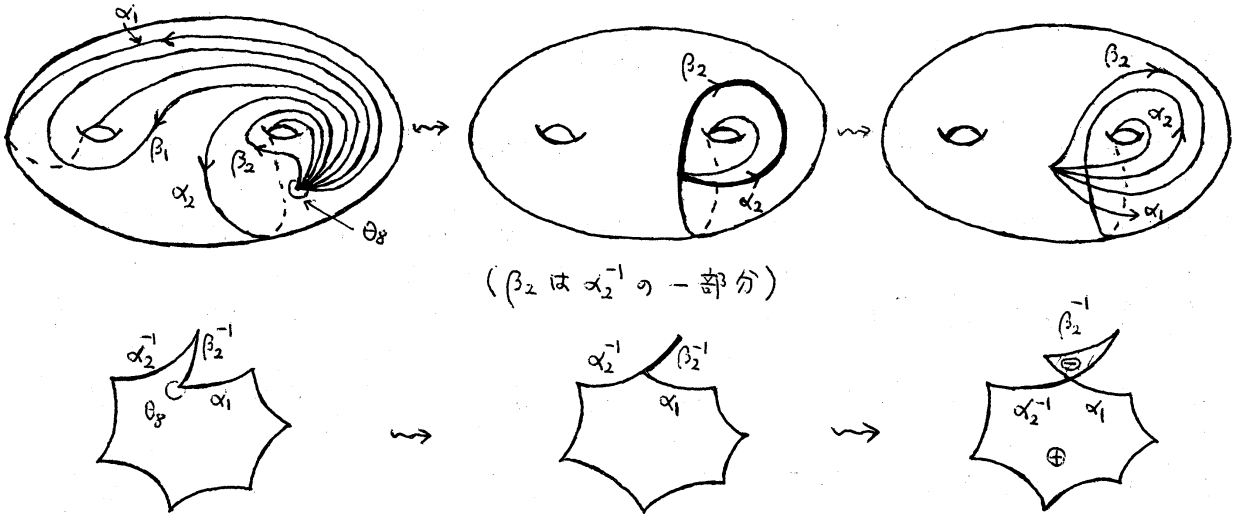
一般に、 $((\Sigma_g, h), (\alpha_1, \dots, \beta_g))$ (Riemann surface with fixed marking) にあて、 $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ を represent する $m = (*; (\alpha_1, \dots, \beta_g)) \in \widetilde{\Sigma}_g$ を任意にとると ε .
 この $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \dots, \alpha_g, \beta_g, \alpha_g^{-1}, \beta_g^{-1}$ に沿って D^2 上で hyperbolic 4g-gon を描くと、convex とは限らないうし、self-intersection があるかも知れない。

例. (L. Keen [K]) $\alpha_1 = \hat{\alpha}_1, \beta_1 = \hat{\beta}_1$ とし、左ものは (Σ_g, h) に対して convex な hyperbolic 4g-gon をなす。((Σ_g, h) 上の closed curve γ に対して、 γ に free-homotopic な唯一の closed geodesic を $\hat{\gamma}$ で表す)

例 (non-convex な (Σ_g, h) の基本領域を囲む hyperbolic 4g-gon (S. Kojima))
 まず、正八角形 ($\theta_j = \frac{2\pi}{8}$) から出来る $((\Sigma_2, h), (\alpha_1, \dots, \beta_2))$ を用意する。
 対称性により、base point p は $[\alpha_1, \beta_1]$ 上にある。そこで、 p を $[\alpha_1, \beta_1]$ 上 ε .
 その向きに動かす ($p(t)$ ($t \geq 0$) と書く) と、 t が十分大で、 $\theta_8 > \pi$ となる。
 この過程で、 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ を表す geodesic arcs (from $p(t)$ to $p(t)$) は $p(t)$ 以外で交わらず、こうして出来る non-convex hyperbolic 8-gon は (Σ_2, h) の基本領域を囲む。



“例” (self-intersectionのある hyperbolic $4g$ -gon) : やはり正八角形から始めて、今度は base point を  の方向に動かすと、次の図のようになるであろう:

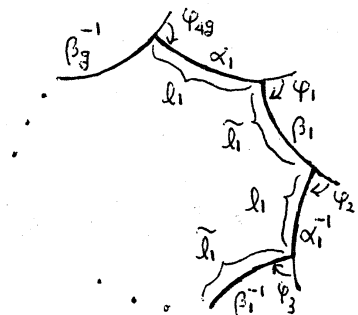


そこで、(後で扱う $l_i = 0$ or $\tilde{l}_i = 0$ の場合も考慮に入れて)

Definition. (1). $l = (l_i) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^g$, $\tilde{l} = (\tilde{l}_i) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^g$, $\varphi = (\varphi_j) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{4g}$ に対して、 (l, \tilde{l}, φ) が “system of data of a marked hyperbolic $4g$ -gon”

$$\iff \begin{cases} \textcircled{1} \sum_{j=1}^{4g} \varphi_j \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ \textcircled{2} \prod_{i=1}^g \{ e^{i\varphi_{4i-3}} e^{i\varphi_{4i-2}} e^{i\varphi_{4i-1}} e^{i\varphi_{4i}} \} = I \end{cases}$$

(2). system of data (l, \tilde{l}, φ) から出来る \mathbb{D}^2 内の hyperbolic $4g$ -gon (長さ 0 の辺があってもよいので、geodesic arcs の union というべきか) の marked isometry class を $X(l, \tilde{l}, \varphi)$ と書き marked hyperbolic $4g$ -gon とする。



(注. 条件②は $X(l, \tilde{l}, \varphi)$ が closing するための条件.)

1. Case for the Teichmüller component

Fact (W. Goldman [G]). space of representations $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSU}(1,1)) / \text{conj.}$

は、その Euler number e ($2-2g \leq e \leq 2g-2$) により 連結成分に分かれ、

$e = 2-2g$ の成分 \longleftrightarrow holonomy 表現から成る成分 $\longleftrightarrow \mathcal{T}_g$ 。

$((\Sigma_g, \mathbb{R}), (\alpha_1, \dots, \beta_g))$ と $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ を represent する $m = (*; \alpha_1, \dots, \beta_g)$

を任意に与えると、これにより marked hyperbolic $4g$ -gon $X_{\mathbb{R}, m} = X(\ell, \tilde{\ell}, \varphi)$

($\forall \ell_i, \tilde{\ell}_i > 0$) が構成され、この $(\ell, \tilde{\ell}, \varphi)$ から $(*)$ により、 $f = f(\ell, \tilde{\ell}, \varphi)$

with $e(f) = 2-2g$ が出来た。(注 条件②の下で「 $\textcircled{D} \iff$ この f が

$\prod_{i=1}^g [p(\alpha_i), p(\beta_i)] = I$ を満たし、表現になる」) ここで、逆に、abstract

な f with $e(f) = 2-2g$ から出発して、それに対応する marked hyperbolic $4g$ -gon (normalized) を構成できることを主張する：

Lemma 1.1.1. $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in \text{PSU}(1,1)$ with $b \neq 0$. は $\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} = e(\Phi) e(h) e(\Theta)$

with $l > 0$, $\Phi, \Theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ と unique に書ける (Cartan decomposition).

(\textcircled{D} $\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in \text{PSU}(1,1)$ の $\text{SU}(1,1)$ への lifts を $\pm \begin{pmatrix} |a|e^{i\theta} & |b|e^{i\psi} \\ |b|e^{-i\psi} & |a|e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ と書くとき
 $l = 2 \log\{|a| + \sqrt{|a|^2 - 1}\}$, $(\Phi, \Theta) = (\theta + \psi, \theta - \psi)$ と決まる。□)

(注 「 $l=0$ 」は $5x)$ と 「 $b=0$ 」に対応し、このとき $e(\Phi) e(h) e(\Theta) = e(\Phi + \Theta)$ で、 Φ, Θ に関しては和 $\Phi + \Theta$ のみが意味を持つ。

そこで、最初 f with $e(f) = 2-2g$ が与えられたとき、 $\check{f}(\alpha_i) = e(\check{\Phi}_i) e(h_i) e(\check{\Theta}_i)$ と Cartan 分解し、 $f = e(\check{\Phi}_1)^{-1} \check{f} e(\check{\Phi}_1)$ とおく。(この f は $f(\alpha_i) = e(\check{\Phi}_i) e(h_i) e(\check{\Theta}_i)$ にあつて 「 $\check{\Phi}_i = 0$ 」を満たす。即ち、 f は g_0 の意味で normalize されたものになる。)

ここで、
$$\begin{cases} \rho(x_i) = e(\Phi_i) e^{h(l_i)} e(\Theta_i) \\ \rho(\beta_i) = e(\tilde{\Phi}_i) e^{h(\tilde{l}_i)} e(\tilde{\Theta}_i) \end{cases} \quad (l_i, \tilde{l}_i > 0)$$
 と Cartan 分解するとき、

これを (★) のように書きたい。

Lemma 1.1.2. $\forall \Phi_i, \Theta_i, \tilde{\Phi}_i, \tilde{\Theta}_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \quad (i=1, \dots, g)$ with $\Phi_1 = 0$.

が与えられたとき、 $\varphi_j \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \quad (j=1, \dots, 4g)$ with $\sum_{j=1}^{4g} \varphi_j \equiv 0$ に対する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{4i-4} \varphi_j = \Phi_i, & (\pi - (\varphi_{4i-2} + \varphi_{4i-1})) + (-\sum_{j=1}^{4i-4} \varphi_j) = \Theta_i \\ -\pi + \sum_{j=1}^{4i-1} \varphi_j = \tilde{\Phi}_i, & (-\pi + (\varphi_{4i-3} + \varphi_{4i-2})) + (\pi - \sum_{j=1}^{4i-1} \varphi_j) = \tilde{\Theta}_i \end{cases} \quad \text{は}$$

(★★):
$$\begin{cases} \varphi_{4i-3} = \Theta_i + \tilde{\Phi}_i \\ \varphi_{4i-2} = \pi - \Theta_i + \tilde{\Theta}_i \\ \varphi_{4i-1} = -\Phi_i - \tilde{\Theta}_i \\ \varphi_{4i} = -\pi - \tilde{\Phi}_i + \Phi_{i+1} \end{cases} \quad (i=1, \dots, g \pmod{g})$$

と unique に解ける。 □

こうして定まる $(\mathcal{L}, \tilde{\mathcal{L}}, \varphi)$ が ①, ② を満たすことも言えて、

Theorem 1.1. $\{P \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSU}(1,1)) ; e(P) = 2-2g, P \text{ は } \Phi_1 = 0 \text{ を満たす}\}$

($= \text{Rep}_{\Phi_1=0}^{e=2-2g}$ とおく) と $\{(\mathcal{L}, \tilde{\mathcal{L}}, \varphi) \in (\mathbb{R}_{>0})^g \times (\mathbb{R}_{>0})^g \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{4g} ; (\mathcal{L}, \tilde{\mathcal{L}}, \varphi) \text{ は}$

①, ② 及び $e(P(\mathcal{L}, \tilde{\mathcal{L}}, \varphi)) = 2-2g$ を満たす $\}$ は上記の対応により 1:1。 □

次に、これは (mod. conj. でなくて) 表現のレベルにおいて何をとりえたものか、について調べる。まず、 $\forall \check{P}$ with $e(\check{P}) = 2-2g$ を「 $\Phi_1 = 0$ 」に normalize する操作は S^1 -bundle ($e(\check{\Phi}_1) \in S^1$) を形成する。次に、

$\forall \rho \in \text{Rep}_{\Phi_1=0}^{e=2-2g}$ に対して、その standard position が定まり、それから決まる δ を用いて $m = (*; (\alpha_1, \dots, \beta_g)) \in \widehat{\Sigma}_g$ が定まる。 α_1, \dots, β_g を $*$ から $*$ に到る geodesic arcs ($[P] \in \mathcal{T}_g$ の定める hyperbolic structure に関しての) として実現すると、それがちょうど Th. 1.1 によって ρ から定まる $X(l, \mathcal{I}, \varphi)$ を与えるものになる。以上をまとめると (右肩の「 $e=2-2g$ 」は連結成分を示す) :

Theorem 1.2. 上述の $\check{\rho} \mapsto \rho \mapsto [P]$ は次の fibrations を形成する:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\pi_1(\widehat{\Sigma}_g), \text{PSU}(1,1))^{e=2-2g} & \cong & \mathcal{T}_g \times \widehat{\Sigma}_g \times S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Rep}_{\Phi_1=0}^{e=2-2g} & \cong & \mathcal{T}_g \times \widehat{\Sigma}_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(\pi_1(\widehat{\Sigma}_g), \text{PSU}(1,1))^{e=2-2g} / \text{conj.} & \cong & \mathcal{T}_g \end{array}$$

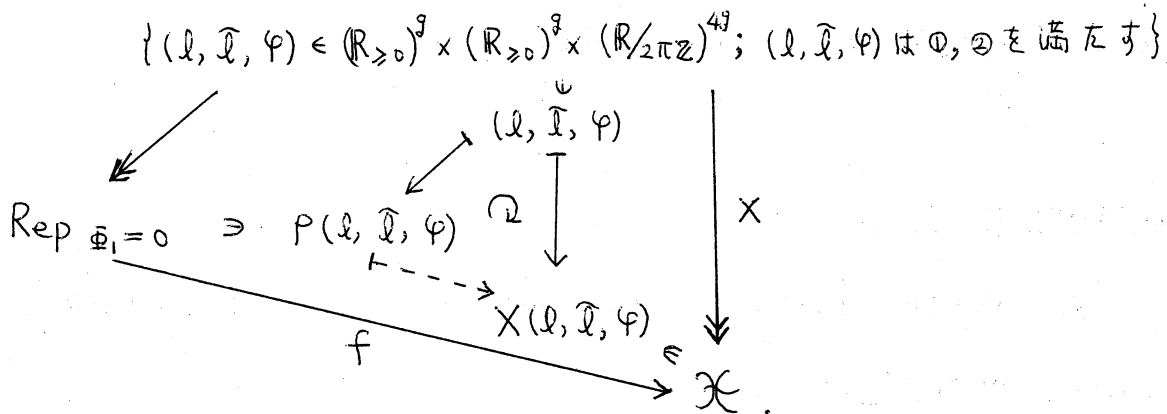
ここで、 $\mathcal{T}_g \times \{m\} \ni \rho$ ($m = (*; (\alpha_1, \dots, \beta_g)) \in \widehat{\Sigma}_g$) は m により与えられた $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ に沿う holonomy 表現 $\pi_1(\widehat{\Sigma}_g, *) \xrightarrow{\rho} \text{PSU}(1,1)$ (with 「 $\Phi_1 = 0$ 」) として幾何学的に意味付けられ、 $m = (*; (\alpha_1, \dots, \beta_g))$ は ρ から具体的に求めることが出来る。□

2. Components with small Euler numbers

$|e(\rho)| < 2-2g$ のときは、 $(l, \widehat{\mathcal{I}}, \varphi)$ から $(*)$ により $\rho(l, \widehat{\mathcal{I}}, \varphi)$ は決まるが、 ρ が与えられても、system of data $(l, \widehat{\mathcal{I}}, \varphi)$ が unique に決まるとは限らない ($l_i = 0$ のとき、 $\Phi_i + \Theta_i$ から Φ_i, Θ_i は unique に決まらなないので)。しかし、ものとしての $X(l, \widehat{\mathcal{I}}, \varphi)$ は ρ から unique

に決まる:

Theorem 2. $\exists f : \{p \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSU}(1,1)); p \text{ は } \langle \mathfrak{h}_1=0 \rangle \text{ を満たす}\}$
 $(= \text{Rep}_{\mathfrak{h}_1=0} \text{ と書くと}) \longrightarrow \{\text{marked hyperbolic } 4g\text{-gon } X(l, \tilde{l}, \varphi)\} (= \mathcal{X} \text{ と書くと})$ s. t.

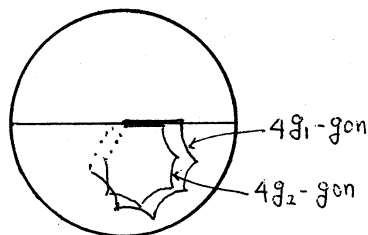


(注 map $X : (l, \tilde{l}, \varphi) \mapsto X(l, \tilde{l}, \varphi)$ は $\forall l_i, \tilde{l}_i > 0$ に制限すると 1:1。
 P に対して $l_i = 0$ となるときは $p \in \text{Rep}_{\mathfrak{h}_1=0}$ と見なす。

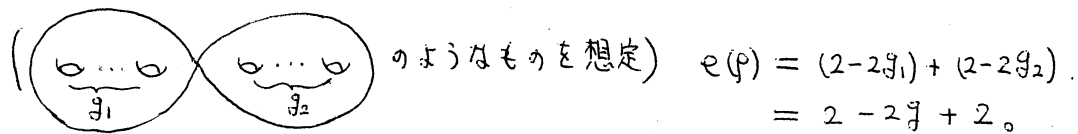
証明の方針: (**) の式を用いて $l_i = 0$ or $\tilde{l}_i = 0$ となるときにも $X(l, \tilde{l}, \varphi)$ の picture が $P(l, \tilde{l}, \varphi)$ の data から再現できることを言う。□

例. $\text{Im } P \subset K = \{e(\theta); \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ (abel 群) のとき $X(l, \tilde{l}, \varphi) = \text{one point}$.
 (従って f は単射ではない。)

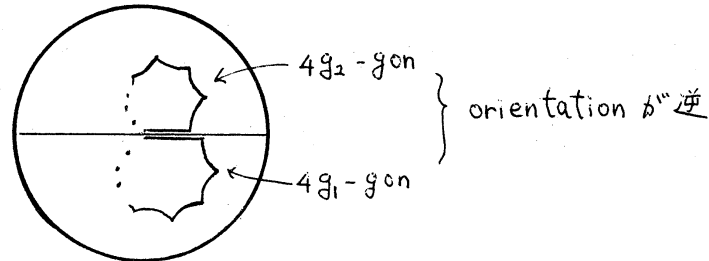
例 $X(l, \tilde{l}, \varphi)$ が



となるとき、
 (このときは $\forall l_i, \tilde{l}_i > 0$)



例 $X(\mathcal{L}, \mathcal{I}, \varphi)$ の



のとき, $e(p) = (2-2g_1) + (2g_2-2)$.

References.

- [G] W. Goldman: Topological components of spaces of representations, Invent. Math. 93 (1988), 557-607.
- [K] L. Keen: Canonical polygons for finitely generated Fuchsian groups, Acta Math. 115 (1966), 1-16.
- [O1] T. Okai: Reading the Fuchsian representations of a closed Riemann surface from its fundamental domains, preprint.
- [O2] T. Okai: Hyperbolic $4g$ -gons and Fuchsian representations, 数理解析研究所講究録 967 Analysis of Discrete Groups (1996), 132-141.
- [O3] T. Okai: Hyperbolic $4g$ -gons and $PSU(1,1)$ -representations of surface groups, Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics #51 リーマン面に関連する位相幾何学 (1997), 11-19.